Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Цзи-Цюан Жао, Ли-Хун Ван, Вэй Лиу, Цзин-Сун Хэ, Решения уравнения Захарова типа волн-убийц, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 3, 434–454

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9217>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:49:59

© 2017 г.

Цзи-Цюан Жао*, Ли-Хун Ван[†],
Вэй Лиу[‡], Цзин-Сун Хэ*

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА ТИПА ВОЛН-УБИЙЦ

Выведена общая формула для решений типа волн-убийц уравнения Захарова с помощью метода билинейных преобразований. Волны-убийцы N -го порядка представлены в явном виде через определители N -го порядка, матричные элементы которых заданы простыми выражениями. Показано, что фундаментальная волна-убийца представляет собой линейную волну-убийцу с линейным профилем на плоскости (x, y) , которая возникает на постоянном фоне при $t \ll 0$ и затем постепенно стремится к постоянному фону при $t \gg 0$. Волны-убийцы высшего порядка, возникающие на постоянном фоне и затем исчезающие в нем, описывают взаимодействие нескольких фундаментальных линейных волн-убийц. Рассмотрены также различные структуры волн-убийц высшего порядка. Аналитически и графически представлены различия между волнами-убийцами уравнения Захарова и уравнения Дэви–Стюартсона первого типа.

Ключевые слова: уравнение Захарова, метод билинейных преобразований, волны-убийцы.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9217>

1. ВВЕДЕНИЕ

Волну-убийцу также часто называют волной-монстром, волной-разбойником, аномальной волной и экстремальной волной. Впервые этот термин появился в исследованиях по океанографии [1]–[3] и постепенно распространился в другие области физики, такие как бозе–эйнштейновская конденсация [4], [5], оптические системы [6]–[8], сверхтекучесть [9], физика плазмы [10], [11] и т. д. Волна-убийца представляет собой

Работа была поддержана National Natural Science Foundation of China (гранты № 11671219 и № 11271210) и K. C. Wong Magna Fund (Ningbo University).

*Mathematics Department, Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo, China.
E-mail: hejingsong@nbu.edu.cn, jshe@ustc.edu.cn

[†]Faculty of Mechanical Engineering & Mechanics, Ningbo University, Ningbo, China

[‡]School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei, China

разновидность явлений большой амплитуды, локализованных в пространстве и времени. Ее можно наглядно представить как объект, появляющийся из ниоткуда и исчезающий бесследно [12]. Такие волны являются общепризнанным явлением в экспериментальных наблюдениях и наблюдениях за природой. Для описания феномена волн-убийцы хорошо подходят рациональные решения нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [13]–[17], поэтому их называют решениями типа волн-убийц. Решения в виде волн-убийц первого порядка для НУШ наблюдались в оптических волокнах [18] и в водяных бассейнах [19]. В этих работах $(1+1)$ -мерное НУШ имело вид

$$iu_t = u_{xx} + 2u|u|^2, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ означает поле огибающей соответствующей физической системы. Более того, кроме НУШ решения в виде волн-убийц исследованы во многих других $(1+1)$ -мерных интегрируемых системах [20]–[26], другие примеры приведены в обзорных работах [27], [28].

Вообще говоря, обобщение $(1+1)$ -мерных солитонных уравнений и их свойств интегрируемости на $(2+1)$ -мерное пространство – весьма непростая задача. Недавно исследование волн-убийц было распространено на $(2+1)$ -мерные [29]–[34] и даже $(3+1)$ -мерные системы [35]. Фундаментальные волны-убийцы в $(2+1)$ -мерных системах имеют линейный профиль и называются линейными волнами-убийцами, они получены численно [32] и аналитически [29]–[31]. Линейный профиль этих волн сильно отличается от профиля фундаментальной волны-убийцы в $(1+1)$ -мерной системе, который представляет собой главный пик, окруженный несколькими постепенно уменьшающимися пиками. Кроме того, нефундаментальные волны-убийцы совершенно отличны от волн-убийц высшего порядка в $(1+1)$ -мерных системах. Например, профиль нефундаментальной волны-убийцы содержит переходные структуры, такие как параболы и гиперболы. Эти результаты показывают, что волны-убийцы в $(2+1)$ -мерных системах представляют значительный интерес и заслуживают дальнейшего изучения в различных солитонных уравнениях.

В настоящей работе мы проводим исследование решений типа волн-убийц уравнения Захарова, т. е. $(2+1)$ -мерного НУШ с богатыми физическими и математическими приложениями, которое имеет вид

$$\begin{aligned} i\psi_t &= \psi_{xy} + V\psi, \\ V_y &= 2(|\psi|^2)_x. \end{aligned} \quad (2)$$

Это уравнение было предложено Захаровым в 1980 г. [36] и позже было заново выведено Страчаном [37], [38] в 1992 г. из интегрируемых систем симметричного пространства, а в 1993 г. – с помощью размерной редукции самодуального уравнения Янга–Миллса. Свойства интегрируемости уравнения Захарова и его решения, включая солитоны [36], [39]–[46], лампы [40] и дромионы [40], [41], [44], [45], были подробно изучены. Однако построение волн-убийц для уравнения Захарова все еще остается нерешенной проблемой. Кроме того, фундаментальные волны-убийцы в $(2+1)$ -мерных системах имеют похожие линейные профили. Каким же образом можно описать различия между ними? Нефундаментальные волны-убийцы в $(2+1)$ -мерных системах найдены в различных формах, таких как мультиволна-убийца [29]–[31], волна-убийца высшего порядка [29]–[31], взрывная волна-убийца [30]. Возникает вопрос: существуют ли другие формы?

В настоящей работе с помощью тау-функций иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) получено общее представление решений уравнения Захарова в виде волн-убийц. При этом дан ответ на два упомянутых выше вопроса. Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 методом билинейных преобразований [47] доказана основная теорема, с помощью которой решения типа волн-убийц уравнения (2) выражаются через определитель порядка N . Явный вид и динамика решений типа волн-убийц обсуждаются в разделе 3. Выводы приводятся в разделе 4.

2. РЕШЕНИЕ ТИПА ВОЛНЫ-УБИЙЦЫ В ДЕТЕРМИНАНТНОМ ВИДЕ

В этом разделе рассмотрены волны-убийцы общего вида для уравнения Захарова. Приведем уравнения (2) к билинейному виду

$$\begin{aligned}(D_x D_y - i D_t) g \cdot f &= 0, \\ (D_x^2 + 2) f \cdot f &= 2 g g^*\end{aligned}\quad (3)$$

с помощью преобразований независимых переменных

$$\psi = \frac{g}{f}, \quad V = 2(\ln f)_{xy}. \quad (4)$$

Здесь f – действительная функция, g – комплексная функция от трех переменных x , y и t , звездочка означает комплексное сопряжение, а оператор D есть билинейный дифференциальный оператор Хироты [47], заданный по формуле

$$\begin{aligned}P(D_x, D_y, D_t)F(x, y, t, \dots)G(x, y, t, \dots) &= \\ = P(\partial_x - \partial_{x'}, \partial_y - \partial_{y'}, \partial_t - \partial_{t'}, \dots)F(x, y, t, \dots)G(x', y', t', \dots)|_{x'=x, y'=y, t'=t},\end{aligned}$$

где P – полином по $D_x, D_y, D_t, \dots$.

ТЕОРЕМА 1. Уравнение Захарова (2) имеет несингулярные рациональные решения вида (4), где f и g представлены в виде определителей размера $N \times N$:

$$f = \tau_n|_{n=0}, \quad g = \tau_n|_{n=1}. \quad (5)$$

Здесь матрица τ_n задана выражением

$$\tau_n = \det_{1 \leq i, j \leq N} (m_{2i-1, 2j-1}^{(n)}), \quad (6)$$

ее элементы имеют вид

$$m_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^i \frac{a_k}{(i-k)!} (p \partial_p + \xi' + n)^{i-k} \sum_{l=0}^j \frac{a_l^*}{(j-l)!} (p^* \partial_{p^*} + \xi'^* - n)^{j-l} \frac{1}{p + p^*} \Big|_{p=1}, \quad (7)$$

где $\xi' = px - y/p + 2ip^2t$, i, j – произвольные положительные целые числа, a_k и a_l – произвольные комплексные постоянные.

Доказательства теоремы, а также отсутствия сингулярностей в таких рациональных решениях представлены в приложении А. Подчеркнем, что эти рациональные

решения можно также выразить в более явном виде через полиномы Шура, как показано в работах [29], [48]. Аналогично анализу $(1+1)$ -мерного НУШ (1), проведенному в работе [48], можно без потери общности положить $a_0 = 1$, $a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 0$ и оставить несокращаемые комплексные параметры $a_3, a_5, \dots, a_{2N-1}$. Выведем теперь общие решения типа волн-убийц для $(2+1)$ -мерного НУШ (2) с помощью теоремы 1 и рассмотрим различные типы их динамики на плоскостях (x, y) , (x, t) .

3. ДИНАМИКА ВОЛН-УБИЙЦ

В этом разделе дан подробный анализ динамики решений типа волн-убийц уравнения Захарова (2) в соответствии с теоремой 1.

3.1. Фундаментальные решения типа волн-убийц. Положив $N = 1$ в теореме 1, получаем следующее решение:

$$\psi = \frac{m_{11}^{(1)}}{m_{11}^{(0)}}, \quad V = 2(\ln m_{11}^{(0)})_{xy}, \quad (8)$$

где

$$m_{11}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(x - y + 2it + a_1 - \frac{1}{2} \right) \left(x - y - 2it + a_1^* - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{8},$$

$$m_{11}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(x - y + 2it + a_1 + \frac{1}{2} \right) \left(x - y - 2it + a_1^* - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{8}.$$

Полученное рациональное решение описывает линейную волну, изображенную на рис. 1, которая резко отличается от движущегося линейного солитона $(2+1)$ -мерных солитонных уравнений, причем в последнем случае солитоны удерживают линейный профиль идеально, совершенно без затухания при распространении в плоскости (x, y) . Однако ψ в уравнении (8) ведет себя по-другому. При $|t| \gg 0$ линейная волна приближается к постоянному фону, а в середине временного интервала она приобретает гораздо большую амплитуду. Поэтому такое рациональное решение является линейной волной-убийцей. Поскольку в $(2+1)$ -мерных системах большинство решений типа фундаментальных волн-убийц являются линейными волнами-убийцами, интересно выяснить, в чем заключаются отличия между фундаментальными волнами-убийцами различных $(2+1)$ -мерных систем. С этой целью рассмотрим локальные характеристики фундаментальных волн-убийц $(2+1)$ -мерных систем и сравним фундаментальные волны-убийцы $(2+1)$ -мерного уравнения (2) и уравнения Деви–Стюартсона первого типа (ДС1), полученные в статье [29].

3.2. Локальные характеристики фундаментальной волны-убийцы. Поскольку параметр a_1 в формулах для волны-убийцы (8) можно рассматривать как смещение пространства и времени, без потери общности воспользуемся нормировкой $a_1 = 0$. Таким образом, при $a_1 = 0$ в (8) модуль ψ имеет три экстремальных линии вида

$$L_1: \quad y = x - \frac{1}{2},$$

$$L_2: \quad y = x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{48t^2 + 3}}{2},$$

$$L_3: \quad y = x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{48t^2 + 3}}{2}. \quad (9)$$

Наличие этих трех линий подтверждается профилем на рис. 1д. Модуль $|\psi|$ достигает максимальной амплитуды, равной трем, при $t = 0$ вдоль линии L_1 (т.е. вдоль линии утроенной высоты постоянного фона); назовем L_1 линией максимальной амплитуды. Вдоль линий L_2 или L_3 модуль $|u|$ имеет минимальную амплитуду, равную нулю, поэтому L_2 и L_3 назовем линиями минимальной амплитуды. На основе указанных аналитических результатов определим направление фундаментальной линейной волны-убийцы как направление трех экстремальных линий, наклон которых равен единице. Определим ширину линейной волны-убийцы как расстояние между двумя линиями минимальной амплитуды по формуле

$$L_{\text{width}} = \sqrt{\frac{48t^2 + 3}{2}}.$$

Кроме того, определим глубину линейной волны-убийцы как разницу высот минимальной и максимальной амплитуд по формуле

$$L_{\text{depth}} = |\psi|_{L_1} - |\psi|_{L_2} = |\psi|_{L_1} - |\psi|_{L_3} = \sqrt{\frac{9}{16t^2 + 1}}.$$

Тогда естественно определить площадь сечения

$$S_{\text{section}} = L_{\text{width}} \times L_{\text{depth}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Эти три характеристики отражают локальные свойства решения типа линейной волны-убийцы ψ вида (8) уравнения Захарова (2).

Кроме того, чтобы отчетливо увидеть различие между фундаментальными волнами-убийцами уравнения Захарова (2) и уравнения ДСИ, рассмотрим указанные локальные характеристики следующей фундаментальной волны-убийцы [29] уравнения ДСИ:

$$A(x, y, t) = \sqrt{2} \left[1 + \frac{8i\Omega t - 4}{1 + (k_1 x + k_2 y)^2 + 4\Omega^2 t^2} \right],$$

где

$$k_1 = p + \frac{1}{p}, \quad k_2 = p - \frac{1}{p}, \quad \Omega = p^2 + \frac{1}{p^2}.$$

Поскольку в решении уравнения Захарова (2) $p = 1$ (см. уравнение (A.7)), в последующих вычислениях положим так же $p = 1$ и для $A(x, y, t)$. Аналогично вычисляются ширина, глубина и площадь сечения $A(x, y, t)$, которые соответственно даются выражениями

$$\begin{aligned} L'_{\text{depth}} &= \sqrt{\frac{18p^4}{4(p^4 + 1)^2 t^2 + p^4}}, \\ L'_{\text{width}} &= \frac{2\sqrt{12(p^4 + 1)^2 t^2 + 3p^4}}{(p^2 + 1)p}, \\ S'_{\text{section}} &= L'_{\text{width}} \times L'_{\text{depth}} = \frac{p^2}{p^2 + 1} 6\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Легко заметить связь $S'_{\text{section}} = \sqrt{2} S_{\text{section}}$, которая является важным отличием между двумя линейными волнами-убийцами.

Рис. 1. Фундаментальная волна-убийца $|\psi|$ (8) уравнения Захарова (2) на плоскости (x, t) с параметром $a_1 = 0$ при $t = -2$ (а), $t = -1$ (б), $t = -1/2$ (в), $t = -1/4$ (г), $t = 0$ (д), $t = 1/2$ (е), $t = 1$ (ж), $t = 2$ (з).

Рис. 2. Максимальная амплитуда $AMP_{\max}$ волны-убийцы первого порядка. Сплошная (верхняя) линия соответствует уравнению ДСИ, а штриховая (нижняя) линия – уравнению Захарова (2).

Как показано на рис. 1, максимальная амплитуда модуля $|\psi|$ изменяется при распространении волны-убийцы в плоскости (x, y) . Эволюция максимальной амплитуды модуля $|\psi|$ очень хорошо отражает локальные свойства на плоскости (x, y) , поэтому мы воспользуемся ею для обсуждения различия линейных волн-убийц уравнения (2) и ДСИ. Обозначим через $AMP_{\max}$ максимальную амплитуду линейной волны-убийцы, тогда

$$AMP_{\max} = |\psi|_{L_1} = \sqrt{\frac{16t^2 + 9}{16t^2 + 1}}$$

для $(2 + 1)$ -мерного НУШ (2) и

$$AMP'_{\max} = \sqrt{\frac{2(16t^2 + 9)}{16t^2 + 1}}$$

для уравнения ДСИ [29]. Очевидно, $AMP'_{\max} = \sqrt{2}AMP_{\max}$, при этом рис. 2 наглядно показывает, что максимальная амплитуда волны-убийцы уравнения ДСИ уменьшается быстрее по сравнению с амплитудой волны-убийцы уравнения Захарова (2).

Проведенное обсуждение сосредоточено на решении типа фундаментальной волны-убийцы уравнения Захарова (2). Естественно обсудить в следующем разделе с помощью теоремы 1 решения типа волн-убийц высшего порядка при $N \geq 2$.

3.3. Решения типа волн-убийц высшего порядка. В этом пункте рассматриваются волны-убийцы высшего порядка для уравнения Захарова (2). Волну-убийцу N -го порядка для произвольно заданного значения N можно получить с помощью теоремы 1. Например, полагая $N = 2$ в теореме 1, получаем следующую

волну-убийцу второго порядка в общем виде:

$$\psi = \frac{\begin{vmatrix} m_{11}^{(0)} & m_{13}^{(0)} \\ m_{31}^{(0)} & m_{33}^{(0)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{13}^{(1)} \\ m_{31}^{(1)} & m_{33}^{(1)} \end{vmatrix}}, \quad V = \left(2 \ln \left| \begin{vmatrix} m_{11}^{(0)} & m_{13}^{(0)} \\ m_{31}^{(0)} & m_{22}^{(1)} \end{vmatrix} \right| \right)_{xy}, \quad (10)$$

где выражения для $m_{ij}^{(n)}$ даны в теореме 1. Положим в теореме 1 $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, как было сделано для случая $N = 1$, и возьмем $N = 2$. Соответствующая явная формула для волны-убийцы второго порядка с произвольным параметром a_3 приведена в приложении Б. Максимум амплитуды $|\psi(x, y, t, a_3)|$ равен пяти (т. е. пятикратной высоте постоянного фона), что достигается при $t = 0$ и $a_3 = -1/12$, ее профиль изображен на рис. 3д.

Эволюция во времени волны-убийцы второго порядка изображена на рис. 3 при $a_3 = -1/12$, при этом максимум амплитуды (см. рис. 3д) появляется при $t = 0$, как и в предыдущем случае на рис. 1. Показано, что такая линейная волна-убийца возникает из постоянного фона (см. рис. 3б, соответствующий $t = -1/2$). На промежуточных временах две линейные волны-убийцы начинают взаимодействовать друг с другом и затем постепенно сливаются в одну большую линию до достижения максимальной амплитуды при $t = 0$. В отличие от нефундаментальных волн-убийц других $(2+1)$ -мерных солитонных уравнений [29]–[31], в которых волна-убийца второго порядка имеет гиперболическую или параболическую форму, здесь две линейных волны-убийцы постепенно сливаются в волну-убийцу в виде прямой линии с большой амплитудой и сохраняют начальное направление распространения. Линейные профили находятся с двух сторон максимальной амплитуды. При $t = 0$ амплитуда слившихся волн достигает максимального значения, равного пяти (см. рис. 3д), как и в фундаментальной структуре волны-убийцы второго порядка НУШ, у которой максимальное значение $|u|$ в пять раз превышает высоту фона. При $t > 0$ большая линейная волна-убийца постепенно расщепляется на две линии (см. рис. 3ж) и наконец снова уходит в постоянный фон (см. рис. 3з). Нефундаментальная волна-убийца продолжает удерживать прямой и параллельный линейный профиль, о чем (насколько нам известно) ранее никогда не сообщалось, поэтому она может считаться нефундаментальной волной-убийцей нового типа в $(2+1)$ -мерных системах. Назовем ее линейной волной-убийцей с параллельным профилем, чтобы подчеркнуть, что профиль такой волны-убийцы имеет несколько параллельных линий с точками экстремальных значений.

Теперь мы подошли к изучению более интересных и сложных случаев теоремы 1, соответствующих $N \geq 3$. Волны-убийцы высшего порядка при больших N ведут себя совершенно аналогично волнам с $N = 2$, но из постоянного фона появляется больше линейных волн-убийц на плоскости (x, y) и больше пиков на плоскости (x, t) . Затем они начинают взаимодействовать друг с другом, что приводит к появлению все более и более сложных волновых фронтов в области взаимодействия. Например, возьмем $N = 3$ в теореме 1 и параметры

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{12}, \quad a_4 = -\frac{1}{240}. \quad (11)$$

Рис. 3. Линейная волна-убийца второго порядка с параллельным профилем $|\psi|$ (10) уравнения Захарова (2) на плоскости (x, y) с параметрами $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1/12$ при $t = -2$ (а), $t = -1/2$ (б), $t = -1/12$ (в), $t = -1/18$ (г), $t = 0$ (д), $t = 1/12$ (е), $t = 1/2$ (ж), $t = 2$ (з).

Рис. 4. Линейная волна-убийца третьего порядка с параллельным профилем $|\psi|$ (10) уравнения Захарова (2) на плоскости (x, y) с параметрами (11) при $t = -2$ (а), $t = -1$ (б), $t = -1/3$ (в), $t = -1/20$ (г), $t = 0$ (д), $t = 1/3$ (е), $t = 1$ (ж), $t = 2$ (з).

Рис. 5. Линейная волна-убийца четвертого порядка с параллельным профилем $|\psi|$ (4) уравнения Захарова (2) на плоскости (x, y) с параметрами $a_0 = 1$, $a_3 = -1/12$, $a_5 = -1/240$, $a_7 = -1/4800$ в различные моменты времени: при $t = -3$ (а), $t = -1$ (б), $t = -1/3$ (в), $t = -1/30$ (г), $t = 0$ (д), $t = 1/3$ (е), $t = 1$ (ж), $t = 2$ (з).

Рис. 6. Волна-убийца второго порядка $|\psi|$ (10) уравнения Захарова (2) на плоскости (x, t) при $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 35i/2$, $y = 0$ (а), $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1/12$, $y = 0$ (б), $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = -35i/2$, $y = 0$ (в).

Соответствующая линейная волна-убийца третьего порядка с параллельным профилем показана на рис. 4. Очевидно, промежуточные профили решения становятся более изогнутыми, а максимальное значение модуля решения $|\psi|$ равно семи (т.е. в семь раз выше фона), что совпадает с максимальной высотой фундаментальной структуры волны-убийцы $(1+1)$ -мерного НУШ (1). Как показано на рис. 4, волна-убийца третьего порядка $|\psi|$ сильно отличается от волны-убийцы уравнения ДСИ [29]. Первая из них содержит несколько прямых линий в своем профиле, а волна-убийца уравнения ДСИ [29] имеет гиперболический или параболический профиль. Линейная волна-убийца четвертого порядка с параллельным профилем $|\psi|$ на плоскости (x, y) показана на рис. 5, ее профиль содержит четыре прямые линии максимальных точек (см. рис. 5б и рис. 5ж).

Как и в случае $(1+1)$ -мерного солитонного уравнения, волны-убийцы ψ высшего порядка уравнения (2) имеют три основные структуры на плоскости (x, t) : фундаментальную структуру, кольцевую структуру, треугольную структуру. Такие структуры волн-убийц второго, третьего и четвертого порядков, построенные с помощью теоремы 1, показаны на рис. 6–8, которые подтверждают следующие предположения относительно волн-убийц $|\psi|$ n -го порядка уравнения (2) на плоскости (x, t) :

1) фундаментальная структура содержит максимальную амплитуду решения $|\psi|$, равную $2n + 1$, при этом высота фона равна единице, а центральный пик с обеих сторон окружен $n(n + 1) - 2$ постепенно уменьшающимися пиками;

Рис. 7. Три структуры волны-убийцы третьего порядка $|\psi|$ (4) уравнения (2) на плоскости (x, t) при $y = 0$ с параметрами $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_4 = 0$: фундаментальная структура с $a_3 = -1/12, a_5 = -1/240$ (а); треугольная структура с $a_3 = 25/3, a_5 = 0$ (б); кольцевая структура с $a_3 = 0, a_5 = 200 - 50i/3$ (в).

Рис. 8. Три структуры волны-убийцы третьего порядка $|\psi|$ (4) уравнения (2) на плоскости (x, t) при $y = 0$ с параметрами $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_4 = 0, a_6 = 0$: фундаментальная структура с $a_3 = -1/12, a_5 = -1/240, a_7 = -1/4800$ (а); треугольная структура с $a_3 = 25/5 - 20i, a_5 = 0, a_7 = 10$ (б); кольцевая структура с $a_3 = -1/12, a_5 = 6i, a_7 = 2000 - 12i$ (в).

Рис. 9. Несколько волн-убийц $|A|$ уравнения ДСИ из работы [29] на плоскости (x, t) при $y = 0$, $\epsilon = -1$, $p_1 = 2$ и $N = 1$: волна-убийца первого порядка с параметрами $n_1 = 1$, $c_{11} = 0$, $c_{10} = 1$ (а); волна-убийца второго порядка с параметрами $n_1 = 2$, $c_{12} = 40i$, $c_{11} = 0$, $c_{10} = 1$ (б); волна-убийца третьего порядка с параметрами $n_1 = 3$, $c_{13} = 400 + 150i$, $c_{12} = 0$, $c_{11} = 0$, $c_{10} = 1$ (в); волна-убийца четвертого порядка с параметрами $n_1 = 4$, $c_{14} = 3600 + 2600i$, $c_{13} = 0$, $c_{12} = 0$, $c_{11} = 0$, $c_{10} = 1$ (г).

- 2) треугольная и круговая структуры $|\psi|$ содержат $n(n+1)/2$ однородных пиков;
- 3) круговая структура волны-убийцы порядка n обладает кольцевым строением, внешнее кольцо имеет $2n - 1$ однородных пиков, а внутренняя часть представляет собой волну-убийцу порядка $n - 2$.

Аналогичные результаты относительно структуры волны-убийцы на плоскости (x, t) для уравнения Кадомцева–Петвиашвили I (КПИ) представлены в работах [33], [49]. Внутренняя часть рис. 7в является волной-убийцей первого порядка, а внутренняя часть рис. 8в – волной-убийцей второго порядка, получающейся в результате распада волны-убийцы третьего (или четвертого) порядка. Таким образом, они согласуются с предположением 3. Заметим, что эти предположения вытекают из аналогичных результатов для волн-убийц НУШ [50]–[55]. Такое сходство возможно благодаря следующей связи: если ψ является решением уравнения (2), полученным согласно теореме 1, то

$$u = e^{-2it}\psi(x, y, -t) \quad (12)$$

является решением НУШ (1), что доказано в приложении Б. Однако согласно рис. 9, построенному в соответствии с уравнениями (2.3), (2.4), (2.5) работы [29], волны-убийцы уравнения ДСИ имеют другие профили на плоскости (x, t) . Например, волна-убийца порядка n ($1 \leq n \leq 4$) системы ДСИ имеет n пиков на плоскости (x, t) (см. рис. 9).

4. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

В представленной работе получена общая формула для решений типа волн-убийц N -го порядка уравнения Захарова (2) методом билинейных преобразований с помощью теоремы 1, в которой решения выражаются явно через определители. Волны-убийцы первого и второго порядков представлены в явном виде с помощью соответственно уравнений (8), (Б.1). Волны-убийцы третьего и четвертого порядков изображены на рис. 4, 5. Для изучения локальных характеристик фундаментальной волны-убийцы введены четыре величины: L_{width} , L_{depth} , S_{section} , AMP_{max} . Введен новый тип нефундаментальных волн-убийц в $(2 + 1)$ -мерных системах, а именно, линейная волна-убийца с параллельным профилем, профиль которой состоит из нескольких параллельных линий экстремальных значений. На рис. 3–5 изображены линейные волны-убийцы с параллельным профилем второго, третьего и четвертого порядков. Сформулируем основные различия между уравнением Захарова (2) и ДСИ:

- 1) волны-убийцы этих уравнений имеют различные формулы для четырех указанных выше величин;
- 2) волны-убийца уравнения ДСИ на плоскости (x, t) не удовлетворяют трем предположениям, относящимся к свойствам первого уравнения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В данном приложении дано простое доказательство теоремы 1 с помощью метода билинейных преобразований, основанного на результатах работы [48].

ЛЕММА 1. *Билинейные уравнения в иерархии КП*

$$\begin{aligned} (D_{x_1}^2 - D_{x_2})\tau(n+1)\tau(n) &= 0, \\ (D_{x_1}D_{x_{-1}} - 2)\tau(n)\tau(n) &= -2\tau(n+1)\tau(n-1) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

допускают решения

$$\tau(n) = \det_{1 \leq i, j \leq N} (m'_{2i-1, 2j-1}(n)), \quad (\text{A.2})$$

где матричные элементы $m'_{i,j}(n)$ удовлетворяют следующим дифференциальным и разностным соотношениям:

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} m'_{i,j}(n) &= \psi_i^{(n)} \phi_j^{(n)}, & \partial_{x_2} m'_{i,j}(n) &= \psi_i^{(n+1)} \phi_j^{(n)} + \psi_i^{(n)} \phi_j^{(n-1)}, \\ \partial_{x_{-1}} m'_{i,j}(n) &= -\psi_i^{(n-1)} \phi_j^{(n+1)}, & m'_{i,j}(n+1) &= m'_{i,j}(n) + \psi_i^{(n)} \phi_j^{(n+1)}, \\ \partial_{x_v} \psi_i &= \psi_i^{(n+v)}, & \partial_{x_v} \phi_j &= -\phi_j^{(n-v)}, \quad v = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Эти соотношения доказаны в лемме 1 работы [29], поэтому здесь мы опустим их доказательство. Легко заметить, что функции $\phi_j^{(n)}$, $\psi_i^{(n)}$ и $m'_{ij}(n)$ можно задать в виде

$$\begin{aligned}\psi_i^{(n)} &= A_i p^n e^\xi, \\ \phi_j^{(n)} &= B_j (-q)^{-n} e^\eta, \\ m'_{ij}(n) &= A_i B_j \left[\frac{1}{p+q} \left(-\frac{p}{q} \right)^n e^{\xi+\eta} \right],\end{aligned}\tag{A.4}$$

где A_i , B_j , ξ , η определены выражениями

$$\begin{aligned}A_i &= \sum_{k=0}^i \frac{a_k}{(i-k)!} (p \partial_p)^{i-k}, & B_j &= \sum_{l=0}^j \frac{b_l}{(j-l)!} (q \partial_q)^{j-l}, \\ \xi &= \frac{1}{p} x_{-1} + p x_1 + p^2 x_2 + \xi_0, & \eta &= \frac{1}{q} x_{-1} + q x_1 - q^2 x_2 + \eta_0.\end{aligned}\tag{A.5}$$

Перепишем для простоты функции $m'_{ij}(n)$ в виде

$$m'_{ij}(n) = e^{\xi+\eta} \sum_{k=0}^i \frac{a_k}{(i-k)!} (p \partial_p + \xi' + n)^{i-k} \sum_{l=0}^j \frac{b_l}{(j-l)!} (q \partial_q + \eta' - n)^{j-l} \frac{1}{p+q}, \tag{A.6}$$

где

$$\xi' = p x_1 + 2p^2 x_2 - \frac{1}{p} x_{-1}, \quad \eta' = q x_1 - 2q^2 x_2 - \frac{1}{q} x_{-1},$$

а p , q , a_k , b_l – произвольные комплексные постоянные. Далее, вводя ограничения на параметры

$$p = q = 1, \quad a_k = b_k^* \tag{A.7}$$

и предполагая, что переменные x_{-1} , x_1 действительны, а переменная x_2 – чисто мнимая, получаем равенства

$$\eta' = \xi'^*, \quad m_{ij}^*(n) = m_{ji}(-n), \quad \tau_n^* = \tau_{-n}. \tag{A.8}$$

Кроме того, при введенных ограничениях на параметры (A.7) функция τ_n удовлетворяет условию редукции

$$(\partial_{x_1} + \partial_{x_{-1}}) \tau_n = 4N \tau_n. \tag{A.9}$$

Полагая $\tau(0) = f$, $\tau(1) = g$, $\tau(-1) = g^*$ и используя замену независимых переменных $x_{-1} = y$, $x_1 = x$, $x_2 = it$, можно преобразовать билинейное уравнение (A.1) к билинейному уравнению (3). Наконец, используя калибровочную свободу функций f и g , получаем из решений уравнения (A.1) решения уравнений (3), представленные в теореме 1.

Теперь сосредоточимся на объяснении того факта, что полученные таким образом решения несингулярны, используя для этого уравнения (A.3), (A.4) и (A.7). Заметим, что $f = \tau_0$ выражается через определитель

$$f = \det_{1 \leq i, j \leq N} (m'_{2i-1, 2j-1}(0)). \tag{A.10}$$

Действительно, для любого ненулевого вектора-столбца $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)^T$ и его транспонированного комплексного сопряжения $\bar{\mu}$ имеем

$$\begin{aligned}
 \bar{\mu} f \mu &= \sum_{i,j=1}^N \bar{\mu}_i m'_{2i-1,2j-1}(0) \mu_j = \sum_{i,j=1}^N \bar{\mu}_i \mu_j A_{2i-1} B_{2j-1} \frac{1}{p+q} e^{\xi+\eta} \Big|_{p=1,q=1} = \\
 &= \sum_{i,j=1}^N \bar{\mu}_i \mu_j A_{2i-1} B_{2j-1} \int_{-\infty}^x e^{\xi+\eta} dx \Big|_{p=1,q=1} = \\
 &= \int_{-\infty}^x \left(\sum_{i,j=1}^N \bar{\mu}_i \mu_j A_{2i-1} B_{2j-1} e^{\xi+\eta} \Big|_{p=1,q=1} \right) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^x \left| \sum_{i=1}^N \bar{\mu}_i A_{2i-1} e^{\xi} \right|_{p=1}^2 dx > 0.
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Таким образом, доказано, что f – является положительно определенным. Поэтому рациональные решения u и v , представленные в теореме 1, несингулярны.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Волна-убийца второго порядка (10) с параметрами $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ имеет вид

$$\psi = 1 + \frac{\phi}{f}, \quad V = 2(\ln f)_{xy}. \tag{B.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{1}{144}(x^6 + y^6 + 64t^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5) + \\
 &+ \frac{1}{48}(y^5 - x^5 + 5x^4y - 10x^3y^2 + 10x^2y^3 - 5xy^4) + \\
 &+ \frac{1}{96}(80t^4 + 3x^4 + 3y^4 + 18x^2y^2 - 12x^3y - 12xy^3) + \frac{1}{3}(x-y)(x-y-1)t^4 + \\
 &+ \left[\frac{1}{12}(x^4 + y^4) + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{6}(y^3 - x^3) - \frac{1}{3}(xy^3 + x^3y) + \frac{1}{2}(x^2y - xy^2) + \right. \\
 &+ \frac{1}{4}\left(a_3 + a_3^* + \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{4}\left(a_3 + a_3^* + \frac{1}{2}\right)y - \frac{1}{8}(a_3 + a_3^* - 1)\left. \right] t^2 - \\
 &- \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{48}(a_3 + a_3^*) \right) (x^3 - y^3) + \frac{1}{32}(2(a_3 + a_3^*) + 6)(x^2y - xy^2) + \\
 &+ \frac{1}{32}(a_3 + a_3^* + 1)(x^2 + y^2) - \frac{1}{16}(a_3 + a_3^* + 1)xy - \frac{1}{64}(x - y) + \frac{1}{16}a_3a_3^* + \frac{1}{256} - \\
 &- \frac{i}{48}(a_3 - a_3^*)(8t^2 - 6(x-y)^2 + 6(x+y) + 3)t, \\
 \phi &= -\frac{5}{3}t^4 - \left(\frac{1}{2}(x-y)^2 - \frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{4}(a_3 - a_3^*) + \frac{1}{2} \right) t^2 - \\
 &- \left[\frac{1}{48}(x^4 + y^4) - \frac{1}{24}(2x^3y + 2xy^3 - 3x^2y^2) - \frac{1}{24}(x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{16}(a_3 - a_3^* - 1)(x - y)^2 + \frac{1}{32}(4a_3 - 1)(x - y) - \frac{1}{16}a_3 \Big] + \\
& + i \Bigg[\left(\frac{2}{3}(x - y) - \frac{2}{3}(x - y)^2 - \frac{1}{3} \right) t^3 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}a_3 - \left(\frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{4}a_3^* + \frac{1}{8} \right) (x - y) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{6}(x^3 - y^3 + 3xy^2 - 3x^2y) - \frac{1}{12}(x^4 + y^4 - 4x^3y - 4xy^3 + 6x^2y^2) \right) t \Bigg].
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

В этом приложении дано простое доказательство уравнения (12) на основе результатов работы [48]. Рассмотрим решения типа волн-убийц НУШ (1) подобно тому, как рассмотрены решения типа волн-убийц уравнения Захарова (2) в теореме 1.

Согласно результатам работы [48] НУШ (1) имеет несингулярные рациональные решения

$$u = e^{-2it} \frac{\tau'_1}{\tau'_0}. \quad (\text{B.1})$$

Здесь матрица τ'_n задана выражением

$$\tau'_n = \det_{1 \leq i, j \leq N} (M_{2i-1, 2j-1}^{(n)}), \quad (\text{B.2})$$

элементы определены равенством

$$M_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^i \frac{a_k}{(i-k)!} (p \partial_p + \eta' + n)^{i-k} \sum_{l=0}^j \frac{a_l^*}{(j-l)!} (p^* \partial_{p^*} + \eta'^* - n)^{j-l} \frac{1}{p + p^*} \Big|_{p=1}, \quad (\text{B.3})$$

где $\eta' = px - 2ip^2t$, k, l, i, j – произвольные положительные целые числа, а a_k, a_l – произвольные комплексные постоянные. Хорошо видно, что элементы $M_{i,j}^{(n)}$ в уравнении (B.3) и элементы $m_{i,j}^{(n)}$ в уравнении (7) имеют одно и то же представление, отличающееся только заменой ξ' на η' . Полагая $y = 0$, $t = -t$, легко находим, что $\xi' = \eta'$. Кроме того, параметр y в элементах $m_{i,j}^{(n)}$ можно рассматривать как сдвиг параметров a_i и a_j . При условии $t = -t$ получаем, что $\tau'_n = \tau_n$, откуда следует равенство $u = e^{-2it} \psi(x, y, -t)$.

Список литературы

- [1] C. Garrett, J. Gemmrich, “Rogue waves”, *Phys. Today*, **62**:6 (2009), 62–71.
- [2] E. Pelinovsky, C. Kharif, *Extreme Ocean Waves*, Springer, New York, 2008.
- [3] A. R. Osborne, *Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform*, International Geophysics Series, **97**, Academic Press, New York, 2010.
- [4] Y. V. Bludov, V. V. Konotop, N. Akhmediev, “Matter rogue waves”, *Phys. Rev. A*, **80**:3 (2009), 033610, 5 pp.
- [5] Y. V. Bludov, V. V. Konotop, N. Akhmediev, “Vector rogue waves in binary mixtures of Bose–Einstein condensates”, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **185**:1 (2010), 169–180.
- [6] A. Montina, U. Bortolozzo, S. Residori, F. T. Arecchi, “Non-Gaussian statistics and extreme waves in a nonlinear optical cavity”, *Phys. Rev. Lett.*, **103**:17 (2009), 173901, 4 pp.
- [7] D. R. Solli, C. Ropers, P. Koonath, B. Jalali, “Optical rogue waves”, *Nature*, **450** (2007), 1054–1057.

- [8] R. Höhmann, U. Kuhl, H.-J. Stöckmann, L. Kaplan, E. J. Heller, “Freak waves in the linear regime: a microwave study”, *Phys. Rev. Lett.*, **104**:9 (2010), 093901, 4 pp.
- [9] A. N. Ganshin, V. B. Efimov, G. V. Kolmakov, L. P. Mezhev-Deglin, P. V. E. McClintock, “Observation of an inverse energy cascade in developed acoustic turbulence in superfluid helium”, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:6 (2008), 065303, 4 pp.
- [10] W. M. Moslem, “Langmuir rogue waves in electron-positron plasmas”, *Phys. Plasmas*, **18**:3 (2011), 032301; Erratum, **18**:5 (2011), 059901.
- [11] H. Bailung, S. K. Sharma, Y. Nakamura, “Observation of peregrine solitons in a multicomponent plasma with negative ions”, *Phys. Rev. Lett.*, **107**:25 (2011), 255005, 4 pp.
- [12] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, M. Taki, “Waves that appear from nowhere and disappear without a trace”, *Phys. Lett. A*, **373**:6 (2009), 675–678.
- [13] D. H. Peregrine, “Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **25** (1983), 16–43.
- [14] Н. Н. Ахмедиев, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, “Генерация периодической последовательности пикосекундных импульсов в оптическом волокне. Точные решения”, *ЖЭТФ*, **89**:5 (1985), 1542–1551.
- [15] A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, N. Akhmediev, “Rogue waves and rational solutions of the Hirota equation”, *Phys. Rev. E*, **81** (2010), 046602, 8 pp.
- [16] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, “Rogue waves and rational solutions of the nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. Rev. E*, **80**:2 (2009), 026601, 9 pp.
- [17] V. V. Voronovich, V. I. Shrira, G. Thomas, “Can bottom friction suppress ‘freak wave’ formation?”, *J. Fluid Mech.*, **604** (2008), 263–296.
- [18] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, J. M. Dudley, “The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics”, *Nat. Phys.*, **6** (2010), 790–795.
- [19] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, N. Akhmediev, “Rogue wave observation in a water wave tank”, *Phys. Rev. Lett.*, **106**:20 (2011), 204502, 4 pp.
- [20] S. W. Xu, J. S. He, L. H. Wang, “The Darboux transformation of the derivative nonlinear Schrödinger equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:30 (2011), 305203, 22 pp.
- [21] Y. S. Tao, J. S. He, “Multisolitons, breathers, and rogue waves for the Hirota equation generated by the Darboux transformation”, *Phys. Rev. E*, **85**:2 (2012), 026601, 7 pp.
- [22] S. W. Xu and J. S. He, “The rogue wave and breather solution of the Gerdjikov–Ivanov equation”, *J. Math. Phys.*, **53**:6 (2012), 063507, 17 pp.
- [23] J. S. He, H. R. Zhang, L. H. Wang, K. Porsezian, A. S. Fokas, “Generating mechanism for higher-order rogue waves”, *Phys. Rev. E*, **87**:5 (2013), 052914, 10 pp.
- [24] J. S. He, L. H. Wang, L. J. Li, K. Porsezian, R. Erdélyi, “Few-cycle optical rogue waves: complex modified Korteweg–de Vries equation”, *Phys. Rev. E*, **89**:6 (2014), 062917, 19 pp.
- [25] Y. S. Zhang, L. J. Guo, J. S. He, Z. X. Zhou, *Lett. Math. Phys.*, **105**:6 (2015), 853–891.
- [26] D. Q. Qiu, J. S. He, Y. S. Zhang, K. Porsezian, “The Darboux transformation of the Kundu–Eckhaus equation”, *Proc. R. Soc. A*, **471** (2015), 20150236, 20 pp.
- [27] M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montinad, F. T. Arecchi, *Phys. Rep.*, **528**:2 (2013), 47–89.
- [28] N. Akhmediev, J. M. Dudley, D. R. Solli, S. K. Turitsyn, “Recent progress in investigating optical rogue waves”, *J. Opt.*, **15**:6 (2013), 060201, 10 pp.
- [29] Y. Ohta, J. K. Yang, “Rogue waves in the Davey–Stewartson I equation”, *Phys. Rev. E*, **86**:3 (2012), 036604, 8 pp.
- [30] Y. Ohta, J. K. Yang, “Dynamics of rogue waves in the Davey–Stewartson II equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:10 (2013), 105202, 19 pp.
- [31] J. C. Chen, Y. Chen, B. F. Feng, *Phys. Lett. A*, **379**:24–25 (2015), 1510–1519.
- [32] C. Kharif, E. Pelinovsky, “Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon”, *Eur. J. Mech. B Fluids*, **22**:6 (2003), 603–634.
- [33] P. Dubard, V. B. Matveev, “Multi-rogue waves solutions: from the NLS to the KP-I equation”, *Nonlinearity*, **26**:12 (2013), R93–R125.

- [34] В. Б. Матвеев, А. О. Смирнов, “Решения типа ‘волн-убийц’ уравнений иерархии Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сигура: единый подход”, *ТМФ*, **186**:2 (2016), 191–220.
- [35] Zhaqilao, “Rogue waves and rational solutions of a $(3 + 1)$ -dimensional nonlinear evolution equation”, *Phys. Lett. A*, **377**:42 (2013), 3021–3026.
- [36] V. E. Zakharov, *Solitons*, Topics in Current Physics, **17**, eds. R. K. Bullough, P. J. Caudrey, Springer, Berlin, 1980.
- [37] I. A. B. Strachan, “A new family of integrable models in $(2 + 1)$ dimensions associated with Hermitian symmetric spaces”, *J. Math. Phys.*, **33**:7 (1992), 2477–2482.
- [38] I. A. B. Strachan, “Some integrable hierarchies in $(2 + 1)$ dimensions and their twistor description”, *J. Math. Phys.*, **34**:1 (1993), 243–259.
- [39] I. A. B. Strachan, “Wave solutions of a $(2 + 1)$ -dimensional generalization of the nonlinear Schrödinger equation”, *Inverse Problems*, **8**:5 (1992), L21–L27.
- [40] P. G. Estevez, G. A. Hernáez, “Lax pair, Darboux transformations and solitonic solutions for a $(2 + 1)$ dimensional NLSE”, arXiv: solv-int/9910005v1.
- [41] R. Radha, M. Lakshmanan, “Singularity structure analysis and bilinear form of a $(2 + 1)$ dimensional nonlinear Schrödinger (NLS) equation”, *Inverse Problems*, **10**:4 (1994), L29–L33.
- [42] Y. S. Li, Y. J. Zhang, “Symmetries of a $(2 + 1)$ -dimensional breaking soliton equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**:24 (1993), 7487–7494.
- [43] R. Myrzakulov, S. Vijayalakshmi, G. N. Nugmanovaa, M. Lakshmanan, “A $(2 + 1)$ -dimensional integrable spin model: geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures”, *Phys. Lett. A*, **233**:4–6 (1997), 391–396.
- [44] R. Radha, M. Lakshmanan, *Chaos Solitons Fractals*, **8**:1 (1997), 17–25.
- [45] R. Radha, M. Lakshmanan, “A new class of induced coherent structures in the $(2 + 1)$ -dimensional nonlinear Schrödinger equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:9 (1997), 3229–3233.
- [46] H. Q. Zhang, B. Tian, L. L. Li, Y. S. Xue, “Darboux transformation and soliton solutions for the $(2 + 1)$ -dimensional nonlinear Schrödinger hierarchy with symbolic computation”, *Phys. A*, **288** (2009), 9–20.
- [47] R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, **155**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [48] Y. Ohta, J. K. Yang, “General high-order rogue waves and their dynamics in the nonlinear Schrödinger equation”, *Proc. R. Soc. A*, **468**:2142 (2012), 1716–1740.
- [49] P. Dubard, V. B. Matveev, “Multi-rogue waves solutions to the focusing NLS equation and the KP-I equation”, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, **11** (2011), 667–672.
- [50] A. Ankiewicz, P. Clarkson, N. Akhmediev, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:12 (2010), 122002, 9 pp.
- [51] P. Dubard, P. Gaillard, C. Klein, V. B. Matveev, “On multi-rogue wave solutions of the NLS equation and positon solutions of the KdV equation”, *Eur. Phys. J. Special Topics*, **185**:1 (2010), 247–258.
- [52] P. Dubard, *Multi-rogue solutions to the focusing NLS equation*, PhD thesis, Université de Bourgogne, Dijon, France, 2010.
- [53] P. Gaillard, “Families of quasi-rational solutions of the NLS equation and multi-rogue waves”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:43 (2011), 435204, 15 pp.
- [54] P. Gaillard, “Degenerate determinant representation of solutions of the nonlinear Schrödinger equation, higher order Peregrine breathers and multi-rogue waves”, *J. Math. Phys.*, **54**:1 (2013), 013504, 32 pp.
- [55] D. J. Kedziora, A. Ankiewicz, N. Akhmediev, “Circular rogue wave clusters”, *Phys. Rev. E*, **84**:5 (2011), 056611, 7 pp.