Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Белавин, Д. Гепнер, Я. А. Кононов, Плоские координаты фробениусовых многообразий Сайто и теории струн, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 3, 429–445

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9219>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:25:14

© 2016 г. А. А. Белавин^{*†‡}, Д. Гепнер[§], Я. А. Кононов^{*¶}

ПЛОСКИЕ КООРДИНАТЫ ФРОБЕНИУСОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ САЙТО И ТЕОРИИ СТРУН

Исследована связь между моделями топологической конформной теории и не-критической теории струн с фробениусовыми многообразиями Сайто. Для этого предложен новый прямой способ вычисления плоских координат с помощью интегрального представления решений системы Гаусса–Манина, связанной с данным фробениусовым многообразием Сайто. Проведены явные вычисления в случае особенности типа A_n . Также обсуждается возможное обобщение предложенного подхода на $SU(N)_k/(SU(N)_{k+1} \times U(1))$ -теории Казама–Сузуки. Доказана теорема о том, что потенциал, связанный с этими моделями, является изолированной особенностью, что дает условие возникновения структуры фробениусова многообразия на его пространстве версальной деформации. Этот факт позволяет использовать подход Дийкграфа–Верлинде–Верлинде к решению подобных моделей Казама–Сузуки.

Ключевые слова: фробениусовы многообразия, плоские координаты, теория струн.

DOI: 10.4213/tmf9219

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что суперсимметрия пространства-времени в теории струн после [1], [2] и до [3] их компактификации достигается благодаря наличию $N = 2$ суперконформной симметрии на мировом листе. Более того, киральные состояния и вакуум Рамонда играют решающую роль в построении операторов безмассовых состояний. В ра-

Исследование А. А. Белавина было выполнено в ИПФИ РАН при поддержке РФФИ (проект № 14-50-00150).

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: belavin@itp.ac.ru

[†]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

[‡]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

[§]Department of Particle Physics and Astrophysics, Faculty of Physics, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel

[¶]Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

боте [4] было показано, что ограничение на киральные состояния приводит к топологической конформной теории поля (ТКТП), и это демонстрирует важность ТКТП в теории струн. Классификация $N = 2$ суперсимметричных конформных теорий поля (СКТП) и, следовательно, ТКТП, была проведена, в некотором общем смысле, в терминах теории представлений аффинных алгебр Ли [5]. Связь между $N = 2$ СКТП и теорией особенностей [6], [7] изучалась в статьях [8]–[10]. В работе [11] было получено соотношение между киральными кольцами $SU(N)_k / (SU(N-1)_{k+1} \times U(1))$ -моделей Казама–Сузуки с особенностями и показано, что суперпотенциал является степенной суммой, выраженной через элементарные симметрические многочлены.

Явное решение упомянутых теорий представляет большой интерес. Важный ряд минимальной ТКТП (или $SU(2)_k/U(1)$ -теории) был найден в основополагающей статье Дийкграфа, Верлинде и Верлинде [12]. Эти модели соответствуют так называемым моделям компактификации струн Гепнера, и их точное решение было найдено благодаря их связи с первым нетривиальным примером фробениусова многообразия (ФМ) (само понятие ФМ аксиоматически было введено в работе Дубровина [13]).

В дополнение к теории струн в пространстве-времени критической размерности $d = 26$ для бозонной теории струн и в пространстве-времени размерности $d = 10$ для фермионной теории струн существует еще один класс моделей – так называемые некритические струны, предложенные Поляковым [14]. Один из классов таких теорий – это минимальная теория струн, или, другими словами, минимальная лиувилевская гравитация (МЛГ) [15]. Недавно были точно решены несколько моделей МЛГ [16]–[23]. При получении точного решения была использована связь со струнным уравнением Дугласа [24] и с ФМ [17]. Оказалось, что производящей функцией корреляторов МЛГ является логарифм τ -функции Сато, которая определяется специальным решением струнного уравнения Дугласа. Важно, что эту τ -функцию можно явно выразить через структурные константы ФМ и “струнное действие Дугласа” [25]. Подходящее решение струнного уравнения Дугласа, удовлетворяющее правилам отбора, имеет простое выражение в плоских координатах [18], [19]. Модели МЛГ также были частично решены в рамках непрерывного подхода в работе [26] с помощью высших уравнений движения [27].

Приведенные выше рассуждения показывают, что задача поиска явных выражений для плоских координат соответствующих ФМ имеет важное значение для точного решения вышеупомянутых моделей. Теория ФМ, соответствующих деформированным особенностям, была исследована в работах [28]–[31].

В настоящей статье мы описываем, как соотносятся друг с другом, с одной стороны, точные решения моделей ТКТП и двумерной гравитации, связанной с некоторыми изолированными особенностями, и, с другой стороны, проблема вычисления плоских координат на ФМ, ассоциированных с теми же особенностями.

В разделе 2 мы рассматриваем аксиомы Дубровина и важные свойства ФМ [13]. Затем мы описываем специальный класс ФМ, связанный с версальными деформациями изолированных особенностей. Мы называем такие ФМ *фробениусовыми многообразиями Сайто* (ФМС). А именно, ФМС возникают в точно решаемых случаях ТКТП и двумерной гравитации. Мы также рассматриваем связь между ФМ и точно решаемыми моделями ТКТП [12] и двумерной гравитации [16]–[19], [22], [32]. Подчеркнем, что для получения корреляторов в обеих теориях мы должны знать выражения для плоских координат как функций от параметров деформации соответствующей изолированной особенности.

В разделе 3 мы обсуждаем, как соотносятся кольцо Якоби деформированной изолированной особенности и система Гаусса–Манина [28], [29], связанная с данным кольцом Якоби.

В разделе 4 мы показываем, как использовать решения системы Гаусса–Манина для вычисления плоских координат. Мы иллюстрируем наш подход, непосредственно вычисляя плоские координаты в случае простой особенности A_n . Наше вычисление упрощает вычисление из работы [29]. Предложенный нами подход естественным образом можно обобщить и на другие случаи ФМС.

В разделе 5 мы обсуждаем возможное обобщение нашего подхода на случай деформированных киральных $SU(N)_k/(SU(N-1)_{k+1} \times U(1))$ -колец [33] и доказываем теорему об изолированности соответствующей особенности.

В приложении мы показываем, как, используя систему Гаусса–Манина и ее уравнения совместности, доказать, что метрика

$$g_{\alpha\beta} = \text{Res} \frac{e_\alpha e_\beta \zeta}{\prod \partial_i F}$$

является плоской в случае простой особенности. Здесь e_α – элемент кольца Якоби, F – деформированная особенность, а ζ – так называемая примитивная форма [28].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Фробениусовы многообразия [13]. ФМ M – это риманово многообразие с координатами $t^0, t^2, \dots, t^{\dim M-1}$, плоской метрикой $g_{\alpha\beta}$ и тензором $C_{\alpha\beta}^\gamma$, компоненты которого являются структурными константами ассоциативной фробениусовой алгебры, ассоциированными с касательным пространством M ,

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \rightarrow e_\alpha, \quad e_\alpha e_\beta = C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma. \quad (1)$$

Риманова и фробениусова структуры должны быть согласованы следующим образом: метрика $g_{\alpha\beta} = (e_\alpha, e_\beta)$ инвариантна, $(e_\alpha e_\beta, e_\gamma) = (e_\alpha, e_\beta e_\gamma)$, и

$$\nabla_\alpha C_{\beta\gamma}^\mu = \nabla_\beta C_{\alpha\gamma}^\mu, \quad (2)$$

где ∇_α – связность Леви-Чивиты для плоской метрики $g_{\alpha\beta}(t)$. Тогда из условия ассоциативности и равенства (2) следует существование однопараметрического семейства плоских связностей

$$\nabla_\alpha \rightarrow \tilde{\nabla}_\alpha = \nabla_\alpha + z C_{\alpha*}^*, \quad [\tilde{\nabla}_\alpha, \tilde{\nabla}_\beta] = 0. \quad (3)$$

Из условия $[\tilde{\nabla}_\alpha, \tilde{\nabla}_\beta] = 0$ также следует существование плоских координат $\theta^\mu(t^\alpha, z)$ для деформированной связности $\tilde{\nabla}_\alpha$, которые могут быть разложены в ряд по z :

$$\theta^\mu(t^\alpha, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k^\mu(t^\alpha) z^k. \quad (4)$$

Требование того, что $\theta^\mu(t^\alpha, z)$ являются деформированными плоскими координатами, можно переписать как

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta \theta_{k+1}^\mu = C_{\alpha\beta}^\gamma \nabla_\gamma \theta_k^\mu. \quad (5)$$

Как показано в работе [17], коэффициенты θ_k^μ разложения плоских координат могут быть использованы для построения “струнного действия” [25]. Мы применяем это утверждение в п. 2.4.

2.2. Фробениусовы многообразия Сайто. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – квазиоднородный суперпотенциал изолированной особенности, e_α , $\alpha = 0, \dots, \dim M$, – базисные элементы его кольца Якоби и $F(x_i; t^\alpha)$ – версальная деформация,

$$F = f + \sum_{\alpha=0}^{\dim M-1} t^\alpha e_\alpha. \quad (6)$$

Мы используем латинские индексы (например, i) для координат потенциалов особенности f и греческие индексы (например, α) для параметров ее деформации.

Как было предложено Сайто [28], в данном случае существует форма старшей степени ζ , так называемая примитивная форма, такая, что метрика, задающаяся через ζ как

$$g_{\alpha\beta} = \text{Res} \frac{e_\alpha e_\beta \zeta}{\prod \partial_i F}, \quad (7)$$

является плоской и вместе со структурными константами

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \text{Res} \frac{e_\alpha e_\beta e_\gamma \zeta}{\prod \partial_i F} \quad (8)$$

обеспечивает структуру ФМ. В частности, примитивные формы для простых особенностей задаются с точностью до постоянного множителя с помощью стандартной формы объема dx . Локальное существование примитивной формы в общем случае было доказано в работе [34]. Явная конструкция квазиоднородной примитивной формы ζ была описана в статьях [30], [31].

2.3. ТКТП и плоские координаты на ФМС. Конформные теории поля были введены в работе [35]. В статье [4] было показано, что ТКТП может быть получена из $N = 2$ СКТП путем изменения тензора энергии-импульса, называемого твистом Виттена,

$$T_{\text{top}}(z) = T^{N=2}(z) + \frac{1}{2} \partial J^{N=2},$$

и ограничения пространства локальных полей $N = 2$ СКТП модели на ее подпространство, состоящее из киральных полей и их суперпартнеров.

Симметрия ТКТП генерируется операторами L_n , Q_n , G_n и J_n , коммутационные соотношения для которых выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n}, & [J_m, J_n] &= dm \delta_{m+n,0}, \\ [L_m, G_n] &= (m-n)G_{m+n}, & [J_m, G_n] &= -G_{m+n}, \\ [L_m, Q_n] &= -nQ_{m+n}, & [J_m, Q_n] &= Q_{m+n}, \\ \{G_m, Q_n\} &= L_{m+n} + nJ_{m+n} + \frac{1}{2} dm(m+1)\delta_{m+n,0}, \\ [L_m, J_n] &= -nJ_{m+n} - \frac{1}{2} dm(m+1)\delta_{m+n,0}, \\ \{Q_m, Q_n\} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь мы используем фигурные скобки, когда оба генератора нечетные, и квадратные скобки в противном случае. Соотношения (9) включают в себя равенства

$$L_n = \{Q, G_n\}, \quad Q^2 = 0, \quad Q = Q_0,$$

что в точности является определением ТКТП [12], [4], [36].

В минимальных $N = 2$ моделях, связанных с косетом $SU(2)_k/U(1)$, после твиста поля Φ_α удовлетворяют условиям

$$Q\Phi_\alpha = 0, \quad G_0\Phi_\alpha = 0, \quad J_0\Phi_\alpha = q_\alpha\Phi_\alpha.$$

В дополнение к Φ_α корреляторы в ТКТП также включают их суперпартнеров $\tilde{\Phi}_\alpha$,

$$\tilde{\Phi}_\alpha = G_{-1}\bar{G}_{-1}\Phi_\alpha.$$

Из коммутационных тождеств (9) следует, что

$$Q\tilde{\Phi}_\alpha = \partial\bar{G}_{-1}\Phi_\alpha \Rightarrow Q \int \tilde{\Phi}_\alpha = 0.$$

Вся информация о корреляторах теории содержится в возмущенных корреляторах [12]

$$F(s)_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} = \left\langle \Phi_{\alpha_1}(z_1) \dots \Phi_{\alpha_r}(z_r) \exp \left\{ \sum s^\beta \int \tilde{\Phi}_\beta \right\} \right\rangle,$$

которые не зависят от координат $z_1, \dots, z_r$, поскольку $\partial\Phi_\alpha = QG_{-1}\Phi_\alpha$ и, следовательно, $\partial_i \langle \Phi_{\alpha_1} \dots \Phi_{\alpha_m} \rangle = 0$.

В работе [12] было показано, что все корреляторы $F(s)_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}$ известны, если мы знаем два из них:

$$C_{\alpha\beta\gamma}(s) = \left\langle \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma \exp \left\{ \sum s^\delta \int \tilde{\Phi}_\delta \right\} \right\rangle, \\ \eta_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta 0}(s) = \left\langle \Phi_\alpha \Phi_\beta \exp \left\{ \sum s^\delta \int \tilde{\Phi}_\delta \right\} \right\rangle.$$

Как доказано в работе [12], $\eta_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta\gamma}(s)$ удовлетворяют ограничениям, которые состоят в том, что $\eta_{\alpha\beta}$ не зависят от s^ρ , $C_{\alpha\beta\gamma}(s)$ – симметричный тензор и

$$\partial_\delta C_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha C_{\delta\beta\gamma}, \quad C_{\alpha\beta}^\rho C_{\rho\gamma}^\delta = C_{\alpha\rho}^\delta C_{\beta\gamma}^\rho.$$

Эти соотношения показывают, что мы получаем структуру ФМ [13].

Величины $C_{\alpha\beta}^\rho(s)$ представляют собой структурные константы кольца R , которое является деформацией кирального кольца минимальной модели. Константы связи s^α в определении возмущенных корреляторов являются плоскими координатами на ФМ, а $\eta_{\alpha\beta}$ – метрика в плоских координатах.

Дийкграф, Верлинде и Верлинде также доказали [12], что возмущенное кольцо R в случае минимальных $SU(2)_k/U(1)$ -моделей совпадает с кольцом $\mathbb{C}[x]/\partial_x W$ версальной деформации особенности $W_0 = x^{k+2}$, где возмущенная особенность имеет вид

$$W = x^{k+2} + \sum_{\alpha=0}^k t_\alpha x^\alpha.$$

Таким образом, константы связи $s^\alpha = s^\alpha(t_1, \dots, t_k)$ суть функции параметров возмущения $t_1, t_2, \dots$. Они являются *плоскими координатами* ФМ кольца $\mathbb{C}[x]/\partial_x W$ для возмущенной особенности. Отсюда следует, что

$$C_{\alpha\beta\gamma}(s) = \frac{\partial t_\rho}{\partial s^\alpha} \frac{\partial t_\mu}{\partial s^\beta} \frac{\partial t_\nu}{\partial s^\gamma} \operatorname{Res}_{x=\infty} \frac{x^{\rho+\mu+\nu} dx}{\partial_x(x^{k+2} + \sum t_\delta x^\delta)}. \quad (10)$$

Если это выражение равно dx , назовем его примитивной формой. На самом деле формула (10) дает точное решение для минимальных $SU(2)_k/U(1)$ -моделей ТКТП.

Таким образом, чтобы получить явные выражения для корреляторов минимальных моделей, нам нужно знать только плоские координаты s^α как функции параметров деформации $t_1, t_2, \dots$.

2.4. МЛГ и плоские координаты на ФМС. Связь между МЛГ и структурой ФМ была найдена в работах [16], [17] и использовалась в [17] для построения явных выражений для корреляционных чисел наблюдаемых O_{mn} в (pq) -МЛГ. Вместо корреляторов наблюдаемых O_{mn} удобно изучать их производящую функцию

$$Z^{\text{MG}}(\lambda) = \left\langle \exp \left(\sum_{m,n} \lambda_{m,n} O_{m,n} \right) \right\rangle.$$

Результат построения $Z^{\text{MG}}(\lambda)$ в [17] кратко описывается следующим образом.

Пусть M – ФМ, связанное с версальной деформацией

$$W(x; t_a) = x^{q+1} + \sum_{\alpha=0}^{q-1} t_a x^\alpha \quad (11)$$

особенности x^{q+1} , а $g_{\alpha\beta}(t)$ – метрика на M и $C_{\alpha\beta}^\gamma$ – структурные константы возмущенного кольца, определенные как

$$g_{\alpha\beta} = \operatorname{Res} \frac{x^{\alpha+\beta} dx}{\partial_x W(x; t)}, \quad C_{\alpha\beta}^\gamma = g^{\gamma\delta} \operatorname{Res} \frac{x^{\alpha+\beta+\delta} dx}{\partial_x W(x; t)}.$$

Запишем струнное уравнение Дугласа [24] (в формулировке из работы [25])

$$\frac{\partial S(t, \tau_{mn})}{\partial t^\alpha} = 0 \quad (12)$$

в форме ограничений для критических точек так называемого *струнного* (p, q) -действия

$$S(t_\alpha, \tau_{mn}) = \operatorname{Res} \left(W(x, t)^{p/q+1} + \sum_{m,n} \tau_{m,n} W(x, t)^{|pm-qn|/q} \right) dx,$$

где вычеты взяты в точке $x = \infty$.

Пусть $t_\alpha^*(\tau_{mn})$ задает решение струнного уравнения (12). Струнное уравнение имеет несколько решений, их количество зависит от (p, q) . Для каждого решения $t^*(\tau_{mn})$ струнного уравнения мы можем определить функцию $Z(\tau_{mn})$ как [17]

$$Z(\tau_{mn}) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*(\tau_{mn})} C_\alpha^{\beta\gamma} \frac{\partial S}{\partial s^\beta} \frac{\partial S}{\partial s^\gamma} dv^\gamma. \quad (13)$$

Функция $Z(\tau_{mn})$ есть $\ln \tau$ -функция некоторой интегрируемой иерархии [13], [37].

Не каждое решение струнного уравнения подходит для МЛГ, но существуют подходящее решение струнного уравнения и так называемое резонансное преобразование базисных переменных “КдФ” τ_{mn} к базисным переменным Лиувилля $\lambda_{m,n}$ такие, что $Z(\tau(\lambda))$ совпадает с производящей функцией $Z^{\text{MG}}(\lambda)$ для (p, q) -МЛГ [16]–[19].

В работе [18] (см. также [19]) было обнаружено, что подходящее решение струнного уравнения имеет очень простую форму в плоских координатах ФМ, что полезно для эффективного анализа проблемы.

3. ОСОБЕННОСТЬ, СИСТЕМА ГАУССА–МАНИНА И СТРУКТУРА ФМС

Мы рассматриваем случай простой особенности, определенной квазиоднородной голоморфной функцией $f(x) \in \mathbb{C}[x_i]$. Квазиоднородность функции f означает, что существуют веса ν_i такие, что $f(\lambda^{\nu_i} x_i) = \lambda f(x_i)$. Кольцо Якоби определяется как $R_0 = \mathbb{C}[x]/(\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$.

Мы выбираем квазиоднородный базис e_μ с весами $[e_\mu]$ такой, что $e_0 = 1$ для R_0 , и рассматриваем деформацию

$$F(x_i, t_\alpha) = f - t_0 e_0 - t_\alpha e_\alpha, \quad R = \mathbb{C}[x]/(\partial_1 F, \dots, \partial_n F).$$

Взяв веса ϵ_μ параметров t_μ равными $1 - [e_\mu]$, мы убеждаемся, что функция F тоже квазиоднородна,

$$F(\lambda^{\nu_i} x_i, \lambda^{\epsilon_\mu} t_\mu) = \lambda F(x_i, t_\mu).$$

Определим тензоры C , A и B равенствами

$$e_\alpha e_\beta = C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma + A_{\alpha\beta}^i \partial_i F, \quad \sum_i \partial_i A_{\alpha\beta}^i = -B_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma. \quad (14)$$

Поскольку особенность простая (все веса $e_\mu < 1$), нам не нужно добавлять член, пропорциональный производным из второго уравнения.

Положим

$$\Psi_0^\mu = \int_{C_\mu} \frac{dx}{F}, \quad (15)$$

где контуры интегрирования определяются как собственные функции с той же мономомией, что и t^μ , и функции $\Psi_\alpha^\mu = \partial_{t_0}^{-1} \partial_{t_\alpha} \Psi_0^\mu$ удовлетворяют так называемой системе уравнений Гаусса–Манина

$$\partial_{t_\alpha} \Psi_\beta^\mu = C_{\alpha\beta}^\gamma \partial_{t_0} \Psi_\gamma^\mu + B_{\alpha\beta}^\gamma \Psi_\gamma^\mu. \quad (16)$$

Отметим, что, как следует из определения, тензоры C , A и B не зависят от t_0 .

Удобно переписать систему Гаусса–Манина как матричное уравнение для столбца Ψ^μ с компонентами Ψ_γ^μ :

$$\mathcal{D}_\alpha \Psi^\mu = (\partial_\alpha - C_\alpha \partial_0 - B_\alpha) \Psi^\mu = 0, \quad (17)$$

где C_α и B_α – матрицы с элементами $C_{\alpha\beta}^\gamma$ и $B_{\alpha\beta}^\gamma$.

Если существует достаточно много линейно независимых решений системы уравнений (17), то можно записать условие совместности уравнений системы Гаусса–Манина:

$$[\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta] = 0. \quad (18)$$

Поскольку матрицы C_α и B_α не зависят от t_0 , мы получаем уравнения

$$[C_\alpha, C_\beta] = 0, \quad (19)$$

$$\partial_\alpha C_\beta - \partial_\beta C_\alpha - [C_\alpha, B_\beta] + [C_\beta, B_\alpha] = 0, \quad (20)$$

$$\partial_\alpha B_\beta - \partial_\beta B_\alpha - [B_\alpha, B_\beta] = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) вместе с соотношением $B_{\alpha\beta}^\gamma = B_{\beta\alpha}^\gamma$ показывает, что $B_{\alpha\beta}^\gamma$ можно рассматривать как коэффициенты Кристоффеля для связности Леви-Чивиты некоторой плоской метрики. Принимая во внимание этот факт, мы приходим к выводу, что уравнения (19)–(21) представляют собой просто аксиомы Дубровина для структуры ФМ.

Многие проверки поддерживают гипотезу о том, что $B_{\alpha\beta}^\gamma$ аналогичен коэффициенту Кристоффеля связности Леви-Чивиты метрики

$$g_{\alpha\beta} = \text{Res} \frac{e_\alpha e_\beta}{\partial_x F(x; t)}. \quad (22)$$

Мы доказываем эту гипотезу для одномерного случая в приложении.

4. СИСТЕМА ГАУССА–МАНИНА И ПЛОСКИЕ КООРДИНАТЫ

4.1. Действие группы монодромии на решения системы Гаусса–Манина.

Интегральное представление решений системы Гаусса–Манина может быть использовано для получения явных выражений для плоских координат s^μ как функций от параметров деформации t_α .

В этом пункте мы показываем, как работает наш подход в случае простой особенности A_n . Плоские координаты для этого случая были вычислены в работе [29], но предложенный нами подход упрощает рассуждения и может быть использован в более общих случаях ФМС. Для наших вычислений удобно выбрать специальную фундаментальную систему решений системы Гаусса–Манина. А именно, мы используем решения, которые являются собственными функциями группы монодромии преобразований, действие которых определяется как $x_i \rightarrow e^{i2\pi\nu_i} x_i$, $t_0 \rightarrow t_0$ и $t_\mu \rightarrow e^{i2\pi\epsilon_\mu} t_\mu$. Система Гаусса–Манина инвариантна относительно таких преобразований.

Таким образом, мы можем выбрать нашу фундаментальную систему решений Ψ^μ так, что

$$\Psi_0^\mu(t_0, e^{2\pi i\epsilon_\beta} t_\beta) = e^{2\pi i\epsilon_\mu} \Psi_0^\mu(t_0, t_\beta), \quad (23)$$

$$\partial_0 \Psi_\alpha^\mu(t_0, t_\sigma) = \partial_\alpha \Psi_0^\mu(t_0, t_\sigma). \quad (24)$$

Из первого из этих уравнений следует, что

$$\Psi_0^\mu(t_0, t_\beta) = t_0^{\epsilon_\mu} G\left(\frac{t_\beta}{t_0^{\epsilon_\beta}}\right).$$

При малых $t_\beta/t_0^{\epsilon_\beta}$ мы имеем разложение

$$\Psi_0^\mu(t_0, t_\sigma) = \sum_{N \geq 0} \frac{U^\mu(t_\beta, N)}{t_0^{\epsilon+N}}, \quad (25)$$

где

$$U^\mu(t_\beta, N) = \sum_{m_\alpha: \sum \epsilon_\alpha m_\alpha = \epsilon_\mu + N} C^\mu(m_\beta) \left(\prod \frac{t_\alpha^{m_\alpha}}{m_\alpha!} \right) \quad (26)$$

и $\epsilon = 1 - \sum \nu_i$.

Аналогичным образом мы получаем разложение для $\Psi_\alpha^\mu(t_0, t_\sigma)$,

$$\Psi_\alpha^\mu(t_0, t_\sigma) = \sum_{N=0} \frac{U_\alpha^\mu(t_\beta, N)}{t_0^{\epsilon+N}}, \quad (27)$$

а из уравнения (24) следует, что

$$U_\alpha^\mu(t_\sigma, N)|_{N=0} := U_\alpha^\mu(t_\sigma) = \partial_\alpha U_0^\mu(t_\sigma, N)|_{N=0}. \quad (28)$$

4.2. Решения системы Гаусса–Манина и плоские координаты. Структурные константы $C_{\alpha\beta}^\gamma$ и $B_{\alpha\beta}^\gamma$ не зависят от t_0 . Из этого факта и соотношений (16) и (27) следует, что

$$(\partial_\alpha - B_\alpha)U_\beta^\mu(t_\sigma) = 0. \quad (29)$$

Это означает, что

$$U_\alpha^\mu(t_\sigma) = \frac{\partial s^\mu}{\partial t^\alpha}, \quad (30)$$

где функции $s^\alpha(t_\beta)$ являются плоскими координатами.

Сравнивая равенства (30) и (28), мы приходим к выводу, что плоские координаты совпадают с главными членами разложения (25) для $\Psi_0^\mu(t_0, t_\sigma)$, т. е. $s^\mu(t_\sigma) = U_0^\mu(t_\sigma)$. После замены координат $t^\alpha \rightarrow s^\alpha$ прямое вычисление показывает, что

$$B_{\alpha\beta}^\gamma \rightarrow \tilde{B}_{\alpha\beta}^\gamma = 0, \quad C_{\alpha\beta}^\gamma \rightarrow \tilde{C}_{\alpha\beta}^\gamma.$$

В новых координатах мы имеем $\partial_\alpha \tilde{C}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\beta \tilde{C}_{\alpha\gamma\delta}$. Принимая во внимание, что $\tilde{C}_{\beta\gamma\delta}$ не зависят от s^0 , мы получаем

$$\partial_\alpha \tilde{C}_{0\beta\gamma} = \partial_0 \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (31)$$

Из условия $\tilde{C}_{0\alpha\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta}$ мы находим, что метрика $g_{\alpha\beta}$, заданная в (22), в новых координатах является постоянной.

Таким образом, мы подтверждаем нашу гипотезу, что $B_{\alpha\beta}^\gamma$ – символы Кристоффеля для связности Леви-Чивиты метрики $g_{\alpha\beta}$.

4.3. Явное вычисление плоских координат: пример особенности A_n . В данном пункте мы показываем, как можно использовать интегральное представление (15) для $\Psi_0^\mu(t_0, t_\sigma)$, чтобы получить явное выражение для плоских координат. Рассмотрим пример версальной деформации одномерной особенности A_p :

$$F = x^{p+1} - t_0 + \sum_{1 \leq \alpha \leq p-1} t_\alpha x^\alpha. \quad (32)$$

Выберем начальные контуры C_n в определении $\Psi_0^{(n)}$, как показано на рис. 1:

$$\Psi_0^{(n)} = \int_{C_n} \frac{dx}{F}. \quad (33)$$

Рис. 1. Начальные контуры.

В этом случае интеграл берется вокруг полюса $x^{(n)} = t_0^{1/(p+1)} e^{2\pi i n/(p+1)}$ при условии, что t_α мало при $\alpha > 0$.

По определению функция $\Psi_0^{(n)}(t_0, t_\beta)$ удовлетворяет равенству

$$\Psi_0^{(n)}(t_0, \omega^{p+1-\beta} t_\beta) = \bar{\omega} \Psi_0^{(n+1)}(t_0, t_\beta),$$

где $\omega = e^{2\pi i/(p+1)}$. Для нашей цели вместо функций $\Psi_0^{(n)}(t_0, t_\beta)$ удобно выбрать их линейные комбинации

$$\Psi_0^\mu(t_0, t_\beta) = \sum_n \bar{\omega}^{\mu n} \Psi_0^{(n)}(t_0, t_\beta), \quad (34)$$

которые являются собственными функциями монодромного преобразования

$$\Psi_0^\mu(t_0, \omega^{p+1-\beta} t_\beta) = \omega^\mu \Psi_0^\mu(t_0, t_\beta). \quad (35)$$

Как было объяснено выше, при малых $t_\beta/t_0^{\epsilon_\beta}$, где $\epsilon_\beta = (p+1-\beta)/(p+1)$, мы имеем разложение

$$\Psi_0^\mu(t_0, t_i) = \sum_{N \geq 0} \frac{U^\mu(t_i, N)}{t_0^{\epsilon+N}}, \quad (36)$$

где

$$U^\mu(t_\beta, N) = \sum_{m_\alpha: \sum \epsilon_\alpha m_\alpha = \epsilon_\mu + N} C^\mu(m_\alpha) \left(\prod \frac{t_\beta^{m_\beta}}{m_\beta!} \right).$$

Чтобы вычислить $\Psi_0^\mu(t_0, t_\beta)$, используем интегральное представление (33) функции $\Psi_0^{(n)}(t_0, t_\beta)$. На самом деле нам не нужно вычислять интегралы вдоль всех контуров $C^{(n)}$ и брать их линейную комбинацию, заданную в (34). Взвешенное суммирование в (34) играет лишь роль проектора каждого из интегралов вдоль контуров $C^{(n)}$ на часть, которая соответствует собственной функции с определенным действием группы монодромии. Поэтому мы концентрируем свое внимание на вычислении одного из интегралов, а именно интеграла по контуру $C^{(0)}$, и в нем сохраняем только члены ряда, имеющие необходимое действие группы монодромии.

Мы деформируем контур $C^{(0)} \rightarrow \tilde{C}^{(0)}$, как показано на рис. 2. Эта деформация контура позволяет записать интегральное представление для подынтегральной

 Рис. 2. Деформация контура $C^{(0)} \rightarrow \tilde{C}^{(0)}$.

функции $1/F$, если принять во внимание, что функция $f(x) = x^{p+1} - t_0$ на контуре имеет отрицательную действительную часть. Отсюда следует, что мы можем использовать интегральное представление

$$F^{-1} = \int_0^\infty dy e^{Fy}. \quad (37)$$

Мы предполагаем, что переменные t_α при $\alpha \geq 1$ малы, как было объяснено выше. Таким образом, мы можем выполнить разложение Тейлора по t_α с $\alpha \geq 1$:

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(0)} &= \int_{\tilde{C}^{(0)}} dx \int_0^\infty dy e^{y(x^{p+1} - t_0 + \sum t_\alpha x^\alpha)} = \\ &= \int_{\tilde{C}^{(0)}} dx \int_0^\infty dy e^{yx^{p+1}} e^{-t_0 y} \sum_{m_\alpha} \left(\prod \frac{t_\alpha^{m_\alpha}}{m_\alpha!} \right) x^{\sum \beta m_\beta} y^{\sum m_\gamma}. \end{aligned}$$

Изменив порядок интегрирования и сделав замену переменных $x \rightarrow y^{-1/(p+1)}x$, мы получаем

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(0)} &= \int dy y^{\sum m_\alpha - \frac{\sum \alpha m_\alpha + 1}{p+1}} e^{-t_0 y} \left(\prod \frac{t_\beta^{m_\beta}}{m_\beta!} \right) \int_{\tilde{C}^{(0)}} dx e^{x^{p+1}} x^{\sum \beta m_\beta} = \\ &= \sum_{m_\alpha} \frac{\Gamma(\sum m_\alpha - \frac{\sum \alpha m_\alpha + 1}{p+1} + 1)}{t_0^{\sum m_\alpha - \frac{\sum \alpha m_\alpha + 1}{p+1} + 1}} \left(\prod \frac{t_\beta^{m_\beta}}{m_\beta!} \right) \int_{\tilde{C}^{(0)}} dx e^{x^{p+1}} x^{\sum \beta m_\beta}. \end{aligned} \quad (38)$$

В интеграле по x мы теперь можем деформировать контур до двух лучей, проходящих через начало координат под углами $\pm\pi/(p+1)$, и прямым вычислением показать, что

$$\int_{\tilde{C}^{(0)}} dx e^{x^{p+1}} x^r = \frac{2i}{p+1} \sin\left(\pi \frac{r+1}{p+1}\right) \Gamma\left(\frac{r+1}{p+1}\right).$$

Введем μ и N , зависящие от m_i , с помощью равенства

$$\sum m_\alpha \epsilon_\alpha = \epsilon_\mu + N, \quad (39)$$

где $0 \leq \mu \leq p-1$ и $N \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(0)} &= \frac{2i}{p+1} \sum_{0 \leq \mu \leq p-1} \sum_{N \geq 0} \frac{\Gamma(\epsilon_\mu + \epsilon + N)}{t_0^{\epsilon_\mu + \epsilon + N}} \times \\ &\times \sum_{m_\alpha: \sum m_\alpha \epsilon_\alpha = \epsilon_\mu + N} \left(\prod \frac{t_\alpha^{m_\alpha}}{m_\alpha!} \right) \sin \left(\pi \frac{\sum \alpha m_\alpha + 1}{p+1} \right) \Gamma \left(\frac{\sum \alpha m_\alpha + 1}{p+1} \right). \end{aligned}$$

Из этой формулы, как описано выше, теперь мы получаем выражение для Ψ_0^μ :

$$\begin{aligned} \Psi_0^\mu &= \frac{2i}{p+1} \sum_{N \geq 0} \frac{\Gamma(\epsilon_\mu + \epsilon + N)}{t_0^{\epsilon_\mu + \epsilon + N}} \times \\ &\times \sum_{m_\alpha: \sum m_\alpha \epsilon_\alpha = \epsilon_\mu} \left(\prod \frac{t_\alpha^{m_\alpha}}{m_\alpha!} \right) \sin \left(\pi \frac{\sum \alpha m_\alpha + 1}{p+1} \right) \Gamma \left(\frac{\sum \alpha m_\alpha + 1}{p+1} \right). \end{aligned}$$

Главные члены в разложении функций Ψ_0^μ (с $N = 0$) соответствуют с точностью до нормировки, как это было описано выше, плоским координатам как функциям от параметров деформации. Кроме того, мы будем принимать во внимание, что из соотношения (39) при $N = 0$ следует, что

$$\sum \alpha m_\alpha = \mu + k(p+1), \quad k \geq 0.$$

Учитывая оба этих факта, мы получаем явное выражение для плоских координат:

$$s^\mu = \sum_{m_\alpha: \sum m_\alpha \epsilon_\alpha = \epsilon_\mu} (-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{p+1} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{p+1}\right)} \left(\prod \frac{t_\alpha^{m_\alpha}}{m_\alpha!} \right). \quad (40)$$

При взятии интеграла в (38) мы использовали хорошо известное выражение для гамма-функции.

Вообще говоря, мы могли бы применить теорему Стокса, чтобы сократить интегралы вида $\int e^{f/z} \omega$, определенные на пространстве когомологий

$$\Omega^n[[z]]/(zd + df \wedge) \Omega^{n-1},$$

которое называется решеткой Брискорна. Другими словами,

$$\int e^{f/z} \omega = \int e^{f/z} \omega',$$

если $\omega - \omega' = z d\eta + df \wedge \eta$ для некоторого $\eta \in \Omega^{n-1}$.

Таким образом, мы показали, что плоские координаты в случае особенности A_n определяются главным членом асимптотики решения $\Psi_0^\mu(t_0, t_\sigma)$ системы Гаусса–Манина (16), которое задается интегральным представлением (15). Мы ожидаем, что аналогичный подход может быть использован для вычисления плоских координат в общем случае изолированной особенности, когда не все веса $e_\mu < 1$. Однако интегральное представление решения системы Гаусса–Манина (16) в этом случае нужно изменить следующим образом:

$$\Psi_0^\mu = \int_{C_\mu} \frac{\zeta}{F},$$

где примитивная форма Сайто ζ [28] заменяет стандартную форму объема dx .

5. ОСОБЕННОСТИ ГЕПНЕРА

Рассмотрим некоторые суперконформные $N = 2$ теории поля Казама–Сузуки, которые являются косетами типа

$$G = SU(N)_k \times SO(2N - 2)_1 / SU(N - 1)_{k+1} \times U(1). \quad (41)$$

Примарные поля параметризуются представлениями группы $SU(N)_k$, которые мы обозначим как Λ , представлениями группы $SO(2N - 2)_1$, обозначенными как r , и представлениями группы $SU(N - 1)_{k+1} \times U(1)$, обозначенными как (λ, q) . Запишем поле в виде

$$H_{\lambda, q}^{\Lambda, \rho} = SU(N)_k^{\Lambda} \times SO(2N - 2)_1^r / SU(N - 1)_{k+1}^{\lambda} \times U(1)_q.$$

Эта теория имеет суперконформную $N = 2$ симметрию, в которой тензор супернапряжений задается как

$$G_+(z) = \sum_{\alpha \in \Delta_{+, R} - \Delta_{+, U}} J^{\alpha}(z) \rho^{-\alpha}(z),$$

где $\Delta_{+, R}$ – положительные корни группы $R = SU(N)$ и аналогично для группы $U = SU(N - 1)$.

Киральные поля суть примарные поля C , которые удовлетворяют условиям, что $G_+(z)C(\zeta)$ регулярна, а $G_-(z)C(\zeta) = O(1/(z - \zeta))$. Для этих полей имеет место соотношение $\Delta = q/2$, где Δ – размерность и q есть $U(1)$ -заряд. В рамках рассматриваемой модели G , заданной в (41), можно показать, что киральные поля находятся во взаимно однозначном соответствии с представлениями Λ группы $SU(N)_k$. Киральные поля можно записать как [11]

$$C^{\Lambda}(z) = H_{\Lambda, q}^{\Lambda, 0}(z), \quad (42)$$

где Λ – любое представление группы $SU(N)_k$, а $U(1)$ -заряд задается как

$$q = \frac{2(\rho - \hat{\rho})\Lambda}{k + N},$$

где ρ и $\hat{\rho}$ – полусуммы положительных корней групп R и U .

Рассмотрим теперь операторную алгебру киральных полей. Произведение двух полей C^{Λ} и C^{μ} задается слиянием представлений Λ и μ в $SU(N)_k$ так, что $U(1)$ -заряд сохраняется [11]. Удобно выразить представление в виде схемы Юнга, или числовой последовательности $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq N - 1$, в которой a_i – высота i -го столбца схемы Юнга, а $\Lambda = \sum_{i=1}^k \Lambda^{(a_i)}$, где $\Lambda^{(r)}$ – r -й фундаментальный вес. Мы имеем полностью антисимметричные представления $\bar{c}_r = [0, 0, \dots, 0, r]$ и полностью симметричные представления $c_i = [1, 1, \dots, 1]$. Поэтому нам нужно изучить кольца слияний $SU(N)_k$. Они были рассмотрены в работе [33]. Генераторы кольца являются полностью антисимметричными представлениями $\bar{c}_r$, у которых $U(1)$ -заряды равны $r/(k + N)$. Кольцо слияний описывается формулой типа Пьери. Налагая условие сохранения $U(1)$ -заряда, мы получаем просто формулу Пьери для умножения киральных полей:

$$\bar{c}_r \times [a_1, a_2, \dots, a_k] = \sum_{\substack{a_i \leq b_i \leq a_{i+1}, \\ r + \sum a_i = \sum b_i}} [b_1, b_2, \dots, b_k], \quad (43)$$

где $\Lambda = [a_1, a_2, \dots, a_k]$ задает поле C^Λ . Заметим, что это формула для умножения клеток Шуберта в когомологиях грассманиана

$$G_k(C^{N+k-1}) = U(N+k-1)/U(N-1) \times U(k).$$

Можно показать, что соотношения в киральном кольце задаются полностью симметричными представлениями c_r , $r = k+1, k+2, \dots, k+N-1$. А именно, эти поля равны нулю в киральном кольце. Как показано в работе [33], данные соотношения можно получить из потенциала

$$V = q_1^{k+N} + q_2^{k+N} + \dots + q_{N-1}^{k+N},$$

выраженного через полностью симметрические функции

$$x_r = \bar{c}_r = q_1 q_2 \dots q_r + \text{симметризация}.$$

Таким образом, мы доказали, что киральное кольцо модели Казама–Сузуки G изоморфно кольцу Якоби

$$\mathcal{R} = P[x_1, x_2, \dots, x_n]/(\partial_i V) \quad (44)$$

с суперпотенциалом V .

Обсудим теперь кольца слияний, описываемые потенциалом. Например, известно [10], что кольца слияний $SU(N)_k$ задаются потенциалом

$$V = q_1^{N+k} + q_2^{N+k} + \dots + q_N^{N+k}, \quad q_1 q_2 \dots q_N = 1,$$

который записывается через элементарные симметрические функции x_i от переменных $q_1, q_2, \dots, q_N$, являющихся антисимметричными диаграммами Юнга $\bar{c}_i$. Точки обращения в ноль производных потенциала, $\partial_i V = 0$, называются многообразиями слияний и задаются как $x_i = S_{a,i}/S_{0,i}$ для любой рациональной конформной теории поля (РКТП); здесь S – модулярная матрица и a – любое из первичных полей, маркирующих точки [33]. Мы имеем набор изолированных точек, так как кольцо слияний представляет собой полупростое кольцо.

Мы можем рассматривать данную теорию как массивную $N = 2$ конформную теорию поля, а именно как неквазиоднородный потенциал. Эта теория перетекает в $N = 2$ СКТП, которая получается наложением условия сохранения $U(1)$ -заряда или условия квазиоднородности. Мы также предполагаем, что если коэффициент слияния $f_{ijk} \neq 0$, то $\nu_i + \nu_j \geq \nu_k$, где ν_i – вес (или $U(1)$ -заряд), а также считаем, что равенство в неравенстве достигается только для $N = 2$ СКТП. Например, кольцо слияний $SU(N)_k$ переходит в модель Казама–Сузуки G , заданную в (41).

Переход к конформной теории поля теперь можно описать с помощью параметра t такого, что при $t = 1$ имеем кольцо слияний, а при $t = 0$ – суперконформное киральное кольцо; при этом мы преобразуем каждое поле как $x_i \rightarrow t^{\nu_i} x_i$. Следовательно, при $t = 0$ мы получаем $x_i = 0$ в качестве единственного решения.

Итак, доказано, что особенность изолированная, что мы и формулируем в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим киральное кольцо, которое является пределом кольца слияний: коэффициент f_{ij}^k в кольце слияний отличен от нуля, только если $U(1)$ -заряды удовлетворяют условию $\nu_i + \nu_j \geq \nu_k$, причем равенство имеет место только для киральных колец. Тогда такое кольцо – изолированная особенность.*

В частности, мы показали, что киральное кольцо $\mathcal{R}$ является изолированной особенностью. Это также было показано в работах [33], [38] и недавно строго доказано Сайто [39].

В действительности теорема верна и в случае, когда кольцо слияний не задается потенциалом, так как единственный ноль соотношений кирального кольца находится в нулевой точке в силу предельного перехода, в результате которого киральное кольцо получается из кольца слияний РКТП. Другими словами, мы доказали, что такие киральные кольца всегда локальны. Данный результат является важным, поскольку он говорит о том, что эти кольца удовлетворяют аксиомам ФМ.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Один из самых красивых аспектов компактифицированной теории струн – взаимодействие между алгебраическими конструкциями теорий струн, основанных на точно решаемых конформных теориях поля, в противоположность геометрическому подходу сигма-моделей. В работе [40] была установлена связь между так называемыми моделями Гепнера теории струн и компактификациями Калаби–Яу. Были найдены многочисленные примеры многообразий, что позволило получить точное решение ранее казавшейся малопонятной компактификации Калаби–Яу. Другие примеры были позже найдены в работах [8], [9], [11] на основании описания Ландау–Гинзбурга решаемой теории струн Гепнера.

Модули многообразия Калаби–Яу бывают двух видов: изменяющие комплексную структуру и изменяющие радиусы. Оба вида геометрически можно охарактеризовать числами Ходжа $h^{2,1}$ и $h^{1,1}$. В конформной теории поля они появляются как суперпартнеры кирального и антикирального полей размерности $1/2$. Поэтому нахождение физических величин вдали от точки решения включает в себя расчеты по теории возмущений с этими полями. Расчет такого типа был выполнен в работе [12], за исключением того, что авторы не ограничились предельными полями, т. е. полями размерности один. Следовательно, наш подход также представляет интерес для такого рода анализа в компактификации струн. Можно предположить, что плоские координаты соответствуют периодам многообразия. Это трудно анализировать, потому что мы не знаем метрику в целом, но торические примеры подтверждают эту гипотезу.

Многообразия Калаби–Яу, соответствующие $SU(N)_k/(SU(N-1)_{k+1} \times U(1))$ -моделям ТКТП Казама–Сузуки, представляют особый интерес. Соответствующие многообразия были описаны в статье [11] путем наложения условия равенства нулю суперпотенциала, которое рассматривалось как уравнение во взвешенном проективном пространстве. Следовательно, это также представляет интерес в критической теории струн для вычисления деформаций таких ТКТП Казама–Сузуки.

Используя предложенный подход, можно решить $SU(N)_k/(SU(N-1)_{k+1} \times U(1))$ -модели, поскольку они соответствуют изолированным особенностям. Это вытекает из того, что изолированность особенности, как следует из результатов Сайто и других авторов (см. работы [28], [34], [30], [31]), представляет собой в точности условие появления структуры ФМ на пространстве деформаций особенности. Структура ФМ, как мы уже отмечали, имеет решающее значение для решения таких ТКТП.

Еще одна интересная открытая проблема состоит в исследовании модели двумерных минимальных W -гравитаций, связанных с $SU(N)_k/(SU(N-1)_{k+1} \times U(1))$ -особенностями, как это было сделано в работах [16]–[19] в $SU(2)_k/U(1)$ -случае.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Замечание о гипотезе

При исследовании связности Гаусса–Манина наше естественное предположение заключалось в том, что $B_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, где через $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ обозначены символы Кристоффеля для связности Леви–Чивиты метрики $g_{\alpha\beta}$. Такое предположение основано на наблюдении, что одно из уравнений совместности очень похоже на условие, что связность является плоской. Нам необходимо проверить совместность $B_{\alpha\beta}^\gamma$ с метрикой $g_{\alpha\beta}$. Это свойство можно записать в виде

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = (\nabla_\alpha e_\beta, e_\gamma) + (e_\beta, \nabla_\alpha e_\gamma).$$

Рассмотрим разность между левой и правой частью:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - (\nabla_\alpha e_\beta, e_\gamma) - (e_\beta, \nabla_\alpha e_\gamma) &= \text{Res} \frac{e_\beta e_\gamma}{\prod_j \partial_j F} \frac{\partial_i e_\alpha}{\partial_i F} - \text{Res} \frac{B_{\alpha\beta} e_\gamma}{\prod_j \partial_j F} - \text{Res} \frac{B_{\alpha\gamma} e_\beta}{\prod_j \partial_j F} = \\ &= \text{Res} e_\alpha e_\beta e_\gamma \sum_i \left(\frac{\partial_i (1/\prod \partial_j F)}{\partial_i F} - \frac{\partial_i (1/\partial_i F)}{\prod \partial_j F} \right). \end{aligned}$$

В одномерном случае выражение в скобках в правой части этого равенства тождественно нулю.

Благодарности. Мы признательны В. Белавину, М. Берштейну, Г. Гиоргадзе, С. Гусейн-Заде, В. Горбунову, К. Хори, А. Ионову, С. Ландо, Ю. Манину, Т. Миланову и К. Сайто за полезные обсуждения. Мы благодарим Иду Декайте и Билла Эверетта за замечания по рукописи. А. Белавин признателен К. Нарайну и Ф. Кеве-до за теплый прием и за интересные дискуссии в ИТСП (Триест, Италия). Я. Кононов благодарит профессора К. Сайто за радушный прием в IPMU (Токио, Япония), а также благодарит Simons Center.

Список литературы

- [1] D. Gepner, *Nucl. Phys. B*, **296**:4 (1988), 757–778.
- [2] T. Banks, L. J. Dixon, D. Friedan, E. J. Martinec, *Nucl. Phys. B*, **299**:3 (1988), 613–626.
- [3] A. Belavin, L. Spodyneiko, *$N = 2$ superconformal algebra in NSR string and Gepner approach to space-time supersymmetry in ten dimensions*, arXiv: 1507.01911.
- [4] T. Eguchi, S. Yang, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:21 (1990), 1693–1701.
- [5] Y. Kazama, H. Suzuki, *Nucl. Phys. B*, **321**:1 (1989), 232–268.
- [6] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 2: Монодромия и асимптотики интегралов, Наука, М., 1984.
- [7] B. Blok, A. Varchenko, *Internat. J. Modern Phys. A*, **7**:7 (1992), 1467–1490.
- [8] E. J. Martinec, *Phys. Lett. B*, **217**:4 (1989), 431–437.
- [9] C. Vafa, N. Warner, *Phys. Lett. B*, **218**:1 (1989), 51–58.
- [10] W. Lerche, C. Vafa, N. Warner, *Nucl. Phys. B*, **324**:2 (1989), 427–474.
- [11] D. Gepner, *Nucl. Phys. B*, **296**:4 (1988), 757–778.

- [12] R. Dijkgraaf, H. L. Verlinde, E. P. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **352**:1 (1991), 59–86.
- [13] B. Dubrovin, *Nucl. Phys. B*, **379**:3 (1992), 627–689.
- [14] A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **103**:3 (1981), 207–210.
- [15] V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Modern Phys. Lett. A*, **3**:8 (1988), 819–826.
- [16] A. A. Belavin, A. B. Zamolodchikov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:30 (2009), 304004, 18 pp.
- [17] A. Belavin, B. Dubrovin, B. Mukhametzhanov, *JHEP*, **01** (2014), 156, 56 pp.
- [18] V. Belavin, *JHEP*, **07** (2014), 129, 17 pp.
- [19] A. Belavin, V. Belavin, *JHEP*, **09** (2014), 151, 17 pp.
- [20] A. Belavin, V. Belavin, *Moscow Math. J.*, **15**:2 (2015), 269–282.
- [21] V. Belavin, Yu. Rud, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:18 (2015), 18FT01, 11 pp., arXiv: 1502.05575.
- [22] A. A. Belavin, G. M. Tarnopolsky, *Письма в ЖЭТФ*, **92**:4 (2010), 286–295.
- [23] L. Spodyneiko, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:6 (2015), 065401, 14 pp., arXiv: 1407.3546.
- [24] M. R. Douglas, *Phys. Lett. B*, **238**:2–4 (1990), 176–180.
- [25] P. Ginsparg, M. Goulian, M. R. Plesser, J. Zinn-Justin, *Nucl. Phys. B*, **342**:3 (1990), 539–563.
- [26] A. A. Белавин, Ал. Б. Замолодчиков, *ТМФ*, **147**:3 (2006), 339–371.
- [27] Al. Zamolodchikov, *On the three-point function in minimal Liouville gravity*, arXiv: hep-th/0505063.
- [28] K. Saito, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **19**:3 (1983), 1231–1264.
- [29] M. Noumi, *Tokyo J. Math.*, **7**:1 (1984), 1–60.
- [30] C. Li, S. Li, K. Saito, Y. Shen, *Mirror symmetry for exceptional unimodular singularities*, arXiv: 1405.4530.
- [31] C. Li, S. Li, K. Saito, *Primitive forms via polyvector fields*, arXiv: 1311.1659.
- [32] G. Tarnopolsky, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:32 (2011), 325401, 11 pp.
- [33] D. Gepner, *Commun. Math. Phys.*, **141**:2 (1991), 381–411.
- [34] M. Saito, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **39**:1 (1989), 27–72.
- [35] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [36] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **117**:3 (1988), 353–386.
- [37] I. Krichever, *Commun. Math. Phys.*, **143**:2 (1992), 415–429.
- [38] E. Witten, “The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian”, *Geometry, Topology, and Physics*, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, **IV**, Intern. Press, Cambridge, 1995, 357–422, arXiv: hep-th/9312104.
- [39] К. Саито, частное сообщение, 2016.
- [40] D. Gepner, *Phys. Lett. B*, **199**:3 (1987), 380–388.

Поступила в редакцию 7.05.2016