Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Нерсисян, Гамильтонов формализм для частиц с обобщенной жесткостью,
ТМФ, 1998, том 117, номер 1, 130–139

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf922>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:24:26

© 1998 г.

А. П. Нерсисян*

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ОБОБЩЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Разработан гамильтонов формализм для механических систем с репараметризационно-инвариантными лагранжианами, зависящими от внешних кривизн мировой линии. Построены полные системы связей для лагранжианов с квадратичной зависимостью от внешних кривизн, лагранжианов, пропорциональных произвольной внешней кривизне, и лагранжианов, линейно зависящих от первых двух кривизн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, кривая в D -мерном пространстве определяется $(D - 1)$ репараметризационными инвариантами (внешними кривизнами) $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{D-1}$, являющимися функциями натурального параметра кривой $\tilde{s}$ [1]. Поэтому репараметризационно-инвариантное действие можно задать лагранжианом, являющимся функцией внешних кривизн мировой линии:

$$S = \int F(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_N) d\tilde{s}, \quad 0 \leq N \leq D - 1. \quad (1.1)$$

Такие системы мы будем называть моделями частиц с обобщенной жесткостью.

Механические лагранжианы, зависящие от первой и второй кривизн мировой линии, начали относительно интенсивно исследоваться в конце восьмидесятых годов как простые модели жестких струн и $(2 + 1)$ -мерных теорий поля с членом Черна–Саймонса [2]. Вскоре стало ясно [3–5], что данные системы представляют самостоятельный интерес, прежде всего при изучении спиновых частиц. Так, при $D = (2 + 1)$, $F = c_0 + c_1 \tilde{k}_1 + c_2 \tilde{k}_2$, $c_0 \neq 0$ таким системам отвечает массивный релятивистский анион [3], при $D = (3 + 1)$, $F = c_0 + c_1 \tilde{k}_1$, $c_0 \neq 0$ – массивный релятивистский бозон [4], а при $D = (3 + 1)$, $F = c \tilde{k}_1$ – безмассовая частица произвольной (целой и полуцелой) спиральности [5]. Заметим, что при $F = c_0 + k_1^2$ мы имеем эффективное действие релятивистского кинка в поле солитона [6].

Недавно было показано [7], что система с $F = c \tilde{k}_1$ обладает калибровочной W_3 -симметрией. В работе [8] указывается на наличие в системе с лагранжианом $F = c \tilde{k}_N$ $(N + 1)$ калибровочных симметрий, образующих предположительно W_{N+2} -алгебру.

*Объединенный институт ядерных исследований, Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: nerses@thsun1.jinr.ru

Ответ на вопросы: какие (изо)спиновые частицы описываются моделями с обобщенной жесткостью и какими калибровочными W -симметриями могут обладать эти модели, предполагает знание размерности и структуры фазовых пространств рассматриваемых моделей, генераторов калибровочных симметрий и их последующее квантование.

Для этого прежде всего требуется построить гамильтонов формализм для систем (1.1). Заметим, что лагранжианы моделей частиц с обобщенной жесткостью зависят от производных $(N + 1)$ -го порядка, т.к. внешние кривизны определяются выражениями

$$\tilde{k}_I(\tilde{s}) = \frac{\sqrt{\det \hat{g}_{I+1} \det \hat{g}_{I-1}}}{\det \hat{g}_I}, \quad (g_I)_{ij} \equiv \mathbf{x}_{(i)} \mathbf{x}_{(j)}, \quad i, j = 1, \dots, I,$$

где $\mathbf{x}_{(i)} \equiv d^i \mathbf{x}(\tilde{s}) / (d\tilde{s})^i$. Потому вначале нужно заменить исходный лагранжиан эквивалентным лагранжианом второго (первого) порядка и лишь после этого перейти к гамильтонову формализму в $2D(N + 1)$ -мерном фазовом пространстве.

Однако при переходе к гамильтонову описанию большинство авторов игнорирует инвариантные свойства лагранжианов, определяемые их зависимостью от внешних кривизн. В результате даже построение системы первичных связей предполагает проведение утомительных бесструктурных преобразований. Так, в уже упомянутой работе [8] удалось построить существенно нелинейную полную систему связей лишь для $F = c\tilde{k}_2$.

В данной работе предлагается более “геометричный” способ построения гамильтонова формализма для моделей частиц с обобщенной жесткостью, который основан на формулах Френе для подвижного репера, определяющих внешние кривизны.

Полученная таким образом гамильтонова система задается с помощью координат исходного пространства $\mathbf{x}$, компонент подвижного репера $\mathbf{e}_i$ и сопряженных им импульсов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_i$, где $i = 1, \dots, N$. Лагранжевы множители при первичных связях имеют смысл внешних кривизн мировой линии.

Эффективность предлагаемых построений демонстрируется определением полных наборов связей и гамильтонианов для моделей со следующими лагранжианами:

а) система

$$F = \frac{1}{2} \sum_i^N b_i \tilde{k}_i^2 + \sum_{i=1}^N c_i \tilde{k}_i + c_0, \quad b_1 b_2 \dots b_N \neq 0,$$

характеризуется наименьшим вырождением и отсутствием вторичных связей;

б) система

$$F = c\tilde{k}_N, \quad \forall D \quad N < D$$

характеризуется максимальным (при данном N) вырождением и $(N + 1)$ калибровочными степенями свободы; все возникающие в ней связи квадратичны.

Мы покажем, что системы с лагранжианами, линейно зависящими от внешних кривизн, обладают максимально возможным набором (квадратичных) первичных связей. Наличие в лагранжиане кривизн k_a , $a < N$, существенно определяет набор вторичных связей и уменьшает калибровочную инвариантность лагранжиана. Поэтому мы приводим для иллюстрации полные наборы связей для хорошо изученных моделей с лагранжианами $F = c_0 + c_1 \tilde{k}_1$ и $F = c_0 + c_1 \tilde{k}_1 + c_2 \tilde{k}_2$.

Везде далее мы полагаем для простоты сигнатуру пространства R^D евклидовой, что не должно привести к недоразумениям при переходе к псевдоевклидову пространству.

Мы будем пользоваться группами индексов

$$i, j, k = 1, \dots, N; \quad a, b, c, d = 1, \dots, (N-1); \quad \alpha, \beta = 1, \dots, (N-2)$$

и обозначениями

$$F_{,i} \equiv \frac{\partial F}{\partial \tilde{k}_i}, \quad F_{ij} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{k}_i \partial \tilde{k}_j},$$

$$\tilde{\phi}_{0,i} = \mathbf{p} \mathbf{e}_i, \quad \tilde{\phi}_{i,j} = \mathbf{p}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{p}_j \mathbf{e}_i, \quad \tilde{\Phi}_{00} = \mathbf{p} \hat{L} \mathbf{p}, \quad \tilde{\Phi}_{0i} = \mathbf{p} \hat{L} \mathbf{p}_i, \quad \tilde{\Phi}_{ij} = \mathbf{p}_i \hat{L} \mathbf{p}_j, \quad (1.2)$$

где

$$\hat{L} = \hat{I} - \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i; \quad \forall \mathbf{a} \quad \mathbf{b} : \mathbf{a} \equiv a^A, \quad \mathbf{b} \equiv a^A, \quad \mathbf{a} \mathbf{b} = \sum_{A=1}^D a^A b^A.$$

2. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ И ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА

Рассмотрим гамильтонову формулировку системы (1.1).

Представим действие (1.1) в виде

$$S = \int F\left(\frac{k_1}{s}, \dots, \frac{k_N}{s}\right) s d\tau, \quad \text{где } s \equiv \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right|, \quad k_i \equiv s \tilde{k}_i. \quad (2.1)$$

Пусть $\{\mathbf{e}_\mu\}$ задает подвижный репер траектории системы:

$$\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu = \delta_{\mu\nu}, \quad \dot{\mathbf{x}} = s \mathbf{e}_1, \quad \mu = 1, \dots, D. \quad (2.2)$$

В терминах подвижного репера внешние кривизны определяются уравнениями Френе

$$\dot{\mathbf{e}}_\mu = k_\mu \mathbf{e}_{\mu+1} - k_{\mu-1} \mathbf{e}_{\mu-1}, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{D+1} = 0. \quad (2.3)$$

Отсюда легко найти явные выражения для внешних кривизн

$$k_{\mu-1} = \dot{\mathbf{e}}_{\mu-1} \mathbf{e}_\mu, \quad k_\mu^2 = \dot{\mathbf{e}}_\mu^2 - k_{\mu-1}^2. \quad (2.4)$$

Заметим, что $k_\mu \geq 0$ при $\mu = 1, \dots, (D-2)$, тогда как k_{D-1} (“кручение”) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если $k_I \neq 0$, то $k_\mu \neq 0$ при $\mu = 1, 2, \dots, I-1$. Обратно, если $k_I = 0$, то $k_\mu = 0$ при $\mu = I+1, \dots, D-1$ [1].

Учитывая выражения (2.2)–(2.4), можно заменить первоначальный лагранжиан следующим лагранжианом второго порядка:

$$L = F\left(\frac{k_1}{s}, \dots, \frac{k_N}{s}\right) s + \mathbf{p}(\dot{\mathbf{x}} - s \mathbf{e}_1) + \sum_a \mathbf{p}_a (\dot{\mathbf{e}}_a - k_a \mathbf{e}_{a+1} + k_{a-1} \mathbf{e}_{a-1}) -$$

$$- \sum_{i,j} d^{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij}) - F_{,N} (k_N - (\dot{\mathbf{e}}_N^2 - k_{N-1}^2)^{1/2}), \quad (2.5)$$

где $s, k_i, d^{ij}, \mathbf{p}_a, \mathbf{e}_i$ играют роль независимых переменных.

Теперь совершим преобразование Лежандра для лагранжиана (2.5). Переменные $\mathbf{p}_a$ играют роль импульсов, сопряженных $\mathbf{e}_a$, а импульсы, сопряженные (s, k_a, d_{ij}) , приводят к тривиальным связям

$$p^s \approx 0, \quad p^a \approx 0, \quad p^{ij} \approx 0. \quad (2.6)$$

Полагая $k_N \neq 0, F_{,N} \neq 0$ получаем, что импульс, сопряженный $\mathbf{e}_N$, имеет вид

$$\mathbf{p}_N = F_{,N}(\dot{\mathbf{e}}_N^2 - k_{N-1}^2)^{-1/2} \dot{\mathbf{e}}_N. \quad (2.7)$$

Отсюда с учетом формул Френе получаем следующие связи:

$$\chi_{N.N} \equiv \mathbf{p}_N \mathbf{e}_N \approx 0, \quad \chi_{N.\alpha} = \mathbf{p}_N \mathbf{e}_\alpha \approx 0, \quad (2.8)$$

$$\Phi_{N.N} = \mathbf{p}_N^2 - (\mathbf{p}_N \mathbf{e}_{N-1})^2 - F_{,N}^2 \approx \tilde{\Phi}_{N.N} - F_N^2 \approx 0. \quad (2.9)$$

Совершив преобразование Лежандра, получим с учетом этих связей следующий *тотальный* гамильтониан

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H} + \lambda^{(s)} p_s + \lambda^{(k)a} p^a + \lambda_{(d)ij} p^{ij}, \quad (2.10)$$

где

$$\mathcal{H} = s\phi_{0.1} + \sum_a k_a \phi_{a.a+1} + \lambda \Phi_{N.N} + \sum_{i,j} d^{ij} u_{ij} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \chi_{N.\alpha} + \lambda_N \chi_{N.N}, \quad (2.11)$$

$$u_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij}, \quad \phi_{a.a+1} \equiv \tilde{\phi}_{a.a+1} - F_{,a}, \quad \phi_{0.1} \equiv \tilde{\phi}_{0.1} + \sum_i \tilde{k}_i F_{,i} - F, \quad (2.12)$$

а $\lambda, \lambda_\alpha, \lambda_N$ – лагранжевы множители.

Стабилизация (2.6) порождает вторичные связи

$$u_{ij} \approx 0, \quad s\phi_{0.1} + \sum_a k_a \phi_{a.a+1} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} \approx 0, \quad (2.13)$$

$$s\phi_{a.a+1} = -F_{,Na}(k_N - 2\lambda F_N), \quad (k_N - 2\lambda F_N)F_{,NN} \approx 0. \quad (2.14)$$

Теперь, исключив связи (2.6), мы получим гамильтонову систему, описываемую гамильтонианом (2.11) и симплектической структурой

$$\omega_N = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N d\mathbf{p}_i \wedge d\mathbf{e}_i. \quad (2.15)$$

Выражения (2.8), (2.13) задают в редуцированной системе первичные связи. Выражения (2.14), (2.9) либо определяют переменные k_a, k_N как функции от $\tilde{\phi}_{0.1}, \tilde{\phi}_{a.a+1}$, либо задают связи, при которых переменные k_a, k_N играют роль лагранжевых множителей. Число возникающих связей равно корангу гессиана F_{ij} .

Заметим, что функции (1.2) образуют замкнутую относительно скобок Пуассона (квадратичную) алгебру и удовлетворяют уравнениям

$$\{\tilde{\phi}_{\dots}, u_{\dots}\} \approx \{\tilde{\Phi}_{\dots}, u_{\dots}\} \approx 0, \quad \{\chi_{Ni}, u_{jk}\} \approx \delta_{Nj}\delta_{ik}.$$

Отсюда видим, что:

- 1) все вторичные связи зависят от функций (1.2);
- 2) связи $u_{N.N}$, $u_{N.\alpha}$ и $\chi_{N\alpha}$, $\chi_{N.N}$ являются взаимно-сопряженными связями второго рода, причем

$$\lambda_{N\alpha} = \lambda_N = 0; \quad (2.16)$$

- 3) связи $u_{N.N-1}$, $u_{a.b}$ — связи первого рода, а их стабилизация не порождает вторичных связей.

Следовательно, размерность фазового пространства системы удовлетворяет неравенству

$$(2D - 3N - 2)(N + 1) \leq D_{\text{red}} \leq (2D - N)(N + 1) - 2. \quad (2.17)$$

Принимая во внимание, что первичные связи первого рода порождают калибровочные преобразования [9], а преобразования лагранжиана, вызываемые первичными связями $u_{N.N-1}$, $u_{a.b}$, тривиальны, заключаем, что число нетривиальных калибровочных преобразований лагранжиана не превышает $\text{corank}(F_{ij}) + 1$.

Удобно зафиксировать величины $d_{N.N-1}$ и $d_{a.b}$, наложив калибровочные условия

$$\chi_{N.N-1} \equiv \mathbf{p}_N \mathbf{e}_{N-1} \approx 0, \quad \chi_{a.a-\kappa} \equiv \mathbf{p}_a \mathbf{e}_{a-\kappa} \approx 0, \quad \kappa = 0, \dots, a-1, \quad (2.18)$$

удовлетворяющие равенствам

$$\begin{aligned} \{\chi_{i.j}, u_{kl}\} &\approx \delta_{i\{k}\delta_{l\}j\}, & \{\chi_{i.j}, \tilde{\Phi}_{NN}\} &\approx 2\delta_{N.i}\delta_{ij}\tilde{\Phi}_{NN}, \\ \{\chi_{i.j}, \tilde{\phi}_{a.a+1}\} &\approx \delta_{ij}(\delta_{i.a} - \delta_{i.a+1})\tilde{\phi}_{a.a+1}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР. В максимально невырожденном случае, когда $\det F_{ij} \neq 0$, лагранжиан системы обладает лишь репараметризационной инвариантностью, а размерность фазового пространства системы $D_{\text{max}} = (2D - N)(N + 1) - 2$.

Рассмотрим простейший пример такой системы:

$$F = \frac{1}{2} \sum_i^N b_i \tilde{k}_i^2 + \sum_{i=1}^N c_i \tilde{k}_i + c_0, \quad b_1 b_2 \dots b_N \neq 0.$$

Разрешив связи (2.9), (2.14), получаем, что

$$\tilde{k}_a = \frac{\tilde{\phi}_{a.a+1} - c_a}{b_a}, \quad (b_N \tilde{k}_N + c_N)^2 = \tilde{\Phi}_{N.N}, \quad (2.19)$$

откуда

$$\mathcal{H} = s\phi_{0.1} + d_{ij}u_{ij}, \quad \phi_{0.1} = \tilde{\phi}_{0.1} + \frac{1}{2} \sum_i b_i \tilde{k}_i^2 - c_0. \quad (2.20)$$

Система имеет лишь первичные связи $\phi_{0.1} \approx 0$, $u_{ij} \approx 0$, $\chi_{N.N} \approx 0$, $\chi_{N.\alpha} \approx 0$. Стабилизация связей (2.8) и калибровочных условий (2.18) приводит к фиксации матрицы d_{ij} , значения которой мы не выписываем за ненадобностью.

3. ЛАГРАНЖИАНЫ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩИЕ ОТ КРИВИЗН

Как видно из соотношений (2.14), максимально вырожденными являются системы с лагранжианами, *линейно* зависящими от внешних кривизн,

$$F = c_0 + \sum_{i=1}^N c_i \tilde{k}_i. \quad (3.1)$$

Такие системы имеют следующий (максимальный) набор первичных связей:

$$\begin{aligned} \phi_{0.1} &= \mathbf{p}\mathbf{e}_1 - c_0 \approx 0, \\ \phi_{a.a+1} &= \mathbf{p}_a \mathbf{e}_{a+1} - \mathbf{p}_{a+1} \mathbf{e}_a - c_a \approx 0, \\ \Phi_{N.N} &= \mathbf{p}_N \hat{L} \mathbf{p}_N - c_N^2 \approx 0, \\ \chi_{N.N} &\equiv \mathbf{p}_N \mathbf{e}_N \approx 0, \quad \chi_{N.\alpha} = \mathbf{p}_N \mathbf{e}_\alpha \approx 0, \\ u_{ij} &= \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij} \approx 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

и гамильтониан

$$\mathcal{H} = s\phi_{0.1} + \sum_{a=1}^{N-1} k_a \phi_{a.a+1} + \lambda \Phi_{N.N} + \sum_{i,j=1}^N d^{ij} u_{ij}. \quad (3.3)$$

Из уравнений движения для репера $\mathbf{e}_N$ видим, что $2c_N \lambda = k_N = s\tilde{k}_N$.

Таким образом, в гамильтоновом формализме метрические инварианты траектории s, k_i играют роль лагранжевых множителей.

Поскольку при преобразовании Лежандра требовалось выполнение условия $k_N \neq 0$, то при стабилизации первичных связей системы мы должны полагать $k_a \neq 0, \lambda \neq 0$.

Наложим калибровочные условия (2.18), в результате чего все первичные связи станут квадратичными. Условия (2.18) вместе со связями (2.8) дают следующую фиксацию калибровки:

$$d_{i.j} = \delta_{ij} (k_i c_i - k_{i-1} c_{i-1} - s \delta_{1.i} c_0). \quad (3.4)$$

Стабилизация остальных первичных связей порождает вторичные связи первого этапа

$$\tilde{\phi}_{0.2} \approx 0, \quad \tilde{\phi}_{\alpha.\alpha+2} \approx 0, \quad \tilde{\Phi}_{N.N-1} \approx 0. \quad (3.5)$$

Заметим, что эволюция функций (1.2) определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{00} &= -4\lambda \Phi_{0N} \phi_{0N}, \\ \dot{\phi}_{0i} &= -k_{i-1} \phi_{0.i-1} + k_i \phi_{0.i+1} + 2\lambda \delta_{iN} \Phi_{0N}, \\ \dot{\Phi}_{0i} &= -s \delta_{1i} \Phi_{00} - k_{i-1} \Phi_{0.i-1} + k_i \Phi_{0.i+1} - 2\lambda \Phi_{N\{i\phi_0\}N}, \\ \dot{\phi}_{ij} &= -s \delta_{1[i\phi_j]0} - k_{i-1} \phi_{i-1.j} + k_i \phi_{i+1.j} - k_{j-1} \phi_{i.j-1} + k_j \phi_{i.j+1} + 2\lambda \delta_{N[i\Phi_j]N}, \\ \dot{\Phi}_{ij} &= -s \delta_{1\{i\Phi_j\}0} - k_{i-1} \Phi_{i-1.j} + k_i \Phi_{i+1.j} - k_{j-1} \Phi_{j-1.i} + k_j \Phi_{j+1.i} - 2\lambda \Phi_{N\{i\phi_j\}N}. \end{aligned}$$

Отсюда видим, что дальнейшее проведение процедуры Дирака существенно зависит от значений констант c_i .

Так, если лагранжиан (3.1) конформно-инвариантен ($c_0 = 0$), то стабилизация связи $\tilde{\phi}_{0.1} \approx 0$ приводит к следующей цепочке связей первого рода:

$$\tilde{\phi}_{0.i} = \mathbf{p}e_i \approx 0, \quad \tilde{\Phi}_{0.i} \approx \mathbf{p}\mathbf{p}_i \approx 0, \quad \tilde{\Phi}_{0.0} \approx \mathbf{p}^2 \approx 0, \quad (3.6)$$

что отвечает (в псевдоевклидовом пространстве) безмассовому случаю¹⁾.

Стабилизация остальных связей уже не затрагивает пространственный импульс системы, лишь специфицируя ее “внутреннее” пространство.

Нетрудно увидеть, что максимальным набором связей (и калибровочных симметрий) обладают системы (3.1) с $c_0 = c_1 = \dots = c_{N-1} = 0$, $c_N \equiv c \neq 0$. Для таких систем проведение процедуры Дирака порождает дополнительно к связям (3.6) следующий набор связей:

$$\tilde{\phi}_{i.j} \approx 0, \quad \tilde{\Phi}_{i.j} - c^2 \delta_{ij} \approx 0. \quad (3.7)$$

Все они являются связями первого рода.

Наложим калибровочные условия (2.18) и введем комплексные координаты

$$\mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{p}_i + i c \mathbf{e}_i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + \frac{i}{c} \sum_i d\mathbf{z}_i \wedge d\bar{\mathbf{z}}_i. \quad (3.8)$$

В этих координатах гамильтониан системы задается выражением

$$\mathcal{H} = \frac{s}{2c} \left[i\sqrt{2}\mathbf{p}(\bar{\mathbf{z}}_1 - \mathbf{z}_1) + i \sum_{a=1}^{N-1} \tilde{k}_a (\mathbf{z}_a \bar{\mathbf{z}}_{a+1} - \mathbf{z}_{a+1} \bar{\mathbf{z}}_a) + \tilde{k}_N (\mathbf{z}_N \bar{\mathbf{z}}_N - c^2) \right]. \quad (3.9)$$

Связи (3.6), (3.7), (2.8) и калибровочные условия (2.18) принимают вид

$$\Phi_{i\bar{j}}^0 \equiv \mathbf{z}_i \bar{\mathbf{z}}_j - c^2 \delta_{ij} \approx 0, \quad \Phi_i^+ \equiv \mathbf{p}\mathbf{z}_i \approx 0, \quad \Phi_0 = \mathbf{p}^2 \approx 0, \quad U_{ij}^+ = \frac{1}{2} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_j \approx 0. \quad (3.10)$$

Введенные с помощью соотношений (3.10) величины образуют алгебру

$$\begin{aligned} \{\Phi_{i\bar{j}}, \Phi_{k\bar{l}}\} &= ic(\delta_{i\bar{l}} \Phi_{k\bar{j}} - \delta_{k\bar{j}} \Phi_{i\bar{l}}), \quad \{\Phi_{i\bar{j}}, \Phi_k^+\} = -ic\delta_{k\bar{j}} \Phi_i^+, \\ \{\Phi_{i\bar{j}}, U_{kl}^+\} &= -ic(\delta_{k\bar{j}} U_{il}^+ + \delta_{l\bar{j}} U_{ik}^+), \quad \{\Phi_i^+, U_{j\bar{k}}^-\} = \frac{1}{2} ic\delta_{i\bar{j}} \Phi_{\bar{k}}^-, \\ \{\Phi_i^+, \Phi_{j\bar{k}}^-\} &= ic\delta_{i\bar{j}} \Phi_0, \quad \{\Phi, U_{ij}^+\} = \{\Phi, \Phi_{i\bar{j}}\} = \{\Phi, \Phi_i^+\} = 0, \\ \{\Phi_i^+, U_{jk}^+\} &= \{\Phi_i^+, \Phi_j^+\} = \{U_{ij}^+, U_{kl}^+\} = 0, \\ \{U_{ij}^+, U_{k\bar{l}}^-\} &= \frac{1}{4} ic\delta_{\{i, \bar{k}} \Phi_{j\bar{l}}\} + \frac{1}{2} ic^3 (\delta_{i\bar{k}} \delta_{j\bar{l}} + \delta_{i\bar{l}} \delta_{j\bar{k}}), \end{aligned}$$

¹⁾ Полный импульс системы $\mathbf{P}$ и генераторы ее вращений $\mathbf{M}^{(2)}$ определяются выражениями

$$P^A = p^A, \quad M^{(2)AB} = p^{[A} x^{B]} + \sum_{i=1}^N p_i^{[A} e_i^{B]}.$$

где $\Phi_i^- = \bar{\Phi}_i^+$, $U_{ij}^- = \overline{U}_{ij}^+$.

Таким образом, $U_{ij}^\pm$ являются связями второго рода, а остальные связи – первого рода. Размерность фазового пространства

$$D_{\min} = (2D - 3N - 2)(N + 1), \quad (3.11)$$

система обладает $(N + 1)$ калибровочными степенями свободы.

Из (3.11) видно, что если $D = 4$, то динамика нетривиальна лишь при $N = 1$. При этом размерность фазового пространства системы совпадает с размерностью фазового пространства безмассовой частицы со спиральностью s в $(3+1)$ -мерном пространстве [3]. В таком пространстве можно “спиноризовать” связи (3.10) и провести ковариантное квантование системы [10].

Как видно из соотношений (3.10), сходную процедуру можно провести также при $N > 1$ в $(5 + 1)$ -, $(7 + 1)$ - и $(9 + 1)$ -мерных пространствах.

Однако наиболее любопытным нам представляется совпадение построенной системы связей с системой $(N + 1)$ осцилляторов, полученной дискретизацией струны [11, 12].

Рассмотрим случай системы (3.1) при $N = 1$, $c_0 \neq 0$. Имеются одна вторичная связь и одно условие на лагранжевы множители:

$$\tilde{\Phi}_{0.1} \approx 0, \quad s\tilde{\Phi}_{00} + k_1 c_1 c_0 = 0. \quad (3.12)$$

Заметим, что $\tilde{\Phi}_{00} = 0$, откуда получаем, что $p^2 = c_0^2 - c_0 c_1 \tilde{k}_1 = \text{const}$, т.е. траектория системы имеет постоянную кривизну. В псевдоевклидовом пространстве последнее равенство означает сохранение массы системы на заданной траектории движения.

В комплексных координатах (3.8), где $s \equiv c_1$, полный набор связей можно представить в виде одной вещественной и двух голоморфных связей

$$\Phi = \mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} - c_1^2, \quad U^+ = \frac{\mathbf{z}^2}{2}, \quad \Phi^+ = \mathbf{p}\mathbf{z} - \frac{ic_0 c_1}{\sqrt{2}}, \quad (3.13)$$

образующих алгебру

$$\begin{aligned} \{\Phi, \Phi_+\} &= -ic_1 \Phi_+ + \frac{c_1^2 c_0}{\sqrt{2}}, & \{\Phi, U^+\} &= -2ic_1 U^+, & \{U^+, U^-\} &= ic_1 \Phi + ic_1^3, \\ \{\Phi^+, \Phi^-\} &= ic_1 \mathbf{p}^2, & \{\Phi_+, U_-\} &= ic_1 \Phi^- + \frac{c_0 c_1^2}{\sqrt{2}}, & \{\Phi_+, U_+\} &= 0, \end{aligned}$$

где $\Phi_- \equiv \bar{\Phi}_+$, $U_- \equiv \overline{U}_+$.

Таким образом, при $c_0 \neq 0$, $N = 1$ размерность фазового пространства $D_{\text{red}} = 2(2D - 3)$.

Система имеет единственную калибровочную степень свободы, задаваемую гамильтонианом

$$\mathcal{H}_{1.c_0 \neq 0} = \frac{s}{2c_1^2 c_0} [2ic_1^2 c_0 \mathbf{p}(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) + (c_0^2 - \mathbf{p}^2)(\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} - c_1^2)]. \quad (3.14)$$

При $c_0 = 0$ размерность фазового пространства $D_{\text{red}} = 2(2D - 5)$, и система имеет две калибровочные степени свободы.

Теперь рассмотрим случай $N = 2$ при произвольных константах c_0, c_1, c_2 .

При $c_0 \neq 0$ имеем две вторичные связи второго этапа, определяемые выражениями (3.5). Их стабилизация приводит к условиям

$$c_2 c_0 k_1 = k_2 \tilde{\Phi}_{0.2}, \quad s c_0 c_2 \tilde{\Phi}_{0.2} = k_2 (\Phi_{1.1} \tilde{\Phi}_{0.2} - c_2^2 c_1 c_0), \quad (3.15)$$

где $\Phi_{1.1} \equiv \tilde{\Phi}_{1.1} - c_2^2$, $\tilde{\Phi}_{0.2} \neq 0$. При $c_1 = 0$, второе условие принимает вид $s c_0 c_1 + k_2 \Phi_{1.1} = 0$. Система имеет единственную калибровочную степень свободы, размерность фазового пространства $D_{\text{red}} = 6(D - 2)$.

Как и при $N = 1$, имеем интеграл движения $\tilde{\Phi}_{0.0}$: $\dot{\tilde{\Phi}}_{0.0} = 0$, отвечающий в псевдоевклидовом пространстве за сохранение массы на заданной траектории движения.

При $c_0 = 0$, $c_1 \neq 0$ вторичные связи определяются выражениями (3.6) и $\tilde{\Phi}_{1.2} \approx 0$. Имеет место условие

$$k_2 c_2 c_1 + k_1 \Phi_{1.1} = 0, \quad (3.16)$$

при этом $\Phi_{1.1}$ является интегралом движения: $\dot{\Phi}_{1.1} = 0$. Отсюда следует, что $\tilde{k}_2/\tilde{k}_1 = \text{const}$. Система имеет две калибровочные степени свободы, размерность ее фазового пространства $D_{\text{red}} = 2(3D - 10)$.

При $c_0 = c_1 = 0$ размерность фазового пространства системы $D_{\text{red}} = 6(D - 4)$, имеются три калибровочные степени свободы.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы построили гамильтонов формализм для репараметризационно-инвариантных механических систем общего положения. В частности, мы показали, что размерность фазового пространства D -мерной системы с лагранжианом, зависящим от первых N внешних кривизн, удовлетворяет неравенству (2.17). Эта размерность максимальна для лагранжианов, являющихся невырожденной квадратичной функцией внешних кривизн, и минимальна для лангранжианов, пропорциональных единственной N -й внешней кривизне.

В первом случае лагранжианы имеют единственную калибровочную степень свободы (репараметризации), во втором случае они имеют $(N + 1)$ калибровочных степеней свободы, причем все связи являются квадратичными.

Мы показали, что в предложенной формулировке все первичные связи для систем с лагранжианами, линейно зависящими от внешних кривизн, сводятся к квадратичным, а алгоритм построения полного набора связей представляет собой набор алгебраических операций.

Система связей для модели с лагранжианом $F = c\tilde{k}_N$ оказалась эквивалентной системе взаимодействующих $(N + 1)$ осцилляторов, полученной дискретизацией струны [11, 12]. Недавно Пашнев и Цулая провели БРСТ-квантование последней системы как для $N = 1$ [13], так и для произвольного N [14]. Мы полагаем, что такая удивительная параллель заслуживает более детального рассмотрения в отдельной работе.

Благодарности. Автор считает своим долгом выразить благодарность Е. А. Иванову за предложение рассматривать системы с жесткостью, разъяснение их актуальности в контексте W -алгебр, полезные обсуждения и критику.

Многочисленные обсуждения были проведены с П. Пятовым и С. Ляховичем по процедуре Дирака, а по спиновым частицам – с С. Ляховичем, А. Шараповым и особенно К. Шехтером. А. Пашнев обратил внимание автора на соответствие между моделями жестких частиц и дискретных струн и указал на работы по БРСТ-квантованию последних. Завершению работы способствовал также постоянный интерес со стороны О. М. Худавердяна и В. В. Нестеренко.

Всем им автор выражает глубокую признательность.

Отдельно хочется поблагодарить И. В. Тютина, детально разъяснившего автору структуру калибровочных преобразований в формализме Дирака.

Работа выполнена при поддержке грантов INTAS-РФФИ № 95-0829 и INTAS-96-538, INTAS-93-127-ext.

Список литературы

- [1] М. М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр III: Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.
- [2] А. М. Polyakov. Nucl. Phys. B. 1986. V. 268. P. 406; Mod. Phys. Lett. A. 1988. V. 3. P. 112.
- [3] М. S. Plyushchay. Nucl. Phys. B. 1991. V. 362. P. 54; Yu. A. Kuznetsov, M. S. Plyushchay. Nucl. Phys. B. 1993. V. 389. P. 181.
- [4] М. S. Plyushchay. Phys. Lett. B. 1990. V. 243. P. 383.
- [5] М. S. Plyushchay. Phys. Lett. B. 1991. V. 253. P. 50.
- [6] А. А. Kapustnikov, А. Pashnev, А. Pichugin. Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 2257.
- [7] E. Ramos, J. Roca. Nucl. Phys. B. 1995. V. 436. P. 529.
- [8] E. Ramos, J. Roca. Nucl. Phys. B. 1995. V. 452. P. 705.
- [9] И. В. Тютин. Частное сообщение. 1998.
- [10] E. Ramos, J. Roca. Nucl. Phys. B. 1996. V. 477. P. 606.
- [11] В. Д. Гершуин, А. И. Пашнев. ТМФ. 1987. Т. 73. С. 294.
- [12] А. Р. Isaev, А. Т. Filippov. Mod. Phys. Lett. A. 1989. V. 4. P. 2167.
- [13] А. Pashnev, М. Tsulaia. Description of the higher massless irreducible integer spins in the BRST approach. hep-th/9803207; Препринт ОИЯИ Е2-98-56. Дубна: ОИЯИ, 1998.
- [14] А. Pashnev, М. Tsulaia. In preparation.

Поступила в редакцию 28.IV.1998 г.