Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Эль Дииб, О критической модели $\mathcal{M}(3, 5)$ RSOS
с границами, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 3, 466–483

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9220>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:20:54

© 2017 г.

О. Эль Дииб*

О КРИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ $M(3,5)$ RSOS С ГРАНИЦАМИ

Рассмотрена критическая неунитарная минимальная модель $M(3,5)$ с интегрируемыми граничными условиями. Проведен анализ структуры нулей собственных значений трансфер-матрицы, и с помощью термодинамического анзаца Бете определен спектр критической теории. Путем решения функционального уравнения термодинамического анзаца Бете, которому удовлетворяет трансфер-матрица соответствующей решеточной модели A_4 RSOS Форрестера–Бакстера в режиме III в непрерывном скейлинговом пределе, получены интегральные уравнения для всех возбуждений в секторе $(r, s) = (1, 1)$ и затем определены их энергии. Проведена классификация возбуждений в терминах (m, n) -систем.

Ключевые слова: модель $M(3,5)$, конформная теория поля, решеточные модели, интегрируемость Янга–Бакстера, неунитарные минимальные модели.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9220>

1. ВВЕДЕНИЕ

Решение $(1 + 1)$ -мерной квантовой теории поля в конечном объеме и определение энергетического спектра и корреляционных функций поля является сложной и нетривиальной задачей. Зависимость от объема сложна, и энергию нельзя вычислить точно даже для основного состояния. Однако для специальной категории моделей, содержащих бесконечный набор законов сохранения и называемых интегрируемыми моделями, решение можно получить. Подход бутстрапа позволяет найти массы частиц и матрицы рассеяния. В случае больших объемов для нахождения приближенного спектра с помощью величин, относящихся к бесконечному объему, используются уравнения Бете–Янга [1], [2]. Спектр систем конечного размера, при нахождении которого пренебрегают малыми вкладами от поляризации вакуума, содержит полиномиальные поправки, обратно пропорциональные объему. Используя метод термодинамического анзаца Бете (ТАБ), для основного состояния можно точно рассчитать, как влияет на спектр поляризация вакуума. При больших

*Physics Department, Faculty of Science, Beirut Arab University, Beirut, Lebanon.
E-mail: o.deeb@bau.edu.lb, Omar.Deeb@gmail.com

евклидовых временах в статистической сумме преобладает вклад основного состояния. Поскольку пространство и евклидово время можно поменять местами путем подходящего преобразования, достаточно вычислить статистическую сумму в пределе большого объема, когда уравнения Бете–Янга являются точными. Интегральные уравнения ТАБ для псевдоэнергий можно вывести, вычисляя статистическую сумму методом перевала. Энергия основного состояния получается из решений этих нелинейных уравнений ТАБ [3]–[6].

Расширение метода ТАБ, использующего инвариантные свойства статистической суммы, на все возбужденные состояния в общем случае является непростой задачей. Однако некоторую информацию об определенном рода возбужденных состояниях можно получить из точных уравнений ТАБ для основного состояния [7], поскольку эти возбужденные состояния связаны с основным аналитическим продолжением. Тем не менее метод, использующий аналитическое продолжение, до сих пор не был успешно реализован при получении уравнений ТАБ для полного спектра возбуждений неунитарной модели $M(3, 5)$ и даже более простой неунитарной скейлинговой модели Ли–Янга [8], [9].

Решение функциональных уравнений, полученных из интегрируемой решеточной регуляризации Янга–Бакстера, является мощным и систематизированным методом получения интегральных уравнений ТАБ для возбужденных состояний [10]–[13]. Эти функциональные уравнения принимают вид объединенной $(T-Y)$ -системы; при этом Y -система содержит псевдоэнергии и описывает конформный спектр в критическом состоянии. Функциональные уравнения можно превратить в интегральные уравнения ТАБ для полного спектра возбуждений, опираясь на аналитические и асимптотические свойства уравнений. Этот метод был успешно применен для трикритической модели Изинга $M(4, 5)$ с конформными граничными условиями [14]. В работах [15], [16] описана трикритическая модель Изинга на интервале и определен ее полный спектр. Уравнение основного состояния и некоторые возбужденные состояния модели синус-Гордон получены в работах [17]–[19]. Подход решеточной регуляризации систематически развивался для теории Ли–Янга в работах [20]–[22]. С другой стороны, энергия основного состояния и уравнения для возбужденных состояний модели Ли–Янга на интервале выведены в работах [23]–[25], а уравнения ТАБ для дефекта основного состояния были получены в работе [26].

Интегрируемая структура конформной теории поля отражается в функциональном виде Y -системы. В рамках решеточного подхода эта система получается путем непрерывного скейлингового предельного перехода в интегрируемой решеточной регуляризации теории. Решеточный подход обуславливает необходимые асимптотические и аналитические свойства, а также позволяет провести полную классификацию возбужденных состояний теории.

Цель настоящей работы – начать разработку следующей по простоте неунитарной модели, а именно решеточной критической модели $M(3, 5)$ с интегрируемыми граничными условиями. Используя решеточный подход, мы изучаем критические уравнения ТАБ данной модели.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 вводится конформная модель, а также непрерывный скейлинговый предел решеточной модели RSOS (restricted solid-on-solid) A_4 Форрестера–Бакстера [27]–[30] в режиме III с кроссинг-параметром $\lambda = 2\pi/5$. Мы вводим коммутирующие трансфер-матрицы дублированной строки

(double-row transfer matrix) с интегрируемыми границами и показываем, что после надлежащей нормировки трансфер-матрица удовлетворяет универсальному функциональному соотношению в виде Y -системы. В разделе 3 дан анализ конформных спектров трансфер-матриц, а также изучается аналитическая структура ее собственных значений, классифицируются все возбужденные состояния тригонометрической теории для (m, n) -системы и приводятся картины характерных конфигураций нулей собственного значения трансфер-матрицы. В разделе 4 при выводе интегральных уравнений ТАБ для спектра системы конечного объема при $(1, 1)$ -граничном условии в критическом случае используются аналитические сведения вместе с функциональными соотношениями, а также вычисляются энергии систем конечного размера. Мы завершаем статью обсуждениями в разделе 5.

2. РЕШЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ $\mathcal{M}(3, 5)$

Рассматриваемая нами решеточная модель $\mathcal{M}(3, 5)$ представляет собой модель RSOS, заданную на квадратной решетке, с высотами (или спинами), живущими на диаграмме Дынкина A_4 , при этом ближайшие соседние высоты отличаются на ± 1 . Эта модель принадлежит общему семейству моделей A_4 Форрестера–Бакстера, которые изучались в работах [29]–[31]. Больцмановские веса общей модели Форрестера–Бакстера A_L имеют вид

$$W \begin{pmatrix} a \pm 1 & a \\ a & a \mp 1 \end{pmatrix} = \frac{s(\lambda - u)}{s(\lambda)},$$

$$W \begin{pmatrix} a & a \pm 1 \\ a \mp 1 & a \end{pmatrix} = \frac{g_{a \mp 1}}{g_{a \pm 1}} \frac{s((a \pm 1)\lambda)}{s(a\lambda)} \frac{s(u)}{s(\lambda)}, \quad W \begin{pmatrix} a & a \pm 1 \\ a \pm 1 & a \end{pmatrix} = \frac{s(a\lambda \pm u)}{s(a\lambda)},$$

где $a = 1, \dots, L$. В этих формулах u – спектральный параметр, и для массивной теории $s(u) = \vartheta_1(u, p)$, где

$$\vartheta_1(u, q) = 2q^{1/4} \sin u \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2u + q^{4n})(1 - q^{2n})$$

есть эллиптическая тета-функция [32], а q – эллиптический модуль, связанный с величиной типа температуры $T = q^2$, отвечающей возмущению массивного объема в данной модели. В критическом случае $s(u) = \sin u$, что соответствует конформной безмассовой модели. Кроссинг-параметр λ определяется формулой

$$\lambda = \frac{(p' - p)\pi}{p'},$$

где $p' = L + 1$ и p, p' являются взаимно простыми целыми числами, причем $p < p'$. Веса удовлетворяют уравнению Янга–Бакстера, что гарантирует интегрируемость модели. Калибровочные множители g_a произвольны, и мы можем взять их все равными единице. Унитарные модели с $p' = p + 1$ имеют положительные больцмановские веса, а неунитарные модели с $p' \neq p + 1$ могут иметь отрицательные больцмановские веса.

Критические модели Форрестера–Бакстера в режиме III ($0 < u < \lambda$, $0 < q < 1$) в непрерывном скейлинговом пределе соответствуют минимальной модели $\mathcal{M}(p, p')$

ТАБЛИЦА 1. Различные секторы и размерности модели $\mathcal{M}(3, 5)$.

Метка Каца (r, s)	Метка, эквивалентная (r, s)	Размерность $h_{r,s}$	Символ
$(1, 1)$	$(2, 4)$	0	I
$(2, 1)$	$(1, 4)$	$3/4$	σ''
$(2, 2)$	$(1, 3)$	$1/5$	σ'
$(2, 3)$	$(1, 2)$	$-1/20$	σ

с центральным зарядом $c = 1 - 6(p - p')^2 / pp'$. В настоящей работе мы рассматриваем модель $\mathcal{M}(3, 5)$, в которой $\lambda = 2\pi/5$ и $c = -3/5$.

Минимальная модель $\mathcal{M}(p, p')$ имеет $(p - 1)(p' - 1)/2$ скейлинговых полей, что приводит к четырем независимым скейлинговым полям модели $\mathcal{M}(3, 5)$. Скейлинговые поля, скейлинговые размерности и правила слияния можно определить, пользуясь общей теорией [33]; эти поля и их символы приведены в табл. 1.

Правила слияния полей можно получить с помощью общего соотношения слияния:

$$\phi_{(r,s)} \times \phi_{(m,n)} = \sum_{\substack{k=1+|r-m|, \\ k+r+m=1 \pmod{2}}}^{k_{\max}} \sum_{\substack{l=1+|s-n|, \\ l+s+n=1 \pmod{2}}}^{l_{\max}} \phi(k, l),$$

$$k_{\max} = \min(r + m - 1, 2p' - 1 - r - m), \quad l_{\max} = \min(s + n - 1, 2p - 1 - s - n),$$

индексы k и l в суммах изменяются с шагом 2. Приведем правила слияния для полей модели $\mathcal{M}(3, 5)$:

$$\begin{aligned} \sigma \times \sigma &= I + \sigma', & \sigma \times \sigma' &= \sigma + \sigma', & \sigma \times \sigma'' &= \sigma', \\ \sigma' \times \sigma' &= I + \sigma', & \sigma' \times \sigma'' &= \sigma, & \sigma'' \times \sigma'' &= I. \end{aligned}$$

Минимальные модели обладают следующими дробными разложениями:

$$\begin{aligned} \frac{p'}{p} &= \nu_0 + 1 + \frac{1}{\nu_1 + \frac{1}{\nu_2 + \dots + \frac{1}{\nu_n + 2}}}, \quad \text{если } 2 < 2p < p', \\ \frac{p'}{p' - p} &= \nu_0 + 1 + \frac{1}{\nu_1 + \frac{1}{\nu_2 + \dots + \frac{1}{\nu_n + 2}}}, \quad \text{если } 2p > p', \end{aligned}$$

где $\nu_0 > 0$ и $\nu_j \geq 1$ при $j = 1, 2, \dots, n$, а число частиц в теории $t = \sum_{j=0}^n \nu_j$. В нашей конкретной модели с $2p > p'$ мы получаем, что $\nu_0 = 1$, а все остальные $\nu_j = 0$. Таким образом, $t = 1$, и в данной модели существует один тип частиц. Это находится в прямой аналогии с дуальной моделью Ли–Янга $\mathcal{M}(2, 5)$, в которой только один тип частиц и те же значения параметров ν_j .

2.1. Трансфер-матрицы. Трансфер-матрицы строятся по локальным весам граблей. Поскольку веса удовлетворяют уравнениям Янга–Бакстера, эти матрицы образуют коммутирующие семейства, $[\mathbf{D}(u), \mathbf{D}(v)] = 0$. Такая модель удовлетворяет тем

же функциональным соотношениям, что и трикритическая модель жестких квадратов, модель жесткого шестигранника и модель Ли–Янга со спектральным параметром $\lambda = 2\pi/5$ вместо $\lambda = \pi/5$ и $\lambda = 3\pi/5$, как это принято в других моделях (см. работы [13], [21], [22], [34]–[36]). Новое значение кроссинг-параметра приводит к аналитическим свойствам нашей модели, аналогичным свойствам модели Ли–Янга с одной полосой аналитичности, но совершенно отличающимся от свойств двух других вышеупомянутых моделей с двумя полосами аналитичности.

Трансфер-матрицы дублированной строки удовлетворяют функциональному соотношению

$$\mathbf{D}(u)\mathbf{D}(u + \lambda) = 1 + \mathbf{Y}\mathbf{D}(u + 3\lambda),$$

где $\mathbf{Y}$ есть $\mathbb{Z}_2$ -симметрия относительно обращения высот.

Конформный спектр энергий E_n модели $\mathcal{M}(3, 5)$ можно получить из логарифма собственного значения трансфер-матрицы дублированной строки с помощью поправок, связанных с конечным размером [37]. При наличии границ указанные поправки определяются формулой

$$-\ln T(u) = N f_{\text{bulk}}(u) + f_{\text{boundary}}(u, \xi) + \frac{2\pi}{N} E_n \sin \vartheta,$$

где $T(u)$ – собственное значение оператора $\mathbf{D}(u)$, N – число весов граней (в случае наличия границ N – четное число), $\vartheta = \pi u/\lambda = 5u/2$ есть угол анизотропии, f_{bulk} и f_{boundary} – объемная и граничная свободные энергии, которые можно вычислить, используя методы, основанные на соотношении инверсии [38]–[40].

2.1.1. Граничные веса. Условие интегрируемости нашей модели при наличии границ требует коммутирования трансфер-матриц одной строки и треугольных граничных условий, которые удовлетворяют левым и правым граничным уравнениям Янга–Бакстера [41]. В рассматриваемой модели мы помечаем конформные граничные условия метками Каца (r, s) , где $1 \leq r \leq 2$ и $1 \leq s \leq 4$. Однако благодаря симметрии по отношению к обращению высот достаточно определить треугольные веса, соответствующие независимым меткам Каца (r, s) , указанным в табл. 1. Используя калибровочные преобразования, эти конформные граничные условия можно выразить через интегрируемые граничные условия с помощью нескольких весов. Действительно, можно показать, что для решений граничных уравнений Янга–Бакстера в случае условий $(1, 1)$ треугольные граничные веса произвольны, и мы задаем их как

$$K_L \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \middle| u \right) = \frac{s(2\lambda)}{s(\lambda)}, \quad K_R \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix} \middle| u \right) = 1.$$

Другие интегрируемые граничные условия можно построить, применяя несколько раз условие шивки к интегрируемой границе $(1, 1)$ [42]. Ненулевые левые и правые граничные веса вычисляются явно и имеют вид

$$\begin{aligned} K_L \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix} \middle| u, \xi_L \right) &= W \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \middle| u + \xi \right) W \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix} \middle| \lambda - u + \xi \right) K_L \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \middle| u \right) = \\ &= \frac{s(u - 2\lambda + \xi_L)s(u - 2\lambda - \xi_L)}{s^2(\lambda)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_L \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix} \middle| u, \xi_L \right) &= W \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \middle| u + \xi \right) W \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix} \middle| \lambda - u + \xi \right) K_L \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \middle| u \right) = \\ &= \frac{s(3\lambda)s(u + \xi_L)s(u - \xi_L)}{s^3(\lambda)}. \end{aligned}$$

В укороченных обозначениях ненулевой левый граничный вес можно представить как

$$K_L \left(\begin{matrix} 2 & a \\ 2 & a \end{matrix} \middle| u, \xi_L \right) = \frac{s(a\lambda)s(u + \xi_L + (a-3)\lambda)s(u - \xi_L + (a-3)\lambda)}{s^3(\lambda)}, \quad a = 1, 3,$$

и аналогично – ненулевой правый граничный вес:

$$\begin{aligned} K_R \left(\begin{matrix} a & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \middle| u, \xi_R \right) &= W \left(\begin{matrix} a & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \middle| u + \xi_R \right) W \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ a & 2 \end{matrix} \middle| \lambda - u + \xi_R \right) K_R \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \middle| u \right) = \\ &= \frac{s(u + \xi_R + (2-a)\lambda)s(u - \xi_R + (2-a)\lambda)}{s(\lambda)s(2\lambda)}, \quad a = 1, 3. \end{aligned}$$

Изменяя $\text{Im } \xi_L$ и $\text{Im } \xi_R$, можно получить различные конформные граничные условия (r, s) в этой теории. Тот факт, что граничные веса удовлетворяют левому и правому граничным уравнениям Янга–Бакстера, гарантирует интегрируемость модели при наличии границ.

2.1.2. Трансфер-матрица дублированной строки. Введенные выше веса граней и треугольные граничные веса используются для построения семейства коммутирующих трансфер-матриц дублированной строки $\mathbf{D}(u)$ [41]. Для решетки ширины N трансфер-матрица $\mathbf{D}(u)$ задается выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(u)_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} &= \\ &= \sum_{c_0, \dots, c_N} K_L \left(\begin{matrix} r & c_0 \\ r & c_0 \end{matrix} \middle| \lambda - u \right) W \left(\begin{matrix} r & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{matrix} \middle| \lambda - u \right) W \left(\begin{matrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix} \middle| \lambda - u \right) \dots W \left(\begin{matrix} b_{N-1} & s \\ c_{N-1} & c_N \end{matrix} \middle| \lambda - u \right) \times \\ &\quad \times W \left(\begin{matrix} c_0 & c_1 \\ r & a_1 \end{matrix} \middle| u \right) W \left(\begin{matrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \middle| u \right) \dots W \left(\begin{matrix} c_{N-1} & c_N \\ a_{N-1} & s \end{matrix} \middle| u \right) K_R \left(\begin{matrix} c_N & s \\ c_N & s \end{matrix} \middle| u \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Эта матрица удовлетворяет условиям периодичности $\mathbf{D}(u + \pi) = \mathbf{D}(u)$, коммутативности $[\mathbf{D}(u), \mathbf{D}(v)] = 0$ и перекрестной симметрии $\mathbf{D}(u) = \mathbf{D}(\lambda - u)$. Вообще говоря, $\mathbf{D}(u)$ не является симметричной или нормальной, но ее можно диагонализировать, потому что $\tilde{\mathbf{D}}(u) = \mathbf{G}\mathbf{D}(u) = \tilde{\mathbf{D}}^T(u)$, где диагональная матрица $\mathbf{G}$ задается формулами

$$\mathbf{G}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} = \prod_{j=1}^{N-1} G(a_j, a_{j+1}) \delta(a_j, b_j), \quad G(a, b) = \begin{cases} \frac{s(\lambda)}{s(2\lambda)}, & b = 1, 4, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нормированная трансфер-матрица $\mathbf{T}(u)$ определяется выражением

$$\mathbf{D}(u) = S_b(u) \frac{s^2(2u - \lambda)}{s(2u + \lambda)s(2u - 3\lambda)} \left(\frac{s(\lambda)s(u + 2\lambda)}{s(u + \lambda)s(u + 3\lambda)} \right)^N \mathbf{T}(u).$$

В последующем анализе мы ограничимся в своих обсуждениях левыми и правыми граничными $(1, 1)$ -весами, соответствующими границе $(r, s) = (1, 1)$. Граничная трансфер-матрица одной строки задается формулой (1), в которой следует положить $r = s = 1$ и зафиксировать $c_0 = c_N = 2$. При этом $S_b(u) = 1$ для $(r, s) = (1, 1)$.

Ограничив свое рассмотрение собственным подпространством с $Y = +1$, получим, что собственное значение $t(u)$ нормированной трансфер-матрицы $\mathbf{T}(u)$ дублированной строки удовлетворяет универсальной Y -системе, которая не зависит от граничных условий [41], следовательно, собственное значение подчиняется функциональному уравнению

$$t(u)t(u + \lambda) = 1 + t(u + 3\lambda).$$

3. КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ

В настоящем разделе мы анализируем, как распределены в комплексной плоскости нули собственных значений трансфер-матрицы дублированной строки, не проводя исследование соответствующих им RSOS-траекторий, связанных с одномерными конфигурационными суммами угловых матриц перехода Бакстера [43]–[46], поскольку нашей целью в конечном итоге является решение уравнений ТАБ для изучаемой модели. Мы рассматриваем поведение конечных возбуждений над основным состоянием.

3.1. (m, n) -Системы, конфигурация нулей, RSOS-траектории и характеристики. Веса граней и треугольные граничные веса в критической решеточной модели $\mathcal{M}(3, 5)$ с $\lambda = 2\pi/5$ выражаются через тригонометрические функции $s(u) = \sin u$. Эта модель отвечает конформной теории поля с центральным зарядом $c = -3/5$. Ее алгебра Вирасоро имеет четыре неприводимых модуля с характеристам

$$\chi_h(q) = q^{-c/24+h} \sum_{n=0}^{\infty} \dim(V_n^h) q^n, \quad h = 0, \frac{1}{5}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{20},$$

где $n = E$ – собственное значение, или энергия данного состояния. Элементы ненормированной трансфер-матрицы являются конечными полиномами Лорана по переменным $z = e^{iu}$ и $z^{-1} = e^{-iu}$; степень полинома определяется значением N . Трансфер-матрицы образуют коммутирующие семейства с общим набором не зависящих от u собственных векторов. Следовательно, собственные значения также являются полиномами Лорана той же степени. Эти полиномы получаются с помощью численной диагонализации, а их нули – с помощью численной факторизации. В результате собственные значения характеризуются расположением и конфигурацией своих нулей на комплексной u -плоскости. Мы проводим анализ этих конфигураций в терминах (m, n) -систем для случая границы $(r, s) = (1, 1)$.

(m, n) -Системы и конфигурации нулей. Единственной важной полосой аналитичности на комплексной u -плоскости является полоса полной периодичности

$$\frac{\pi}{5} < \operatorname{Re} u < \frac{6\pi}{5}.$$

В случае наличия границы трансфер-матрица симметрична по отношению к комплексному сопряжению, поэтому достаточно изучить распределение нулей собственного значения в верхней полуплоскости. Нули образуют струны, а возбуждения описываются структурой струн в полосе аналитичности. Отметим здесь, что существуют четыре разных типа струн, которые мы называем “1-струны”, “короткие 2-струны”, “длинные 2-струны” и “вещественные 2-струны”. На рис. 1 представлен пример струнной структуры для некоторой типичной конфигурации нулей.

Рис. 1. Типичная конфигурация нулей собственного значения трансфер-матрицы. Длинной 2-струне отвечают жирные точки, короткой 2-струне – прозрачные точки, 1-струна (крестик) находится в центре полосы и наиболее удалена от вещественной оси, а вещественная 2-струна (звездочки) лежит на вещественной оси.

1-Струна нулей $u_j = 7\pi/10 + iy_j$ с вещественной частью $7\pi/10$ лежит в середине полосы аналитичности. Она появляется в случае границы $(r, s) = (1, 1)$ в фиксированном месте для всех собственных значений. Она возникает в некоторых секторах/границах модели, но не существует в других секторах. Каждая короткая 2-струна содержит пару нулей с вещественными частями $3\pi/5$ и $4\pi/5$ и с равными мнимыми частями, т. е. $u_j = 3\pi/5 + iy_j$ и $u_j = 4\pi/5 + iy_j$. Длинная 2-струна образована точками $u_j = \pi/5 + iy_j$ и $u_j = 6\pi/5 + iy_j$ с одинаковыми мнимыми частями. Нули длинной 2-струны лежат на краях полосы аналитичности вследствие периодичности. На самом деле, нули из каждой пары эквивалентны друг другу и отвечают одному нулю. Термин “длинная 2-струна” соответствует общей классификации моделей RSOS с более чем одной полосой аналитичности. Наконец, вещественная 2-струна состоит из пары нулей $u = \pi/2$ и $u = 9\pi/10$, лежащих на вещественной оси. Благодаря симметриям значения этих вещественных нулей являются точными при конечном N .

Структура струн описывается (m, n) -системами [47], [48]. Для нашей модели в секторе $(1, 1)$ мы имеем $2m + n = N/2 - 2$, где m – число коротких 2-струн, n – число длинных 2-струн, а N – четное число. В этом секторе всегда существует единственная 1-струна, наиболее удаленная от вещественной оси, и 2-струна, лежащая на вещественной оси. 1-Струна дает один ноль, как и вещественная 2-струна, ввиду симметрии верхней и нижней полуплоскостей. Кроме того, каждая короткая 2-струна дает два нуля, а каждая длинная 2-струна – только один ввиду периодичности. Следовательно, (m, n) -система описывает сохранение $2N$ нулей в полосе аналитичности. Заметим, что появление коротких 2-струн выражает наличие возбужденных

состояний, в основном состоянии короткие 2-струны отсутствуют и возникают только длинные 2-струны. Для конечных возбуждений m конечно, в то время как $n \sim N$ при $N \rightarrow \infty$.

Возбуждение со струнной структурой (m, n) характеризуется единственным набором квантовых чисел $I = (I_1, I_2, \dots, I_m)$, где целые числа $I_j \geq 0$ равны количеству длинных 2-струн, мнимые части которых больше мнимых частей y_j данной короткой 2-струны. Длинные 2-струны и короткие 2-струны с индексом $j = 1$ расположены ближе всего к вещественной оси. Их квантовые числа I_j удовлетворяют условию

$$n \geq I_1 \geq I_2 \geq \dots \geq I_m \geq 0.$$

Для приведенного на рис. 1 примера имеем $I_1 = 3$. Других квантовых чисел I_j при $m = 1$ не существует.

Для любой струнной структуры (m, n) самое низкое возбуждение наблюдается, когда все короткие 2-струны находятся дальше от вещественной оси, чем все длинные 2-струны. Это равносильно тому, что все $I_j = 0$. Смещение короткой 2-струны ближе к вещественной оси ниже длинной 2-струны увеличивает ее квантовое число на единицу и увеличивает энергию.

3.2. Непрерывный скейлинговый предел. В непрерывном скейлинговом пределе, когда четное число $N \rightarrow \infty$, расположение нулей становится плотнее. Мы обнаружили, что мнимые части наиболее удаленных от вещественной оси нулей растут, как $(2 \ln N)/5$, поэтому расстояние между нулями стремится к нулю, как $(2 \ln N)/5N$. Состояния с конечной энергией при больших N имеют структуру нулей, подобную изображенной на рис. 2. Обозначим через α мнимую часть 1-струны, а через β_j – мнимые части коротких 2-струн. Число коротких 2-струн конечно. Величины α , β_j и мнимые части самых дальних от вещественной оси длинных 2-струн в непрерывном скейлинговом пределе изменяются по закону $(2 \ln N)/5$.

4. УРАВНЕНИЯ КРИТИЧЕСКОГО ТАБ

4.1. Критический ТАБ. Уравнения критического ТАБ для нашей модели получаются путем решения функционального уравнения

$$t(u)t(u + \lambda) = 1 + t(u + 3\lambda), \quad (2)$$

при этом используется аналитическая структура функции $t(u)$, которая в соответствии с поведением системы при большом объеме факторизуется как

$$t(u) = f(u)g(u)l(u),$$

где по порядку величины $\ln f(u) \sim N$, $\ln g(u) \sim 1$ и $\ln l(u) \sim 1/N$. Член главного порядка удовлетворяет уравнению $f(u)f(u + \lambda) = 1$ и содержит нули и полюсы порядка N нормировочного множителя. Функция $g(u)$ удовлетворяет аналогичному соотношению $g(u)g(u + \lambda) = 1$ и отвечает за зависящие от границы нули и полюсы первого порядка. Оставшаяся функция $l(u)$, связанная с конечным размером системы, находится из соответствующего интегрального уравнения.

Рис. 2. Типичная конфигурация нулей собственного значения в секторе (1,1) при больших значениях N .

Энергию состояний можно вычислить из поправок, связанных с конечным размером, для собственных значений трансфер-матрицы дублированной строки:

$$\ln t(u) = \ln f(u) + \ln g(u) - \frac{i}{N} (e^{-5iu/2} E^+ - e^{5iu/2} E^-),$$

где конформные энергии системы конечного размера имеют экспоненциальный вид,

$$E = e^{-5iu/2} E^+ - e^{5iu/2} E^-,$$

при этом первое слагаемое преобладает в пределе $u \rightarrow +i\infty$, а второе – в пределе $u \rightarrow -i\infty$.

С учетом уравнения (2) находим, что

$$t(u)t\left(u + \frac{2\pi}{5}\right) = 1 + t\left(u + \frac{9\pi}{5}\right).$$

Используя периодичность трансфер-матрицы, а именно равенство $t(u) = t(u + \pi)$, после соответствующего сдвига переменных получаем функциональное уравнение

$$t\left(u - \frac{\pi}{5}\right)t\left(u + \frac{\pi}{5}\right) = 1 + t(u). \quad (3)$$

Условие нормировки требует наличия нулей порядка N (где, напомним, N – четное число) в точках $\pi/5$ и $6\pi/5$ и полюсов порядка N в точках $3\pi/5$ и $4\pi/5$. Их нужно нормировать с помощью функции $f(u)$, которая имеет следующий вид, совместный с аналитической структурой функции $t(u)$:

$$f(u) = \left(-\frac{\sin(\frac{5u}{4} - \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{5u}{4} + \frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{5u}{4} - \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{5u}{4} + \frac{\pi}{2})} \right)^N = \left(\frac{\cos(\frac{5u}{2} + \frac{\pi}{4}) + \cos \frac{\pi}{4}}{\cos(\frac{5u}{2} + \frac{\pi}{4}) - \cos \frac{\pi}{4}} \right)^N.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$f\left(u - \frac{\pi}{5}\right)f\left(u + \frac{\pi}{5}\right) = 1$$

и полученному ранее уравнению $f(u)f(u + \lambda) = 1$.

В термодинамическом пределе мнимые части нулей струны, наиболее удаленной от вещественной оси в плоскости переменной u , стремятся к бесконечности, как $(2 \ln \kappa N)/5$, причем $\kappa = 4 \sin(\pi/4) = 2\sqrt{2}$. Следовательно, можно задать вещественную переменную x как вертикальную координату вдоль центра полосы аналитичности:

$$u = \frac{7\pi}{10} + \frac{2ix}{5}.$$

Функциональное уравнение (3) в терминах новой переменной x принимает вид

$$t\left(x - i\frac{\pi}{2}\right)t\left(x + i\frac{\pi}{2}\right) = 1 + t(x), \quad (4)$$

а функция $f(u)$ записывается как

$$f(x) = \left(\frac{\operatorname{ch} x + \cos \frac{\pi}{4}}{\operatorname{ch} x - \cos \frac{\pi}{4}} \right)^N$$

и удовлетворяет функциональному уравнению

$$f\left(x - i\frac{\pi}{2}\right)f\left(x + i\frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad (5)$$

Граничная нормировка требует наличия нуля второго порядка в точке $u = \lambda/2 = \pi/5$ и полюсов в точках $u = -\lambda/2 + \pi = 4\pi/5$ и $u = 3\lambda/2 = 3\pi/5$. В силу зависимости от аргумента $2u$ период функций порядка единицы равен $\pi/2$. Таким образом, имеется ноль второго порядка в точке $u = 7\pi/10$ и полюсы в точках $u = 3\pi/10$ и $u = 11\pi/10$. Наконец, условие существования вещественной 2-струны дает пару нулей в точках $\pi/2$ и $9\pi/10$.

Для того чтобы обеспечить указанные нули и полюсы, зададим функцию $g(u)$ в виде

$$g(u) = \frac{\operatorname{tg}^2(\frac{5u}{4} - \frac{\pi}{4})\operatorname{tg}^2(\frac{5u}{4} - \frac{7\pi}{8})\operatorname{tg}(\frac{5u}{4} - \frac{5\pi}{8})\operatorname{tg}(\frac{5u}{4} - \frac{9\pi}{8})}{\operatorname{tg} \frac{5u}{4} \operatorname{tg}(\frac{5u}{4} - \frac{3\pi}{4})}.$$

Переходя к переменной x , получаем

$$g(x) = \frac{\operatorname{tg}^2(\frac{ix}{2} + \frac{5\pi}{8})\operatorname{tg}^2(\frac{ix}{2})\operatorname{tg}(\frac{ix}{2} + \frac{\pi}{4})\operatorname{tg}(\frac{ix}{2} - \frac{\pi}{4})}{\operatorname{tg}^2(\frac{ix}{2} + \frac{7\pi}{8})\operatorname{tg}(\frac{ix}{2} + \frac{\pi}{8})}.$$

Функция $g(u)$ удовлетворяет функциональному соотношению

$$g\left(u - \frac{\pi}{5}\right)g\left(u + \frac{\pi}{5}\right) = 1,$$

которое эквивалентно

$$g\left(x - i\frac{\pi}{2}\right)g\left(x + i\frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad (6)$$

Член g порядка единицы для модели с границей появляется в решеточном ТАБ, но не вносит явного вклада в энергию. Благодаря симметрии относительно вещественной оси (комплексного сопряжения переменной u) переменные масштабируются, примерно как $\ln \kappa N$, и исчезают в скейлинговом пределе.

Квантовые состояния. Чтобы найти квантовые состояния и соответствующие критические уравнения ТАБ, нужно решить функциональное уравнение (3). Для этого нужно удостовериться в том, что функция $l(x)$ аналитична и отлична от нуля в полосе аналитичности, и что ее логарифм в асимптотике $x \rightarrow \pm\infty$ ведет себя, как константа. Это можно показать, описывая собственные значения трансфер-матрицы с помощью распределения их нулей в полосе аналитичности $\pi/5 < u < 6\pi/5$. Длинные 2-струны находятся на границах полосы аналитичности и сгущаются в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$, тем самым они определяют границы полосы аналитичности в точках $\pi/5$ и $6\pi/5$.

В секторе $(1, 1)$ 1-струна, состоящая из одного нуля, появляется в центре полосы, она наиболее удалена от вещественной оси и расположена симметрично в верхней и нижней полуплоскостях переменной u . Ее положение всегда задается как $u_0 = 7\pi/10 + i\alpha$. Короткие 2-струны соответствуют конечным возбуждениям над основным состоянием, их вещественные части всегда равны $3\pi/5$ и $4\pi/5$,

$$u_j = \begin{cases} \frac{3\pi}{5} + i\beta_j, \\ \frac{4\pi}{5} + i\beta_j. \end{cases}$$

В термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ полученные нули в скейлинговых областях, наиболее удаленных от вещественной оси, стремятся к бесконечности в верхней и нижней полуплоскостях, как

$$\alpha = \frac{2}{5}(\pm \ln \kappa N + \tilde{\alpha}^\mp), \quad \beta_j = \frac{2}{5}(\pm \ln \kappa N + \tilde{\beta}_j^\mp).$$

Переходя к переменной $x = \frac{5}{2i}(u - \frac{7\pi}{10})$, получаем, что нули 1-струны локализуются в точках

$$x_0^\pm = \frac{5\alpha}{2} = \pm \ln \kappa N + \tilde{\alpha}^\mp, \quad (7)$$

тогда как нули коротких 2-струн находятся в точках

$$\left(x_j^\pm + \frac{i\pi}{4}, x_j^\pm - \frac{i\pi}{4}\right), \quad x_j^\pm = \pm \ln \kappa N + \tilde{\beta}_j^\mp. \quad (8)$$

Оставшаяся задача – преобразование функционального уравнения в интегральное уравнение ТАБ, которое можно решить с помощью преобразования Фурье в непрерывном скейлинговом пределе. Чтобы получающиеся функции были аналитичны, отличны от нуля, выходили на постоянную асимптотику на бесконечности и не имели нулей и полюсов в полосе $-\pi/2 \leq \text{Im } x \leq \pi/2$, введем подходящие функции, которые устраняют нули 1-струны и короткой 2-струны. Функция

$$\sigma_0 = \text{tg}\left(\frac{5u}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$$

удаляет ноль 1-струны, а функция

$$\sigma_1 = -\operatorname{tg} \frac{5u}{4} \operatorname{tg} \left(\frac{5u}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\cos(\frac{5u}{2} + \frac{\pi}{4}) - \cos \frac{\pi}{4}}{\cos(\frac{5u}{2} + \frac{\pi}{4}) + \cos \frac{\pi}{4}}$$

устраняет два нуля коротких 2-струн. Эти функции, выраженные через переменную x , определяются выражениями

$$\sigma_0 = \operatorname{th} \frac{x}{2}, \quad \sigma_1 = \frac{\operatorname{ch} x - \cos \frac{\pi}{4}}{\operatorname{ch} x + \cos \frac{\pi}{4}} \quad (9)$$

и удовлетворяют уравнениям

$$\sigma_0 \left(x - \frac{i\pi}{2} \right) \sigma_0 \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) = 1, \quad \sigma_1 \left(x - \frac{i\pi}{2} \right) \sigma_1 \left(x + \frac{i\pi}{2} \right) = 1.$$

Следовательно, соответствующая параметризация собственного значения нормированной трансфер-матрицы имеет вид

$$t(x) = f(x)g(x) \prod_{\nu=\pm} \sigma_0(x - x'_0) \prod_{j=1}^M \sigma_1(x - x'_j) l(x),$$

где M – число коротких 2-струн в полюсе для заданного возбужденного состояния.

Используя функциональное уравнение (4), а также уравнения (5) и (6) для функций $f(x)$ и $g(x)$, получаем уравнение

$$l \left(x - i \frac{\pi}{2} \right) l \left(x + i \frac{\pi}{2} \right) = 1 + t(x). \quad (10)$$

Построив все необходимые функции, заметим, что $l(x)$ аналитична и отлична от нуля в полосе аналитичности, а ее логарифм имеет постоянную асимптотику при $x \rightarrow \pm\infty$. Взяв логарифм от обеих частей уравнения (10) и решив его с помощью фурье-преобразования производных $[\ln l(x)]'$, получим

$$\ln l(x) = -\varphi \star \ln[1 + t(x)],$$

где свертка $\star$ определяется формулой

$$(f \star g)(x) = (g \star f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy,$$

а функция φ задана своим фурье-образом $\hat{\varphi}$:

$$\hat{\varphi}(k) = -\frac{1}{e^{k\pi/2} + e^{-k\pi/2}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{\varphi}(k) e^{ikx}.$$

Отсюда, следуя процедуре, изложенной в работе [21], получаем $\varphi(x) = 1/(2\pi \operatorname{ch} x)$. В общем случае ядро $\varphi(x)$ связано с двухчастичной S -матрицей соответствующей непрерывной модели, но явный вид этой S -матрицы пока неизвестен.

Возвращаясь к $t(x)$, получим для граничных условий $(1, 1)$ критическое уравнение ТАБ на решетке:

$$\ln t(x) = \ln f(x) + \ln g(x) + \sum_{\nu=\mp} \ln \sigma_0(x - x_0^\nu) + \sum_{j=1}^M \ln \sigma_1(x - x_j^\pm) - \varphi \star \ln[1 + t(x)].$$

Параметры $x_l = \{x_0^\pm, x_j^\pm\}$ возбужденного состояния самосогласованно определяют тем, что они являются нулями трансфер-матрицы, $t(x) = -1$ при $x = x_l \pm i\pi/2$. В непрерывном скейлинговом пределе при $N \rightarrow \infty$ функция $f(x)$ обладает нетривиальным поведением в двух скейлинговых областях $x \sim \pm \ln \kappa N$. Тогда две скейлинговые функции можно ввести так:

$$e^{\epsilon^\mp(x)} = \lim_{N \rightarrow \infty} t(x \pm \ln \kappa N).$$

Поведение функции $f(x)$ в скейлинговых областях важно для нас, и в данном скейлинговом пределе получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln f(x \pm \ln \kappa N) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \ln \left(1 + \frac{e^{\mp x}}{N} \right) = e^{\mp x}.$$

Интересно отметить, что функция $g(x)$ стремится к единице, примерно как $\ln \kappa N$, следовательно, она не вносит вклад в последующие уравнения ТАБ и не входит в явном виде в энергию. Это приводит к безмассовым уравнениям ТАБ для модели с границей:

$$\epsilon^\mp(x) = e^{\mp x} + \sum_{\nu=\mp} \ln \sigma_0(x - \tilde{\alpha}^\nu) + \sum_{j=1}^M \ln \sigma_1(x - \tilde{\beta}_j^\mp) - \varphi \star \ln(1 + e^{\epsilon^\mp(x)}).$$

Положение нулей $\tilde{\alpha}^\mp$ и $\tilde{\beta}_j^\mp$ определяется уравнениями (7) и (8).

Состояние с наименьшей энергией, которое можно назвать основным состоянием сектора $(1, 1)$, не имеет коротких струн, отвечающих наличию возбуждений. Следовательно, $\sigma_1(x) \rightarrow 1$ и не появляется в уравнениях, так что при наличии границ соответствующее безмассовое уравнение ТАБ для состояния с наименьшей энергией в этом секторе имеет вид

$$\epsilon^\mp(x) = e^{\mp x} + \sum_{\nu=\mp} \ln \sigma_0(x - \tilde{\alpha}^\nu) - \varphi \star \ln(1 + e^{\epsilon^\mp(x)}).$$

4.2. Энергии. Энергии возбужденных состояний в системах конечного размера можно определить из $\ln l(x)$ и уравнений (9). Формула для энергии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} (e^x E^+ + e^{-x} E^-) &= \sum_{\nu=\pm} \ln \sigma_0(x - x_0^\nu) + \sum_{j=1}^M \ln \sigma_1(x - x_j^\pm) - \ln l(x) = \\ &= \sum_{\nu=\pm} \ln \sigma_0(x - x_0^\nu) + \sum_{j=1}^M \ln \sigma_1(x - x_j^\pm) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} \varphi(x - y) \ln(1 + e^{\epsilon^\mp(y)}). \end{aligned}$$

При соответствующем скейлинге бесконечного размера области $x \sim \pm \ln \kappa N$ мы находим, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \kappa N \varphi(x - \ln \kappa N) = -e^x,$$

и это позволяет получить E^+ и E^- :

$$E^\pm = \sum_i e^{\pm \tilde{\gamma}_i^\pm} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} e^{\mp y} \ln(1 + e^{\epsilon^\pm(y)}),$$

где $\tilde{\gamma}_i^\pm$ равно либо $\tilde{\alpha}^\pm$, либо $\tilde{\beta}_j^\pm$, а индекс i пробегает значения $\pm, 1, \dots, M$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе проведен анализ нетривиальной релятивистской интегрируемой теории, а именно граничной модели $\mathcal{M}(3, 5)$, с точки зрения решеточных моделей в секторе $(r, s) = (1, 1)$. Данная нетривиальная неунитарная минимальная модель дуальна модели Ли–Янга. В непрерывном скейлинговом пределе решена модель A_4 RSOS Форрестера–Бакстера с тригонометрическими весами. Описана структура нулей собственных значений соответствующей трансфер-матрицы дублированной строки. Эти нули непосредственно связаны с RSOS-траекториями на решетке. В дополнение к предыдущим работам [21], [22], посвященным решению модели Ли–Янга $\mathcal{M}(2, 5)$, мы применили аналогичный подход к анализу нашей модели. Однако модель конформной теории поля при наличии границы не решена полностью, что препятствует проведению прямого сравнения состояний Вирасоро с конфигурационными траекториями, а также с соответствующими уравнениями ТАБ со стороны непрерывной теории.

Для критической теории с интегрируемой границей трансфер-матрица удовлетворяет той же самой универсальной Y -системе, что и в работе [49]. Уравнения ТАБ в непрерывном скейлинговом пределе описывают спектры системы конечного размера для модели $\mathcal{M}(3, 5)$. Остальные секторы этого случая с границей аналогичны с точки зрения структуры нулей с тем единственным отличием, что некоторые из них содержат фиксированный нуль в центре полосы аналитичности, а другие секторы не содержат.

Для определения спектра модели можно применить решеточный подход к интегрируемой теории рассеяния. В дальнейшем это, возможно, позволит также исследовать такие интересные и важные физические величины, как вакуумные средние и формфакторы. Эти величины можно получить в рамках подхода бутстрапа, и они известны для модели Ли–Янга [8], [50], но еще не получены для модели $\mathcal{M}(3, 5)$. Дальнейшие исследования предполагают изучение критической и массивной модели $\mathcal{M}(3, 5)$ с использованием подхода бутстрапа и нахождение их матриц рассеяния, отражения и перехода в различных геометриях, а также соответствующих им вакуумных средних и формфакторов. Также представляет интерес исследование других неунитарных моделей с помощью решеточной RSOS-модели и подхода бутстрапа.

Благодарности. Я хотел бы выразить благодарность физическому факультету Beirut Arab University за поддержку в выполнении работы. Советы Майи Джалул относительно пакета LaTeX и рисунков также были полезны для представления работы в ее настоящем виде.

Список литературы

- [1] C. N. Yang, “Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction”, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:23 (1967), 1312–1315.
- [2] C. N. Yang, C. P. Yang, “Thermodynamics of a one-dimensional system of bosons with repulsive delta function interaction”, *J. Math. Phys.*, **10**:7 (1969), 1115–1122.
- [3] Al. B. Zamolodchikov, “Thermodynamic Bethe ansatz in relativistic models: Scaling 3-state Potts and Lee–Yang models”, *Nucl. Phys. B*, **342**:3 (1990), 695–720.
- [4] Al. B. Zamolodchikov, “Thermodynamic Bethe ansatz for RSOS scattering theories”, *Nucl. Phys. B*, **358**:3 (1991), 497–523.
- [5] Al. B. Zamolodchikov, “From tricritical Ising to critical Ising by thermodynamic Bethe ansatz”, *Nucl. Phys. B*, **358**:3 (1991), 524–546.
- [6] Al. B. Zamolodchikov, “TBA equations for integrable perturbed $SU(2)_k \times SU(2)_l / SU(2)_{k+l}$ coset models”, *Nucl. Phys. B*, **366**:1 (122–132), 1991.
- [7] P. Dorey, R. Tateo, “Excited states by analytic continuation of TBA equations”, *Nucl. Phys. B*, **482**:3 (1996), 639–659.
- [8] Z. Bajnok, O. el Deeb, “Form factors in the presence of integrable defects”, *Nucl. Phys. B*, **832**:3 (2010), 500–519.
- [9] T. D. Lee, C. N. Yang, “Statistical theory of equations of state and phase transitions. I. Theory of condensation”, *Phys. Rev.*, **87**:3 (1952), 404–409; “Statistical theory of equations of state and phase transitions II. Lattice gas and Ising model”, 410–419.
- [10] P. A. Pearce, A. Klümper, “Finite-size corrections and scaling dimensions of solvable lattice models: an analytic method”, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:8 (1991), 974–977.
- [11] A. Klümper, P. A. Pearce, “Analytic calculation of scaling dimensions: tricritical hard squares and critical hard hexagons”, *J. Stat. Phys.*, **64**:1–2 (1991), 13–76.
- [12] A. Klümper, P. A. Pearce, “Conformal weights of RSOS lattice models and their fusion hierarchies”, *Phys. A*, **183**:3 (1992), 304–350.
- [13] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.
- [14] D. L. O’Brien, P. A. Pearce, S. O. Warnaar, “Analytic calculation of conformal partition functions: tricritical hard squares with fixed boundaries”, *Nucl. Phys. B*, **501**:3 (1997), 773–799.
- [15] P. A. Pearce, L. Chim, C. Ahn, “Excited TBA equations I: massive tricritical Ising model”, *Nucl. Phys. B*, **601**:3 (2001), 539–568, arXiv: hep-th/0012223.
- [16] P. A. Pearce, L. Chim, C. Ahn, “Excited TBA equations II: massless flow from tricritical to critical Ising model”, *Nucl. Phys. B*, **660**:3 (2003), 579–606.
- [17] C. Destri, H. J. de Vega, “New thermodynamic Bethe ansatz equations without strings”, *Phys. Rev. Lett.*, **69**:16 (1992), 2313–2317.
- [18] C. Destri, H. J. de Vega, “Non-linear integral equation and excited states scaling functions in the sine-Gordon model”, *Nucl. Phys. B*, **504**:3 (1997), 621–664.
- [19] D. Fioravanti, A. Mariottini, E. Quattrini, F. Ravanini, “Excited state Destri–De Vega equation for Sine-Gordon and restricted Sine-Gordon models”, *Phys. Lett. B*, **390**:1–4 (1997), 243–251.
- [20] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory”, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [21] Z. Bajnok, O. el Deeb, P. A. Pearce, “Finite-volume spectra of the Lee–Yang model”, *JHEP*, **04** (2015), 073, 43 pp.
- [22] O. el Deeb, *Lee–Yang model in presence of defects*, arXiv: 1502.03976.
- [23] A. LeClair, G. Mussardo, H. Saleur, S. Skorik, “Boundary energy and boundary states in integrable quantum field theories”, *Nucl. Phys. B*, **453**:3 (1995), 581–618.

- [24] P. Dorey, A. J. Pocklington, R. Tateo, G. Watts, “TBA and TCSA with boundaries and excited states”, *Nucl. Phys. B*, **525**:3 (1998), 641–663.
- [25] P. Dorey, I. Runkel, R. Tateo, G. Watts, “g-Function flow in perturbed boundary conformal field theories”, *Nucl. Phys. B*, **578**:1–2 (2000), 85–122.
- [26] Z. Bajnok, Zs. Simon, “Solving topological defects via fusion”, *Nucl. Phys. B*, **802**:3 (2008), 307–329.
- [27] D. A. Huse, “Exact exponents for infinitely many new multi critical points”, *Phys. Rev. B*, **30**:7 (1984), 3908–3915.
- [28] H. Riggs, “Solvable lattice models with minimal and non unitary critical behavior in two dimensions”, *Nucl. Phys. B*, **326**:3 (1989), 673–688.
- [29] G. E. Andrews, R. J. Baxter, P. J. Forrester, “Eight-vertex SOS model and generalized Rogers–Ramanujan-type identities”, *J. Stat. Phys.*, **35**:3–4 (1984), 193–266.
- [30] P. J. Forrester, R. J. Baxter, “Further exact solutions of the eight-vertex SOS model and generalizations of the Rogers–Ramanujan identities”, *J. Stat. Phys.*, **38**:3–4 (1985), 435–472.
- [31] G. Feverati, P. A. Pearce, F. Ravanini, “Exact $\phi_{1,3}$ boundary flows of the tricritical Ising model”, *Nucl. Phys. B*, **675**:3 (2003), 469–515.
- [32] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1963.
- [33] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer Science and Business Media, New York, 2012.
- [34] R. J. Baxter, “Hard hexagons: exact solution”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **13**:3 (1980), L61–L70.
- [35] R. J. Baxter, P. A. Pearce, “Hard hexagons: interfacial tension and correlation length”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **15**:3 (1982), 897–910.
- [36] R. J. Baxter, P. A. Pearce, “Hard squares with diagonal attractions”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**:10 (1983), 2239–2255.
- [37] H. W. J. Blöte, J. L. Cardy, M. P. Nightingale, “Conformal invariance, the central charge, and universal finite-size amplitudes at criticality”, *Phys. Rev. Lett.*, **56**:7 (1986), 742–745.
- [38] Yu. G. Stroganov, “A new calculation method for partition functions in some lattice models”, *Phys. Lett. A*, **74**:1–2 (1979), 116–118.
- [39] R. J. Baxter, “The inversion relation method for some two-dimensional exactly solved models in lattice statistics”, *J. Stat. Phys.*, **28**:1 (1982), 1–41.
- [40] D. L. O’Brien, P. A. Pearce, “Surface free energies, interfacial tensions and correlation lengths of the ABF models”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:7 (1997), 2353–2366.
- [41] R. E. Behrend, P. A. Pearce, D. L. O’Brien, “Interaction-round-a-face models with fixed boundary conditions: The ABF fusion hierarchy”, *J. Stat. Phys.*, **84**:1–2 (1996), 1–48.
- [42] R. E. Behrend, P. A. Pearce, “Integrable and conformal boundary conditions for $\widehat{sl}(2)$ A – D – E lattice models and unitary minimal conformal field theories”, *J. Stat. Phys.*, **102**:3–4 (2001), 577–640.
- [43] O. Foda, T. A. Welsh, “On the combinatorics of Forrester–Baxter models”, *Physical Combinatorics* (Kyoto, Japan, January 29 – February 2, 1999), Progress in Mathematics, **191**, eds. M. Kashiwara, T. Miwa, Birkhäuser, Boston, MA, 2000, 49–103.
- [44] G. Feverati, P. A. Pearce, N. S. Witte, “Physical combinatorics and quasiparticles”, *J. Stat. Mech.*, **2009**:10 (2009), P10013, 54 pp.
- [45] R. J. Baxter, “Corner transfer matrices of the eight-vertex model I. Low temperature expansions and conjectured properties”, *J. Stat. Phys.*, **15**:6 (1976), 485–503.
- [46] R. J. Baxter, “Corner transfer matrices of the eight-vertex model II. The Ising model case”, *J. Stat. Phys.*, **17**:1 (1977), 1–14.

- [47] E. Melzer, “Fermionic character sums and the corner transfer matrix”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **9**:7 (1994), 1115–1136.
- [48] A. Berkovich, “Fermionic counting of RSOS states and Virasoro character formulas for the unitary minimal series $M(v; v + 1)$: exact results”, *Nucl. Phys. B*, **431**:1–2 (1994), 315–348.
- [49] C. H. O. Chui, C. Mercat, P. A. Pearce, “Integrable boundaries and universal TBA functional equations”, *MathPhys Odyssey 2001. Integrable Models and Beyond. In Honor of Barry M. McCoy*, Progress in Mathematical Physics, **23**, eds. M. Kashiwara, T. Miwa, Birkhäuser, Boston, MA, 2002, 391–413, arXiv: hep-th/0108037.
- [50] Z. Bajnok, F. Buccheri, L. Hollo, J. Konczer, G. Takacs, “Finite volume form factors in the presence of integrable defects”, *Nucl. Phys. B*, **882** (2014), 501–531.

Поступила в редакцию 3.05.2016