Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. В. Унгву, Ф. А. Доса, Г. И. Авосву, Биортогональная квантовая механика для неэрмитовых многомодовой и многофотонной моделей Джейнса–Каммингса, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 1, 66–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9221>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 11:51:27

© 2017 г. Ж. В. Унгву*, Ф. А. Доса[†], Г. И. Х. Авосву*

БИОРТОГОНАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ НЕЭРМИТОВЫХ МНОГОМОДОВОЙ И МНОГОФОТОННОЙ МОДЕЛЕЙ ДЖЕЙНСА–КАММИНГСА

Сформулирован биортогональный формализм для неэрмитовых многомодовой и многофотонной моделей Джейнса–Каммингса. Определены суперсимметричные генераторы данных моделей, которые особенно удобны при диагонализации гамильтонианов. Гамильтониан и сопряженный оператор выражены с помощью суперсимметричных генераторов, удовлетворяющих свойствам супералгебры Ли. Метод состоит в применении оператора одевания–подобия, результат действия которого лежит в подходящих пространствах даже при диагонализации гамильтониана в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Таким образом, становится возможным решить задачу на собственные значения гамильтониана и присоединенного оператора. Для каждой модели собственные значения являются действительными числами, в то время как собственные состояния не образуют набор ортогональных векторов. Для создания согласованной теории вводится биортогональный формализм.

Ключевые слова: неэрмитовы многомодовый и многофотонный гамильтонианы Джейнса–Каммингса, супералгебра Ли, преобразования подобия, биортогональная квантовая механика.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9221>

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая механика наблюдаемых естественным образом ведет к эрмитовости, так как эрмитовы операторы соответствуют действительным собственным значениям и ортогональным собственным состояниям. Более того, вероятностная интерпретация квантовой теории требует эрмитовости квантовых степеней свободы

Ж. В. Унгву благодарит “Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique” республики Бенин за финансовую поддержку.

*Laboratoire de Recherche en Physique Théorique, Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Université de Porto-Novo, Porto-Novo, Rep. du Bénin.
E-mail: jeanvignonhoung@yahoo.fr, gabriel.avossevou@imsp-uac.org

[†]Faculté des Sciences et Techniques, Université des Sciences, Arts et Techniques de Natitingou, Rep. du Bénin. E-mail: finedofas@yahoo.fr

физических наблюдаемых, особенно тех, которые генерируют динамику, например гамильтониана, унитарных движений. Тем не менее существуют физически наблюдаемые явления, которые нельзя описать эрмитовыми операторами; это имеет место, например, в случае резонансных явлений, которые могут быть описаны неэрмитовыми операторами [1]–[3]. Таким образом, традиционная теория эрмитовых операторов была расширена до формализма, направленного также на решения для неэрмитовых операторов. Типичным примером являются работы Шольца с соавторами [4], [5], основанные на введении нетривиальной метрики в гильбертовом пространстве, в которой самосопряженные операторы определяются по отношению к этой метрике. Более того, существует соотношение между РТ-симметричными и неэрмитовыми гамильтонианами, и в некоторых работах был продолжен процесс построения полного набора собственных состояний в соответствии с данным соотношением (см., например, [6]–[9]). В процессе этих исследований уже появилась идея биортогональной квантовой механики. Недавно вышла работа Броди [10], в которой для конечномерных гильбертовых пространств автор формулирует свойства биортогональной квантовой механики. Позже в данной области были опубликованы несколько работ Багарелло с соавторами [11]–[15]. Например, в статье [14] авторами изучается система в бесконечномерном гильбертовом пространстве, отвечающая одномодовой неэрмитовой модели Джейнса–Каммингса (ДК), описывающей открытую систему “атом–поле” в квантовой оптике. В книге [15] представлен современный обзор по данной теме, демонстрирующий ее популярность. Также стоит обратить внимание на важные работы [16]–[18], особенно ввиду точного определения соответствующих составных операторов. Указанные работы безусловно способствовали тому, что биортогональная квантовая механика стала применяться при диагонализации неэрмитовых операторов.

Популярный гамильтониан ДК занимает особое место среди моделей, описывающих взаимодействие в системе “атом–фотон”. Он был диагонализирован несколько десятилетий назад пионерами данной области (см. работу Карбонаро и др. [19]). Этот гамильтониан описывает систему двухуровневого атома с излучением. Многие квантовые эффекты, такие как квантовый коллапс и возрождение атомной инверсии, антигруппировка фотонов, сжатие поля излучения, безинверсионное усиление светового пучка, электромагнитно индуцированная прозрачность и т. д., моделируются при помощи гамильтониана ДК [20]–[23]. Изучались также многие обобщения, представляющие с физической точки зрения такой же интерес, как и модель ДК. Например, энigmatическая модель Раби [24], [25], которая до сих пор не имеет точного аналитического решения, а также ее многомодовые и многофотонные расширения, как известно, сводятся к соответствующим моделям ДК в терминах пределов ашпроксимации вращающейся волны. Интерес к диагонализации таких гамильтонианов усилился при появлении суперсимметричного метода и при его применении к анализу уровней энергии систем в квантовой механике [26], [27]. Например, Фань и Ли [28], [29] обнаружили стандартные суперсимметричные генераторы моделей ДК и, таким образом, создали алгоритм диагонализации гамильтонианов ДК на языке суперсимметрии.

В настоящей работе рассматриваются две обобщенные неэрмитовы модели ДК, обе связаны с многомодовыми и многофотонными процессами. В то время как в случае многофотонной модели ДК, связанной с двумя излучающими атомами, атом-

ные переходы задаются поглощением и испусканием не одного, а многих фотонов, в многомодовой модели ДК обмен фотонами происходит между k модами ($k \geq 1$). Насколько нам известно, ни в одной статье нет строгого аналитического решения для многомодового процесса. В настоящей статье для каждой модели приведены решения для спектра энергии и собственных состояний, полученные с помощью применения особого оператора одевания–подобия.

Собственные состояния каждого гамильтониана не образуют ортогональную систему. Так как собственные состояния гамильтониана и его эрмитово сопряженного не одинаковы, несмотря на то что спектры энергии совпадают и действительны, идея применения формализма биортогональной квантовой механики по умолчанию актуальна. Таким образом, полученный набор собственных векторов образует полную систему биортонормальных состояний.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приведен спектр неэрмитовой многомодовой модели ДК и сопряженной к ней при помощи операторов одевания–подобия. Далее строится формализм биортогональной квантовой механики для данной модели. В разделе 3 мы изучаем неэрмитову многофотонную модель ДК и формулируем подходящий биортогональный базис для данной модели, следуя схожему методу диагонализации, который используется для неэрмитовой многомодовой модели ДК. Раздел 4 содержит заключительные выводы.

2. НЕЭРМИТОВА МНОГОМОДОВАЯ МОДЕЛЬ ДК

2.1. Описание модели. Далее мы будем считать $\hbar = 1$. Гамильтониан, описывающий многомодовую квантовую модель ДК, формально задается следующим образом:

$$\mathbb{H} = \omega(a^\dagger a + b^\dagger b) \otimes \mathbb{1} + \Delta \sigma_z + \alpha a^k b^k \otimes \sigma_+ + \beta (a^\dagger)^k (b^\dagger)^k \otimes \sigma_- . \quad (1)$$

Здесь α и β , $\alpha \neq \beta$, – любые действительные числа, число k фиксировано для данной модели и принимает значения в наборе $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{1}$ обозначает единичную матрицу размера 2×2 , Δ – частота перехода с одного уровня на другой, $a^\dagger$, $b^\dagger$ (a , b) – операторы рождения (уничтожения) для поля излучения, подчиняющиеся следующим невырожденным коммутационным соотношениям:

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [b, b^\dagger] = 1. \quad (2)$$

Операторы спина Паули определены как

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

и подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$[\sigma_z, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm. \quad (4)$$

Описанная выше модель связана с несколькими физическими системами в двумерном пространстве. Так как операторы спина (фермионные операторы) ограничены,

бозонные квантовые переменные, т. е. операторы рождения и уничтожения, в конфигурационных пространствах, соответствующих таким физическим системам, могут иметь подходящие дифференциальные представления, подчиняясь каноническим правилам квантования. Таким образом, они будут определять неограниченные операторы, область определения которых должна быть плотна в гильбертовом пространстве.

Действительно, в данной работе приходится использовать формализм, основанный на дуальных скобках. Так как в работе рассматриваются бесконечномерные пространства, мы ограничиваемся в дальнейшем пополнением пространства, порожденного собственными векторами оператора, т. е. пространства, плотного в гильбертовом пространстве. Таким образом, возникают базы гильбертова типа [30].

Хорошо известно, что неэрмитовы гамильтонианы РТ-симметричны, а модель, заданная гамильтонианом (1), не противоречит данному правилу. Действительно, возможно реализовать РТ-операции следующим образом [31]:

$$\begin{aligned} a &\rightarrow -a, & b &\rightarrow -b, & a^\dagger &\rightarrow -a^\dagger, & b^\dagger &\rightarrow -b^\dagger, \\ \sigma_3 &\rightarrow \sigma_3, & \sigma_+ &\rightarrow \sigma_+, & \sigma_- &\rightarrow \sigma_-, \end{aligned} \quad (5)$$

что приводит к следующему представлению гамильтониана (1):

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^{\text{PT}} &= \omega[(-a^\dagger)(-a) + (-b^\dagger)(-b)] \otimes \mathbb{1} + \Delta\sigma_3 + \\ &+ \alpha[(-a)^k(-b)^k] \otimes \sigma_+ + \beta[(-a^\dagger)^k(-b^\dagger)^k] \otimes \sigma_-, \end{aligned} \quad (6)$$

которое можно переписать как

$$\mathbb{H}^{\text{PT}} = \omega(a^\dagger a + b^\dagger b) \otimes \mathbb{1} + \Delta\sigma_3 + \alpha a^k b^k \otimes \sigma_+ + \beta (a^\dagger)^k (b^\dagger)^k \otimes \sigma_-. \quad (7)$$

Таким образом, убеждаемся, что

$$\mathbb{H} \equiv \mathbb{H}^{\text{PT}}. \quad (8)$$

Чтобы подчеркнуть суперсимметричные свойства модели, введем следующие операторы:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= a^\dagger a \otimes \mathbb{1} + \frac{1}{2}(k\mathbb{1} + \sigma_3) = \begin{pmatrix} a^\dagger a + \frac{k+1}{2} & 0 \\ 0 & aa^\dagger + \frac{k-3}{2} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{N}_2 &= b^\dagger b \otimes \mathbb{1} + \frac{1}{2}(k\mathbb{1} + \sigma_3) = \begin{pmatrix} b^\dagger b + \frac{k+1}{2} & 0 \\ 0 & bb^\dagger + \frac{k-3}{2} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{P} &= (a^\dagger)^k (b^\dagger)^k \otimes \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (a^\dagger)^k (b^\dagger)^k & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{P}^\dagger &= a^k b^k \otimes \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & a^k b^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Операторы $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^\dagger$ являются суперсимметричными генераторами и удовлетворяют следующим свойствам супералгебры Ли:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{P}^\dagger, \mathcal{P}\} &= \begin{pmatrix} a^k(a^\dagger)^k b^k(b^\dagger)^k & 0 \\ 0 & (a^\dagger)^k a^k (b^\dagger)^k b^k \end{pmatrix} = \mathcal{N}, \\ [\mathcal{P}^\dagger, \mathcal{P}] &= \begin{pmatrix} a^k(a^\dagger)^k b^k(b^\dagger)^k & 0 \\ 0 & -(a^\dagger)^k a^k (b^\dagger)^k b^k \end{pmatrix} = \mathcal{N}\sigma_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Приведем прочие полезные свойства супералгебры Ли:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\dagger 2} &= 0 = \mathcal{P}^2, & [\mathcal{N}_1, \mathcal{N}] &= 0 = [\mathcal{N}_2, \mathcal{N}], & [\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2] &= 0, \\ [\mathcal{N}_1, \mathcal{P}] &= (k-1)\mathcal{P} = [\mathcal{N}_2, \mathcal{P}], & [\mathcal{P}^\dagger, \sigma_3] &= -2\mathcal{P}^\dagger, & [\mathcal{P}, \sigma_3] &= 2\mathcal{P}, \\ [\mathcal{N}_1, \mathcal{P}^\dagger] &= (1-k)\mathcal{P}^\dagger = [\mathcal{N}_2, \mathcal{P}^\dagger], & \{\mathcal{P}^\dagger, \sigma_3\} &= 0 = \{\mathcal{P}, \sigma_3\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $[\cdot, \cdot]$ и $\{\cdot, \cdot\}$ – обычные коммутационные и антикоммутационные скобки соответственно. Гамильтониан (1) может быть переписан как

$$\mathbb{H} = \omega(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2) - k\omega\mathbb{1} + (\Delta - \omega)\sigma_3 + \alpha\mathcal{P}^\dagger + \beta\mathcal{P}. \quad (12)$$

2.2. Спектр гамильтониана $\mathbb{H}$. Введем следующий суперсимметричный оператор преобразования подобия:

$$\Lambda = \exp\left\{-\frac{\Theta}{2\sqrt{\alpha\beta}}\mathcal{N}^{-1/2}(\alpha\mathcal{P}^\dagger - \beta\mathcal{P})\right\}, \quad (13)$$

где введено обозначение

$$\mathcal{N}^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^k(a^\dagger)^k b^k(b^\dagger)^k}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{(a^\dagger)^k a^k (b^\dagger)^k b^k}} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

а Θ – оператор, который мы определим ниже.

Отметим, что ноль не является собственным значением оператора $\mathcal{N}$ (см. ниже формулы (26) и (27)). Действительно, из-за явного спинорного характера представления состояний операторы, которые являются элементами матрицы выше, нельзя менять. Оператор $(a^\dagger)^k a^k (b^\dagger)^k b^k$ может действовать только на кет-вектор $|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle$, таким образом, ноль не является собственным значением этого оператора.

Проверим следующие коммутационные соотношения:

$$[\mathcal{N}^{-1/2}, \mathcal{P}] = 0 = [\mathcal{N}^{-1/2}, \mathcal{P}^\dagger], \quad [\mathcal{N}^{-1/2}, \mathbb{H}] = 0. \quad (15)$$

Таким образом, согласно (11) и формуле $(\alpha\mathcal{P}^\dagger - \beta\mathcal{P})^2 = -\alpha\beta\mathcal{N}$ генератор (13) принимает вид

$$\Lambda = \cos \frac{\Theta}{2} - \sin \frac{\Theta}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}}(\alpha\mathcal{P}^\dagger - \beta\mathcal{P}). \quad (16)$$

Гамильтониан (12) пока не удастся диагонализировать простым способом, тем не менее можно переписать его с помощью генераторов супералгебры Ли, придав ему удобную форму. Рассмотрим следующее преобразование гамильтониана:

$$\mathbb{H}' = \Lambda^{-1}\mathbb{H}\Lambda. \quad (17)$$

Аналогично способу, использованному для получения формулы (16), получаем

$$\begin{aligned}
 \Lambda^{-1}\sigma_3\Lambda &= \cos\Theta\sigma_3 - \sin\Theta\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}}(\alpha\mathcal{P}^\dagger + \beta\mathcal{P}), \\
 \Lambda^{-1}(\alpha\mathcal{P}^\dagger + \beta\mathcal{P})\Lambda &= \sin\Theta\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}\sigma_3 + \cos\Theta(\alpha\mathcal{P}^\dagger + \beta\mathcal{P}), \\
 \Lambda^{-1}\mathcal{N}_1\Lambda &= \mathcal{N}_1 + \frac{k-1}{2\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}}\sin\Theta(\alpha\mathcal{P}^\dagger + \beta\mathcal{P}) + \frac{k-1}{2}(1 - \cos\Theta)\sigma_3, \\
 \Lambda^{-1}\mathcal{N}_2\Lambda &= \mathcal{N}_2 + \frac{k-1}{2\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}}\sin\Theta(\alpha\mathcal{P}^\dagger + \beta\mathcal{P}) + \frac{k-1}{2}(1 - \cos\Theta)\sigma_3.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, имеем преобразованный гамильтониан, заданный как

$$\begin{aligned}
 \mathbb{H}' &= \omega(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2) - k\omega\mathbb{1} + \\
 &+ [(\Delta - k\omega)\cos\Theta + \omega(k-1)\mathbb{1} + \sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}\sin\Theta] \otimes \sigma_3 + \\
 &+ \left(\cos\Theta - \frac{\Delta - k\omega}{\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}}\sin\Theta\right)(\alpha\mathcal{P}^\dagger + \beta\mathcal{P}).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Такой гамильтониан принимает диагональный вид при соблюдении условия

$$\cos\Theta - \frac{\Delta - k\omega}{\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}}\sin\Theta = 0, \tag{20}$$

эквивалентного соотношениям

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}}{\Delta - k\omega}, \quad \Delta - k\omega \neq 0. \tag{21}$$

При условии (20) гамильтониан (19) можно записать в виде

$$\mathbb{H}' = \omega(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2) - k\omega\mathbb{1} + [(\Delta - k\omega)\cos\Theta + \omega(k-1)\mathbb{1} + \sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}\sin\Theta] \otimes \sigma_3. \tag{22}$$

Более того, в силу формул

$$\cos\Theta = \frac{(\Delta - k\omega)\mathbb{1}}{\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N} + (\Delta - k\omega)^2\mathbb{1}}}, \quad \sin\Theta = \sqrt{\frac{\alpha\beta\mathcal{N}}{\alpha\beta\mathcal{N} + (\Delta - k\omega)^2\mathbb{1}}} \tag{23}$$

этот гамильтониан может быть записан как

$$\mathbb{H}' = \omega(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2) - k\omega\mathbb{1} + [\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N} + (\Delta - k\omega)^2\mathbb{1}} + \omega(k-1)\mathbb{1}] \otimes \sigma_3. \tag{24}$$

Задача на собственные значения для приведенного гамильтониана может быть записана с помощью общих собственных состояний операторов $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ и $\mathcal{N}$, так как они коммутируют. Обозначим эти собственные состояния как

$$\begin{aligned}
 |n_1, n_2, +\rangle &= \begin{pmatrix} |n_1, n_2\rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 |n_1 + k, n_2 + k, -\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ |n_1 + k, n_2 + k\rangle \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{25}$$

где $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$. Операторы $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ и $\mathcal{N}$ действуют на эти собственные состояния как

$$\mathcal{N}|n_1, n_2, +\rangle = \frac{(n_1 + k)!(n_2 + k)!}{n_1!n_2!}|n_1, n_2, +\rangle = \lambda^2|n_1, n_2, +\rangle, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle &= \frac{(n_1 + k)!(n_2 + k)!}{n_1!n_2!}|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle = \\ &= \lambda^2|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\mathcal{N}_1|n_1, n_2, +\rangle = \left(n_1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right)|n_1, n_2, +\rangle, \quad (28)$$

$$\mathcal{N}_2|n_1, n_2, +\rangle = \left(n_2 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right)|n_1, n_2, +\rangle, \quad (29)$$

$$\mathcal{N}_1|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle = \left(n_1 + \frac{3k}{2} - \frac{1}{2}\right)|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle, \quad (30)$$

$$\mathcal{N}_2|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle = \left(n_2 + \frac{3k}{2} - \frac{1}{2}\right)|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle. \quad (31)$$

Заметим, что гамильтониан $\mathbb{H}'$ коммутирует с оператором $\mathcal{N}^{-1/2}$, собственные значения которого определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{-1/2}|n_1, n_2, +\rangle &= \sqrt{\frac{n_1!n_2!}{(n_1 + k)!(n_2 + k)!}}|n_1, n_2, +\rangle, \\ \mathcal{N}^{-1/2}|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle &= \sqrt{\frac{n_1!n_2!}{(n_1 + k)!(n_2 + k)!}}|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle, \end{aligned} \quad (32)$$

которые показывают, что оператор $\mathcal{N}^{-1/2}$ корректно определен.

Уравнения на собственные значения для гамильтониана $\mathbb{H}'$ заданы в базисе, состоящем из собственных векторов (25), как

$$\begin{aligned} \mathbb{H}'|n_1, n_2, +\rangle &= [\omega(n_1 + n_2 + k) + \sqrt{(\Delta - k\omega)^2 + \alpha\beta\lambda^2}]|n_1, n_2, +\rangle, \\ \mathbb{H}'|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle &= [\omega(n_1 + n_2 + k) - \\ &\quad - \sqrt{(\Delta - k\omega)^2 + \alpha\beta\lambda^2}]|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

Наконец, спектр гамильтониана $\mathbb{H}$ задается как

$$\mathbb{H}|\Psi_{n_1, n_2}^\pm\rangle = E_{(n_1, n_2)}^\pm|\Psi_{n_1, n_2}^\pm\rangle, \quad (34)$$

где

$$E_{(n_1, n_2)}^\pm = \omega(n_1 + n_2 + k) \pm \sqrt{(\Delta - k\omega)^2 + \alpha\beta\lambda^2}, \quad \alpha\beta \geq -\left(\frac{\Delta - k\omega}{\lambda}\right)^2, \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{n_1, n_2}^+\rangle &= \Lambda|n_1, n_2, +\rangle = \cos \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1, n_2, +\rangle + \\
 &+ \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1 + k, n_2 + k, -\rangle,
 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{n_1, n_2}^-\rangle &= \Lambda|n_1 + k, n_2 + k, -\rangle = \cos \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1 + k, n_2 + k, -\rangle - \\
 &- \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sin \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1, n_2, +\rangle, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{37}$$

при

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\Delta - k\omega}{2\sqrt{\alpha\beta\lambda^2 + (\Delta - k\omega)^2}}}, \\
 \sin \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\Delta - k\omega}{2\sqrt{\alpha\beta\lambda^2 + (\Delta - k\omega)^2}}}.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Число $\theta(n_1, n_2)$, задающее собственные значения Θ , записывается как

$$\theta(n_1, n_2) = \arctg \frac{\sqrt{\alpha\beta\lambda^2}}{\Delta - k\omega}, \quad \lambda^2 = \frac{(n_1 + k)!(n_2 + k)!}{n_1!n_2!}. \tag{39}$$

Состояния $|\Psi_{n_1, n_2}^\pm\rangle$ и $|\Psi_{n_1, n_2}^\mp\rangle$ не ортогональны, так как

$$\langle \Psi_{n_1, n_2}^\pm | \Psi_{n_1, n_2}^\mp \rangle \neq 0. \tag{40}$$

Эти векторы могут задавать базис, если мы рассматриваем пополнение пространства, порожденного собственными векторами оператора $\mathbb{H}$, которое мы обозначим через $\mathcal{I}$. Действительно, пополнение пространства $\mathcal{I}$ плотно в гильбертовом пространстве, так как его ортогональное дополнение – нулевой вектор.

Для построения биортогональной квантовой механики и определения ее свойств необходимо определить спектр сопряженного к гамильтониану оператора (1).

Так как $\mathbb{H}^\dagger$ совпадает с $\mathbb{H}$ при перестановке α и β , из (36) и (37) получаем

$$\mathbb{H}^\dagger |\xi_{n_1, n_2}^\pm\rangle = E_{(n_1, n_2)}^\pm |\xi_{n_1, n_2}^\pm\rangle, \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned}
 E_{(n_1, n_2)}^\pm &= \omega(n_1 + n_2 + k) \pm \sqrt{(\Delta - k\omega)^2 + \alpha\beta\lambda^2}, \quad \alpha\beta \geq -\left(\frac{\Delta - k\omega}{\lambda}\right)^2, \\
 |\xi_{n_1, n_2}^+\rangle &= \cos \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1, n_2, +\rangle + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sin \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1 + k, n_2 + k, -\rangle, \\
 |\xi_{n_1, n_2}^-\rangle &= \cos \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1 + k, n_2 + k, -\rangle - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1, n_2, +\rangle.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Приведенные выше собственные состояния также не ортогональны,

$$\langle \xi_{n_1, n_2}^\pm | \xi_{n_1, n_2}^\mp \rangle \neq 0, \tag{43}$$

несмотря на то что они могут задавать базис в пополнении пространства, порожденного собственными векторами оператора $\mathbb{H}^\dagger$, которое мы обозначаем $\mathcal{J}$ и которое

плотно в гильбертовом пространстве, поскольку его ортогональное заполнение состоит только из нулевого вектора.

Понятие биортогональности поможет работать в случае отсутствия ортогональности.

2.3. Биортогональная квантовая механика. Биортогональность задает связь между гильбертовым пространством состояний гамильтониана и ему сопряженным, т. е. двойственным пространством. Может показаться, что биортогональность расширяет область исследования физической системы, но она хорошо подходит для описания физических систем, заданных неэрмитовыми операторами [10].

Для любого гамильтониана можно ожидать, что некоторые собственные состояния будут ортогональны, но это, как правило, не так для неэрмитовых гамильтонианов. В качестве примера можно привести соотношения (40) и (43) для гамильтониана $\mathbb{H}$ и его сопряженного. Таким образом, перемешивание может послужить для построения биортогональности:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{n_1, n_2}^r | \xi_{n'_1, n'_2}^s \rangle &= \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \delta_{rs}, \quad r, s = +, -, \\ \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} (|\Psi_{n_1, n_2}^+\rangle \langle \xi_{n_1, n_2}^+| + |\Psi_{n_1, n_2}^-\rangle \langle \xi_{n_1, n_2}^-|) &= \mathbb{I}_{\mathcal{I} \otimes \mathcal{J}}, \end{aligned} \quad (44)$$

где $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ – пополнения пространств, порожденных собственными векторами операторов $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^\dagger$ соответственно, $\mathbb{I}_{\mathcal{I} \otimes \mathcal{J}}$ – тождественный оператор на рассматриваемом пространстве, в данном случае, на $\mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$.

Следовательно, набор собственных состояний $\{|\Psi_{n_1, n_2}^\pm\rangle, |\xi_{n_1, n_2}^\pm\rangle\}$ составляет полную систему биортонормальных векторов (гильбертов базис).

Проектор $\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^\pm$ в биортогональном базисе формально задан как

$$\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^\pm = \frac{|\Psi_{n_1, n_2}^\pm\rangle \langle \xi_{n_1, n_2}^\pm|}{\langle \xi_{n_1, n_2}^\pm | \Psi_{n_1, n_2}^\pm \rangle}. \quad (45)$$

Эти проекторы могут быть заданы в базисе $\{|n_1, n_2, +\rangle, |n_1 + k, n_2 + k, -\rangle\}$. Таким образом, операторы

$$\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^+ : \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} & \sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}} \sin \theta(n_1, n_2) \\ \sqrt{\frac{\beta}{4\alpha}} \sin \theta(n_1, n_2) & \sin^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} \end{pmatrix} \quad (46)$$

и

$$\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^- : \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} & -\sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}} \sin \theta(n_1, n_2) \\ -\sqrt{\frac{\beta}{4\alpha}} \sin \theta(n_1, n_2) & \cos^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} \end{pmatrix} \quad (47)$$

играют роль проекторов на отдельные составляющие биортогонального базиса и удовлетворяют равенству

$$\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^+ \hat{\Pi}_{n_1, n_2}^- = 0 = \hat{\Pi}_{n_1, n_2}^- \hat{\Pi}_{n_1, n_2}^+. \quad (48)$$

Это свойство можно обобщить следующим образом:

$$\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^r \hat{\Pi}_{n'_1, n'_2}^s = \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \delta_{rs} \hat{\Pi}_{n_1, n_2}^r, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad r, s = +, -, \quad (49)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера.

Некоторые дополнительные свойства можно получить при следующих вычислениях:

$$\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^r |\Psi_{n'_1, n'_2}^s\rangle = \delta_{n_1, n'_1} \delta_{n_2, n'_2} \delta_{rs} |\Psi_{n_1, n_2}^r\rangle, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad r, s = +, -, \quad (50)$$

это демонстрирует, что $|\Psi_{n_1, n_2}^\pm\rangle$ – собственные состояния для $\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^\pm$ с единичным собственным значением, в то время как $|\xi_{n_1, n_2}^\pm\rangle$ не являются собственными значениями для $\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^\pm$, так как

$$\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^\pm |\xi_{n_1, n_2}^\pm\rangle \neq |\xi_{n_1, n_2}^\pm\rangle. \quad (51)$$

Сопреженный проектор к $\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^\pm$ задается как

$$(\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^\pm)^\dagger = \frac{|\xi_{n_1, n_2}^\pm\rangle \langle \Psi_{n_1, n_2}^\pm|}{\langle \Psi_{n_1, n_2}^\pm | \xi_{n_1, n_2}^\pm \rangle}, \quad (52)$$

и

$$(\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^r)^\dagger |\xi_{n'_1, n'_2}^s\rangle = \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \delta_{rs} |\xi_{n_1, n_2}^r\rangle, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad r, s = +, -, \quad (53)$$

это демонстрирует, что состояния $|\xi_{n_1, n_2}^\pm\rangle$ являются собственными для $(\hat{\Pi}_{n_1, n_2}^\pm)^\dagger$ с единичным собственным значением, что не выполняется для состояний $|\Psi_{n_1, n_2}^\pm\rangle$.

Рассмотрим проектор на собственные состояния для гамильтониана $\mathbb{H}$, который мы обозначим как $\hat{\Phi}_{n_1, n_2}^\pm = |\Psi_{n_1, n_2}^\pm\rangle \langle \Psi_{n_1, n_2}^\pm| / \langle \Psi_{n_1, n_2}^\pm | \Psi_{n_1, n_2}^\pm \rangle$. Этот проектор в базисе $\{|n_1, n_2, +\rangle, |n_1 + k, n_2 + k, -\rangle\}$ задан как

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{n_1, n_2}^+ : & \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} + \frac{\beta}{\alpha} \sin^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2}} \times \\ & \quad \times \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} \sqrt{\frac{\beta}{4\alpha}} \sin \theta(n_1, n_2) & \\ \sqrt{\frac{\beta}{4\alpha}} \sin \theta(n_1, n_2) & \frac{\beta}{\alpha} \sin^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} \end{pmatrix}, \\ \hat{\Phi}_{n_1, n_2}^- : & \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} + \frac{\alpha}{\beta} \sin^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2}} \times \\ & \quad \times \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta} \sin^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} & -\sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}} \sin \theta(n_1, n_2) \\ -\sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}} \sin \theta(n_1, n_2) & \cos^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (54)$$

Аналогичные рассуждения для гамильтониана $\mathbb{H}^\dagger$ дают проектор

$$\hat{\mathbb{P}}_{n_1 n_2}^\pm = \frac{|\xi_{n_1, n_2}^\pm\rangle \langle \xi_{n_1, n_2}^\pm|}{\langle \xi_{n_1, n_2}^\pm | \xi_{n_1, n_2}^\pm \rangle},$$

так что

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbb{P}}_{n_1, n_2}^+ : & \quad \frac{1}{\cos^2(\theta(n_1, n_2)/2) + \frac{\alpha}{\beta} \sin^2(\theta(n_1, n_2)/2)} \times \\
 & \quad \times \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} & \sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}} \sin \theta(n_1, n_2) \\ \sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}} \sin \theta(n_1, n_2) & \frac{\alpha}{\beta} \sin^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} \end{pmatrix}, \\
 \widehat{\mathbb{P}}_{n_1, n_2}^- : & \quad \frac{1}{\cos^2(\theta(n_1, n_2)/2) + \frac{\beta}{\alpha} \sin^2(\theta(n_1, n_2)/2)} \times \\
 & \quad \times \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha} \sin^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} & -\sqrt{\frac{\beta}{4\alpha}} \sin \theta(n_1, n_2) \\ -\sqrt{\frac{\beta}{4\alpha}} \sin \theta(n_1, n_2) & \cos^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned}
 \widehat{\Pi}_{n_1, n_2}^r \widehat{\Phi}_{n'_1, n'_2}^s &= \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \delta_{rs} \widehat{\Phi}_{n_1, n_2}^r, \\
 \widehat{\Pi}_{n_1, n_2}^{\dagger r} \widehat{\mathbb{P}}_{n'_1, n'_2}^s &= \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \delta_{rs} \widehat{\mathbb{P}}_{n'_1, n'_2}^r, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad r, s = +, -.
 \end{aligned} \tag{56}$$

Кроме того, возможно использовать понятие проективного гильбертова пространства, пространства всех лучей, соответствующих квантовым состояниям и снабженных геометрической структурой для вычисления элемента расстояния ds^2 с помощью проектора $\widehat{\Pi}_{n_1, n_2}^\pm$. Имеем

$$\begin{aligned}
 ds^2(n_1, n_2) &= \frac{1}{2} \text{tr}(d\widehat{\Pi}_{n_1, n_2}^\pm, d\widehat{\Pi}_{n_1, n_2}^\pm) = \\
 &= \frac{\langle \xi_{n_1, n_2}^\pm | \Psi_{n_1, n_2}^\pm \rangle \langle d\xi_{n_1, n_2}^\pm | d\Psi_{n_1, n_2}^\pm \rangle - \|\langle \xi_{n_1, n_2}^\pm | d\Psi_{n_1, n_2}^\pm \rangle\|^2}{\|\langle \xi_{n_1, n_2}^\pm | \Psi_{n_1, n_2}^\pm \rangle\|^2}.
 \end{aligned} \tag{57}$$

Это выражение обычно сопоставляется с метрикой Фубини–Штуди; после прямого вычисления получаем

$$ds^2(n_1, n_2) = \frac{1}{4} d\theta^2(n_1, n_2). \tag{58}$$

В заключение настоящего раздела, посвященного многомодовой модели ДК, рассмотрим некоторые частные случаи. Они приведены в статьях, где обсуждаются двухмодовые модели ДК (см. [32], [33]). Для сравнения рассмотрим частные случаи двухмодовых эрмитовой и неэрмитовой моделей, основываясь на полученных результатах.

Гамильтониан, описывающий двухмодовую неэрмитову модель ДК, получен из гамильтониана (1) при $k = 1$:

$$\mathcal{H} = \omega(a^\dagger a + b^\dagger b) \otimes \mathbb{1} + \Delta \sigma_3 + \alpha a b \sigma_+ + \beta a^\dagger b^\dagger \sigma_-. \tag{59}$$

Следуя аналогичному алгоритму для многомодового гамильтониана, получаем следующий спектр:

$$\mathcal{H}|\eta_{n_1, n_2}^\pm\rangle = E_{(n_1, n_2)}^\pm |\eta_{n_1, n_2}^\pm\rangle, \tag{60}$$

где

$$\begin{aligned}
 E_{(n_1, n_2)}^{\pm} &= \omega(n_1 + n_2 + 1) \pm \sqrt{(\Delta - \omega)^2 + \alpha\beta(n_1 + 1)(n_2 + 1)}, \\
 \alpha\beta &\geq -\frac{(\Delta - \omega)^2}{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}, \\
 |\eta_{n_1, n_2}^+\rangle &= \cos \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1, n_2, +\rangle + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1 + 1, n_2 + 1, -\rangle, \\
 |\eta_{n_1, n_2}^-\rangle &= \cos \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1 + 1, n_2 + 1, -\rangle - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sin \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1, n_2, +\rangle.
 \end{aligned} \tag{61}$$

В то же время спектр гамильтониана $\mathcal{H}^\dagger$ задается как

$$\mathcal{H}^\dagger |\phi_{n_1, n_2}^\pm\rangle = E_{(n_1, n_2)}^\pm |\phi_{n_1, n_2}^\pm\rangle, \tag{62}$$

где

$$\begin{aligned}
 |\phi_{n_1, n_2}^+\rangle &= \cos \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1, n_2, +\rangle + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sin \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1 + 1, n_2 + 1, -\rangle, \\
 |\phi_{n_1, n_2}^-\rangle &= \cos \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1 + 1, n_2 + 1, -\rangle - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} |n_1, n_2, +\rangle.
 \end{aligned} \tag{63}$$

Имеем следующее представление в биортогональном базисе:

$$\begin{aligned}
 |\eta_{n_1, n_2}^+\rangle \langle \phi_{n_1, n_2}^+| : & \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} & \sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}} \sin \theta(n_1, n_2) \\ \sqrt{\frac{\beta}{4\alpha}} \sin \theta(n_1, n_2) & \sin^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} \end{pmatrix}, \\
 |\eta_{n_1, n_2}^-\rangle \langle \phi_{n_1, n_2}^-| : & \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} & -\sqrt{\frac{\alpha}{4\beta}} \sin \theta(n_1, n_2) \\ -\sqrt{\frac{\beta}{4\alpha}} \sin \theta(n_1, n_2) & \cos^2 \frac{\theta(n_1, n_2)}{2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{64}$$

Эти результаты приводят к следующему представлению тождественного оператора:

$$\sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} (|\eta_{n_1, n_2}^+\rangle \langle \phi_{n_1, n_2}^+| + |\eta_{n_1, n_2}^-\rangle \langle \phi_{n_1, n_2}^-|) = \mathbb{I}_{\mathcal{I} \otimes \mathcal{J}}. \tag{65}$$

Мы получаем двухмодовую эрмитову модель ДК, если $\alpha = \beta$ в гамильтониане (59). Спектр энергии, который можно сравнить со спектрами, полученными ранее другими авторами, имеет вид

$$E_{(n_1, n_2)}^\pm = \omega(n_1 + n_2 + 1) \pm \sqrt{(\Delta - \omega)^2 + \alpha^2(n_1 + 1)(n_2 + 1)}. \tag{66}$$

Прямое вычисление показывает, что собственные состояния этой модели составляют полный набор ортогональных векторов в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим обобщение для следующего гамильтониана:

$$\Xi = \omega_1 a^\dagger a \otimes \mathbb{1} + \omega_2 b^\dagger b \otimes \mathbb{1} + \Delta \sigma_3 + \alpha a^k b^k \otimes \sigma_+ + \beta (a^\dagger)^k (b^\dagger) \otimes \sigma_- . \quad (67)$$

Схожие обобщения встречаются в научной литературе. Например, в частном случае двухмодового эрмитова гамильтониана физическая модель состоит из модели эффективного двухуровневого атома с частотой перехода Δ и двух квантованных моделей резонаторов без потерь с частотами ω_1 и ω_2 [34].

Применяя преобразование подобия (13), приводим гамильтониан (67) к виду

$$\begin{aligned} \Xi' = & \omega_1 \mathcal{N}_1 + \omega_2 \mathcal{N}_2 - \frac{k}{2}(\omega_1 + \omega_2) \mathbb{1} + \\ & + \left[\frac{2\Delta - k(\omega_1 + \omega_2)}{2} \cos \tilde{\Theta} + \frac{1}{2}(k\omega_1 + k\omega_2 - \omega_1 - \omega_2) \mathbb{1} + \sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}} \sin \tilde{\Theta} \right] \otimes \sigma_3 + \\ & + \left[\cos \tilde{\Theta} - \frac{2\Delta - k(\omega_1 + \omega_2)}{2\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}} \sin \tilde{\Theta} \right] (\alpha \mathcal{P}^\dagger + \beta \mathcal{P}). \end{aligned} \quad (68)$$

Данный гамильтониан принимает диагональный вид при условии

$$\cos \tilde{\Theta} - \frac{2\Delta - k(\omega_1 + \omega_2)}{2\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}} \sin \tilde{\Theta} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \tilde{\Theta} = \frac{2\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}}}{2\Delta - k(\omega_1 + \omega_2)} \quad (69)$$

и может быть записан как

$$\begin{aligned} \Xi' = & \omega_1 \mathcal{N}_1 + \omega_2 \mathcal{N}_2 - \frac{k}{2}(\omega_1 + \omega_2) \mathbb{1} + \frac{1}{2}[(2\Delta - k\omega_1 - k\omega_2) \cos \tilde{\Theta} + \\ & + (k-1)(\omega_1 + \omega_2) \mathbb{1} + 2\sqrt{\alpha\beta\mathcal{N}} \sin \tilde{\Theta}] \otimes \sigma_3. \end{aligned} \quad (70)$$

Из соотношения (69) получаем выражения

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\Theta} &= \frac{(2\Delta - k(\omega_1 + \omega_2)) \mathbb{1}}{\sqrt{4\alpha\beta\mathcal{N} + ((2\Delta - k\omega_1 - k\omega_2) \mathbb{1})^2}}, \quad 2\Delta - k(\omega_1 + \omega_2) \neq 0, \\ \sin \tilde{\Theta} &= \sqrt{\frac{4\alpha\beta\mathcal{N}}{4\alpha\beta\mathcal{N} + ((2\Delta - k\omega_1 - k\omega_2) \mathbb{1})^2}}, \end{aligned} \quad (71)$$

дающие собственные значения гамильтониана Ξ , равные

$$E_{(n_1, n_2)}^\pm = \omega_1 \left(n_1 + \frac{k}{2} \right) + \omega_2 \left(n_2 + \frac{k}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2\Delta - k\omega_1 - k\omega_2)^2 + 4\alpha\beta\lambda^2}. \quad (72)$$

Этот результат требует ограничения на выбор действительных постоянных α и β , которые должны удовлетворять условию $\alpha\beta \geq -((2\Delta - k\omega_1 - k\omega_2)/2\lambda)^2$ для действительного спектра.

Заметим, что если α, β – комплексные постоянные, то спектр энергии не обязательно будет действительным, однако он будет действительным, если эти постоянные являются чисто мнимыми со знаками, обратными этим комплексным числам. Для комплексно-сопряженных постоянных гамильтониан становится эрмитовым. Этот случай изучен в работе [33] для грассмановых нечетных чисел.

3. НЕЭРМИТОВА МНОГОФОТОННАЯ МОДЕЛЬ ДК

3.1. Модель и ее основные свойства. Гамильтониан, описывающий модель, может формально быть представлен как

$$H = \omega a^\dagger a \otimes \mathbb{1} + \frac{\omega_0}{2} \sigma_3 + \nu a^k \otimes \sigma_+ + \mu (a^\dagger)^k \otimes \sigma_-, \quad (73)$$

где ν, μ – произвольные постоянные такие, что $\nu \neq \mu$. В данном выражении число k такое, что $k > 1$, оно фиксировано для каждой модели и обозначает число фотонов, описывающее процесс перехода для каждого атома. Случай $k = 1$ описывает однофотонную модель, т. е. обычную неэрмитову модель ДК.

В процессе диагонализации введем операторы

$$K = a^\dagger a \otimes \mathbb{1} + \frac{1}{2}(k-1)\sigma_3 + \frac{1}{2}\mathbb{1} = \begin{pmatrix} a^\dagger a + \frac{k}{2} & 0 \\ 0 & aa^\dagger - \frac{k}{2} \end{pmatrix}, \quad (74)$$

$$\pi = (a^\dagger)^k \otimes \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (a^\dagger)^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi^\dagger = a^k \otimes \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & a^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться в том, что операторы K, π и $\pi^\dagger$ – суперсимметричные генераторы, которые имеют следующие свойства супералгебры Ли:

$$\begin{aligned} \{\pi^\dagger, \pi\} &= \begin{pmatrix} a^k (a^\dagger)^k & 0 \\ 0 & (a^\dagger)^k a^k \end{pmatrix} = K', \\ [\pi^\dagger, \pi] &= \begin{pmatrix} a^k (a^\dagger)^k & 0 \\ 0 & -(a^\dagger)^k a^k \end{pmatrix} = K' \sigma_3. \end{aligned} \quad (75)$$

Укажем другие свойства супералгебры Ли:

$$\begin{aligned} \pi^{\dagger 2} &= 0 = \pi^2, & [K, K'] &= 0, & [K, \pi] &= \pi, & [K, \pi^\dagger] &= -\pi^\dagger, \\ [\pi^\dagger, \sigma_3] &= -2\pi^\dagger, & [\pi, \sigma_3] &= 2\pi, & \{K^\dagger, \sigma_3\} &= 0 = \{K, \sigma_3\}, \end{aligned} \quad (76)$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ – обычная антикоммутационная скобка. Гамильтониан (73) можно переписать с помощью этих генераторов как

$$H = \omega K - \frac{\omega}{2} \mathbb{1} + \frac{1}{2}[\omega_0 + \omega(1-k)]\sigma_3 + \nu \pi^\dagger + \mu \pi. \quad (77)$$

3.2. Спектр. Введем суперсимметричный оператор преобразования подобия

$$S = \exp \left\{ -\frac{\Gamma}{2\sqrt{\nu\mu}} K'^{-1/2} (\nu \pi^\dagger - \mu \pi) \right\}, \quad (78)$$

где

$$K'^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^k (a^\dagger)^k}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{(a^\dagger)^k a^k}} \end{pmatrix}, \quad (\nu \pi^\dagger - \mu \pi)^2 = -\nu \mu K', \quad (79)$$

Γ – оператор, который будет описан ниже с учетом требований, возникающих в процессе диагонализации.

Отметим, что ноль не является собственным значением оператора K' , поэтому нет необходимости удалять из спектра сектор основного состояния, прежде чем оператор будет определен корректно, как предлагается в статье [14], где ноль был собственным значением оператора, связанного с числом возбуждения.

Прямое вычисление дает следующие коммутационные соотношения:

$$[K'^{-1/2}, \pi] = 0 = [K'^{-1/2}, \pi^\dagger], \quad [K'^{-1/2}, H] = 0. \quad (80)$$

С помощью оператора одевания (78) получаем преобразование

$$\begin{aligned} S^{-1}\sigma_3 S &= \sigma_3 \cos \Gamma - \frac{1}{\sqrt{\nu\mu K'}}(\nu\pi^\dagger + \mu\pi) \sin \Gamma, \\ S^{-1}(\nu\pi^\dagger + \mu\pi)S &= \sqrt{\nu\mu K'}\sigma_3 \sin \Gamma + (\nu\pi^\dagger + \mu\pi) \cos \Gamma, \\ S^{-1}KS &= K + \frac{1}{2\sqrt{\nu\mu K'}}(\nu\pi^\dagger + \mu\pi) \sin \Gamma + \frac{1}{2}(1 - \cos \Gamma)\sigma_3. \end{aligned} \quad (81)$$

Следовательно, преобразованный гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H' &= S^{-1}HS = \\ &= \omega K - \frac{\omega}{2}\mathbb{1} + \frac{1}{2}[\omega\mathbb{1} + (\omega_0 - k\omega) \cos \Gamma + 2\sqrt{\nu\mu K'} \sin \Gamma] \otimes \sigma_3 + \\ &+ \left(\cos \Gamma + \frac{k\omega - \omega_0}{2\sqrt{\nu\mu K'}} \sin \Gamma \right) (\nu\pi^\dagger + \mu\pi). \end{aligned} \quad (82)$$

Диагонализация данного гамильтониана может быть проведена при условии

$$\cos \Gamma + \frac{k\omega - \omega_0}{2\sqrt{\nu\mu K'}} \sin \Gamma = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \Gamma = \frac{2\sqrt{\nu\mu K'}}{\omega_0 - k\omega}, \quad \omega_0 - k\omega \neq 0, \quad (83)$$

что приводит к выражению

$$H' = \omega K - \frac{\omega}{2}\mathbb{1} + \left[\frac{\omega}{2}\mathbb{1} + \frac{1}{2}\sqrt{4\nu\mu K' + (k\omega - \omega_0)^2} \right] \otimes \sigma_3. \quad (84)$$

Оператор $K'^{-1/2}$ коммутирует с гамильтонианом H' , и, таким образом, задача на собственные значения для данного гамильтониана может быть решена, если она имеет решение для оператора $K'^{-1/2}$. Используя соотношения¹⁾

$$K'^{-1/2}|n, +\rangle = \sqrt{\frac{n!}{(n+k)!}}|n, +\rangle, \quad K'^{-1/2}|n+k, -\rangle = \sqrt{\frac{n!}{(n+k)!}}|n+k, -\rangle, \quad (85)$$

$$K|n, +\rangle = \left(n + \frac{k}{2}\right)|n, +\rangle, \quad K|n+k, -\rangle = \left(n+1 + \frac{k}{2}\right)|n+k, -\rangle, \quad (86)$$

мы получаем спектр гамильтониана H (H и H' имеют совпадающие спектры)

$$H|\psi_n^\pm\rangle = \mathcal{E}_n^\pm|\psi_n^\pm\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (87)$$

где

$$\mathcal{E}_n^\pm = \omega \left(n + \frac{k}{2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\nu\mu\eta^2 + (k\omega - \omega_0)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (88)$$

¹⁾Уравнение (85) показывает, что оператор $K'^{-1/2}$ корректно определен на данном базисе.

при

$$\nu\mu \geq -\left(\frac{k\omega - \omega_0}{\eta}\right)^2, \quad \eta^2 = 4\frac{(n+k)!}{n!} \quad (89)$$

и

$$\begin{aligned} |\psi_n^+\rangle &= S|n, +\rangle = \cos \frac{\gamma(n)}{2} |n, +\rangle + \sqrt{\frac{\mu}{\nu}} \sin \frac{\gamma(n)}{2} |n+k, -\rangle, \\ |\psi_n^-\rangle &= S|n+k, -\rangle = \cos \frac{\gamma(n)}{2} |n+k, -\rangle - \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} \sin \frac{\gamma(n)}{2} |n, +\rangle. \end{aligned} \quad (90)$$

Здесь $\gamma(n)$ – собственное значение оператора Γ для особых значений k и квантового числа n :

$$\gamma(n) = \arctg \left\{ 2\sqrt{\mu\nu \frac{(n+k)!}{n!}} (\omega_0 - k\omega)^{-1} \right\}. \quad (91)$$

Собственные состояния оператора, сопряженного к гамильтониану $H^\dagger$, получены при перестановке μ и ν в уравнениях (90). Имеем

$$\begin{aligned} |\chi_n^+\rangle &= \mathcal{S}|n, +\rangle = \cos \frac{\gamma(n)}{2} |n, +\rangle + \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} \sin \frac{\gamma(n)}{2} |n+k, -\rangle, \\ |\chi_n^-\rangle &= \mathcal{S}|n+k, -\rangle = \cos \frac{\gamma(n)}{2} |n+k, -\rangle - \sqrt{\frac{\mu}{\nu}} \sin \frac{\gamma(n)}{2} |n, +\rangle, \end{aligned} \quad (92)$$

где

$$\begin{aligned} \cos \frac{\gamma(n)}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{k\omega - \omega_0}{2\sqrt{\nu\mu\eta^2 + (k\omega - \omega_0)^2}}}, \\ \sin \frac{\gamma(n)}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{k\omega - \omega_0}{2\sqrt{\nu\mu\eta^2 + (k\omega - \omega_0)^2}}}. \end{aligned} \quad (93)$$

Состояния $|\chi_n^\pm\rangle$ гамильтониана $H^\dagger$, так же как состояния $|\psi_n^\pm\rangle$ гамильтониана H , не ортогональны, т.е. $\langle \chi_n^\pm | \chi_n^\mp \rangle \neq 0$ и $\langle \psi_n^\pm | \psi_n^\mp \rangle \neq 0$.

Рассмотрим пополнение операторов H и $H^\dagger$, обозначив их через $\tilde{\mathcal{I}}$ и $\tilde{\mathcal{J}}$ соответственно. Прямое вычисление доказывает, что это наборы плотны в гильбертовом пространстве. Следовательно, биортогональный формализм применим, и его базис порожден векторами со следующими свойствами:

$$\langle \chi_n^\pm | \psi_m^\pm \rangle = \delta_{nm}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (|\chi_n^+\rangle \langle \psi_n^+| + |\chi_n^-\rangle \langle \psi_n^-|) = \mathbb{I}_{\tilde{\mathcal{I}} \otimes \tilde{\mathcal{J}}}. \quad (94)$$

Отметим, что для $\mu = \nu$ или для комплекснозначных сопряженных μ и ν гамильтониан H эрмитов. Упомянем также работу [35] для случая эрмитовой многофотонной модели, где вводится унитарное преобразование для упрощения диагонализации гамильтониана. Спектр, полученный в нашей работе, не противоречит результатам статьи [35] при $\mu = \nu$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе успешно решены неэрмитовы многомодовая и многофотонная модели ДК. Скрытые симметрии моделей были обнаружены при помощи супералгебры Ли и оператора одевания–подобия. Собственные состояния и соответствующие собственные значения для обеих моделей были получены при совместном применении алгебраических и аналитических методов. В каждом случае спектры собственных значений гамильтониана и его сопряженного действительны и совпадают, в то время как собственные состояния гамильтониана и его сопряженного не образуют полную систему ортогональных векторов. Таким образом, заданы свойства биортогональной квантовой механики, при которых можно диагонализировать неэрмитовы гамильтонианы, т. е. такие, что их сопряженный оператор не совпадает с исходным.

Показано, что собственные значения гамильтониана и его сопряженного не образуют набор ортогональных векторов. Это скрытое свойство появилось, поскольку стало возможно диагонализировать эти гамильтонианы посредством эффективного инструмента, представляющего в этом контексте оператор подобия. Действительно, в общепринятой квантовой механике для эрмитовых операторов хорошо известно, что диагонализация гамильтониана в бесконечномерном гильбертовом пространстве не является простой задачей, но ее можно решать с помощью правильного выбора пространства диагонализации (см. [25]), поэтому естественно предположить, что задача диагонализации и построения биортогональности очень сложна для неэрмитовых бесконечномерных гамильтонианов [10]. Метод, предложенный в данной статье, может быть полезен при решении задач с подобными гамильтонианами.

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за ценные комментарии, которые помогли значительно улучшить статью. Также авторы приносят искреннюю благодарность профессору Liamidi Leady и профессору Guy Degla за плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] N. Moiseyev, “Quantum theory of resonances: calculating energies, widths and cross-sections by complex scaling”, *Phys. Rep.*, **302**:5–6 (1998), 211–293.
- [2] J. Okolowicz, M. Ploszajczak, I. Rotter, “Dynamics of quantum systems embedded in a continuum”, *Phys. Rep.*, **374**:4–5 (2003), 271–383.
- [3] N. Moiseyev, *Non-Hermitian Quantum Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.
- [4] F. G. Scholtz, H. B. Geyer, F. J. W. Hahne, “Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle”, *Ann. Phys.*, **213**:1 (1992), 74–101.
- [5] H. B. Geyer, W. D. Heiss, F. G. Scholtz, “The physical interpretation of non-Hermitian Hamiltonians and other observables”, *Canadian J. Phys.*, **86** (2008), 1195–1201.
- [6] C. M. Bender, “Making sense of non-Hermitian Hamiltonians”, *Rep. Progr. Phys.*, **70**:6 (2007), 947–1018.
- [7] A. Mostafazadeh, “Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics”, *Internat. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **7**:7 (2010), 1191–1306.
- [8] M. Znojil, “Three-Hilbert-space formulation of quantum mechanics”, *SIGMA*, **5** (2009), 001, 001, 19 pp.
- [9] T. Curtright, L. Mezincescu, “Biorthogonal quantum systems”, *J. Math. Phys.*, **48**:9 (2007), 092106, 35 pp.
- [10] D. C. Brody, “Biorthogonal quantum mechanics”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:3 (2014), 035305, 21 pp.

- [11] F. Bagarello, “Transition probabilities for non self-adjoint Hamiltonians in infinite dimensional Hilbert spaces”, *Ann. Phys.*, **362** (2015), 424–435.
- [12] F. Bagarello, A. Fring, “Generalized Bogoliubov transformations versus $\mathcal{D}$ -pseudo-bosons”, *J. Math. Phys.*, **56**:10 (2015), 103508, 10 pp.
- [13] F. Bagarello, “Some results on the dynamics and transition probabilities for non self-adjoint Hamiltonians”, *Ann. Phys.*, **356** (2015), 171–184.
- [14] F. Bagarello, M. Luttuca, R. Passante, L. Rizzuto, S. Spagnolo, “Non-Hermitian Hamiltonian for a modulated Jaynes–Cummings model with $\mathcal{PT}$ symmetry”, *Phys. Rev. A*, **91**:4 (2015), 042134, 8 pp.
- [15] F. Bagarello, J.-P. Gazeau, F. H. Szafraniec, M. Znojil (eds.), *Non-Selfadjoint Operators in Quantum Physics: Mathematical Aspects*, John Wiley and Sons, New York, 2015.
- [16] F. Bagarello, “Pseudobosons, Riesz bases, and coherent states”, *J. Math. Phys.*, **51**:2 (2010), 023531, 10 pp.
- [17] F. Bagarello, “Pseudo-bosons from Landau levels”, *SIGMA*, **6** (2010), 093, 9 pp.
- [18] F. Bagarello, “Pseudo-bosons, so far”, *Rep. Math. Phys.*, **68**:2 (2011), 175–210.
- [19] P. Carbonaro, G. Compagno, F. Persico, “Canonical dressing of atoms by intense radiation fields”, *Phys. Lett. A*, **73**:2 (1979), 97–99.
- [20] J. H. Eberly, N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon, “Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model”, *Phys. Rev. Lett.*, **44**:20 (1980), 1323–1326.
- [21] R. Krivec, V. B. Mandelzweig, “Nonvariational calculation of the sticking probability and fusion rate for the μdt molecular ion”, *Phys. Rev. A*, **52**:1 (1995), 221–226.
- [22] K. Wódkiewicz, P. L. Knight, S. J. Buckle, S. M. Barnett, “Squeezing and superposition states”, *Phys. Rev. A*, **35**:6 (1987), 2567–2577.
- [23] A. Imamolğlu, S. E. Harris, “Lasers without inversion: interference of dressed lifetime-broadened states”, *Opt. Lett.*, **14**:24 (1989), 1344–1346.
- [24] I. I. Rabi, “On the process of space quantization”, *Phys. Rev.*, **49**:4 (1936), 324–328; “Space quantization in a gyrating magnetic field”, **51**:8 (1937), 652–654.
- [25] A. F. Dossa, G. Y. H. Avossevou, “Full spectrum of the two-photon and the two-mode quantum Rabi models”, *J. Math. Phys.*, **55**:10 (2014), 102104, 18 pp.
- [26] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhateme, “Supersymmetry and quantum mechanics”, *Phys. Rep.*, **251**:5–6 (1995), 267–385.
- [27] R. Dutt, A. Khare, U. Sukhatme, “Supersymmetry, shape invariance, and exactly solvable potentials”, *Am. J. Phys.*, **56**:2 (1988), 163–168.
- [28] H.-Y. Fan, L.-S. Li, “Supersymmetric unitary operator for some generalized Jaynes–Cummings models”, *Commun. Theor. Phys.*, **25**:1 (1996), 105–110.
- [29] H.-Y. Fan, “Representation and transformation theory in quantum mechanics”, *Progress of Dirac’s Symbolic Method*, Scientific and Technical Univ. Press, Shanghai, 1997, 181.
- [30] E. Brian Davies, *Linear Operators and their Spectra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **106**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [31] P. E. G. Assis, *Non-Hermitian Hamiltonians in field theory*, PhD Thesis, City Univ. London, London, 2009.
- [32] H.-X. Lu, X.-Q. Wang, Y.-D. Zhang, “Exact solution for super–Jaynes–Cummings model”, *Chinese Phys.*, **9**:5 (2000), 325–328.
- [33] J. Yang, W.-L. Yu, A.-P. Xiang, “Exact solution for Jaynes–Cummings model with bosonic field nonlinearity and strong boson-fermion coupling”, *Commun. Theor. Phys.*, **45**:1 (2006), 143–146.
- [34] T.-Q. Song, Y.-J. Zhu, “Solving generalized non-degenerate two-mode two-photon Jaynes–Cummings model by supersymmetric unitary transformation”, *Commun. Theor. Phys.*, **38**:1 (2002), 85–88.
- [35] H.-X. Lu, X.-Q. Wang, “Multiphoton Jaynes–Cummings model solved via supersymmetric unitary transformation”, *Chinese Phys.*, **9**:8 (2000), 568–571.