Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шабат, Функциональное уравнение Кантора,
ТМФ, 2016, том 189, номер 3, 355–361

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:16:28

© 2016 г.

А. Б. Шабат^{*†}

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КАНТОРА

В связи с теорией рассеяния для уравнения Шредингера с финитным потенциалом, являющимся конечной мерой Бореля, рассмотрен класс целых функций экспоненциального типа. Эти функции обладают своеобразной автомодельностью и удовлетворяют q -разностным функциональным уравнениям. Исследована их асимптотика и распределение нулей.

Ключевые слова: обратная задача рассеяния, интеграл Фурье–Стилтьеса, q -разностные уравнения.

DOI: 10.4213/tmf9227

1. ВВЕДЕНИЕ

Интеграл Фурье–Стилтьеса

$$\varphi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{kt} dF(t) \quad (1)$$

определяет почти периодическую функцию на мнимой оси $k = i\xi$, если функция ограниченной вариации $F(t)$ является *функцией скачков*, т. е. имеет нулевую производную всюду за исключением счетного числа точек разрыва первого рода. Скачки f_j удовлетворяют при этом условию сходимости ряда $\sum |f_j| < \infty$. Мы изучаем свойства интеграла (1), когда *непрерывная монотонная* функция $F(t)$ с компактным сингулярным носителем является функцией типа Кантора–Лебега и имеет почти всюду нулевую производную. Из работы [1] следует, что в случае функции Кантора в силу ее свойств *автомодельности*¹⁾ полученная преобразованием Лапласа (1) функция удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$\varphi(3k) = \operatorname{ch} k \varphi(k), \quad \operatorname{ch} k = \frac{e^k + e^{-k}}{2}. \quad (2)$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-20007).

¹⁾И автомодельной структуры канторова множества.

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: shabatab@mail.ru

[†]Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия

Мы рассматриваем свойства решений обобщений этого линейного функционального уравнения и устанавливаем, в частности, их связи с так называемыми q -разностными уравнениями [2].

2. ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Интеграл Фурье–Стилтьеса (1) в случае финитности области интегрирования представляет собой целую функцию комплексной переменной k , и мы получаем, используя функциональное уравнение (2), следующее уточнение свойств функции $\varphi(k)$.

ЛЕММА 1. *Линейное функциональное уравнение (2) с нормировкой $\varphi(0) = 1$ однозначно разрешимо в классе сходящихся степенных рядов $\varphi(k) = \sum a_j k^j$. Коэффициенты ряда $a_j \geq 0$ не превосходят коэффициентов степенного ряда для экспоненты $e^{\alpha k}$ с показателем $\alpha = 1/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцирование уравнения и формула Лейбница дают выражения

$$\begin{aligned} 3^{2n-1} \varphi^{(2n-1)}(3k) &= \operatorname{sh} k \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2j} \varphi^{(2j)}(k) + \operatorname{ch} k \sum_{j=1}^n \binom{2n-1}{2j-1} \varphi^{(2j-1)}(k), \\ 3^{2n} \varphi^{(2n)}(3k) &= \operatorname{ch} k \sum_{j=0}^n \binom{2n}{2j} \varphi^{(2j)}(k) + \operatorname{sh} k \sum_{j=1}^n \binom{2n}{2j-1} \varphi^{(2j-1)}(k). \end{aligned}$$

В нечетном порядке мы получаем, что $\varphi^{(2j-1)}(0) = 0$, $j = 1, 2, \dots$, и при любом n

$$D^n \varphi(3k) \Big|_{k=0} = \frac{1}{2} [(D+1)^n + (D-1)^n] \varphi(k) \Big|_{k=0}, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0. \quad (3)$$

Для доказательства сходимости найденного таким способом степенного ряда с положительными коэффициентами для $\varphi(k)$ можно заменить косинус экспонентой в уравнении (2):

$$f(3k) = e^k f(k), \quad f(0) = 1 \quad \implies \quad (3^m - 1) f^{(m)}(0) = \sum_0^{m-1} \binom{m}{j} f^{(j)}(0),$$

и проверить индукцией, что $f^{(m)}(0) > \varphi^{(m)}(0)$ при всех m . Решением мажорантного уравнения является функция $f(k) = e^{k/2}$, так как

$$f(3k) = e^{3k/2} = e^k e^{k/2} = e^k f(k). \quad (4)$$

Обобщенным уравнением Кантора мы называем уравнение следующего вида:

$$\psi(\gamma k) = \beta \operatorname{ch} k \psi(k) + \varepsilon, \quad \gamma > 1. \quad (5)$$

К нему также применима схема доказательства леммы 1, а дополнительные параметры β, ε позволяют обобщить начальные данные в формуле (3), если использовать соотношения

$$(1 - \beta)\psi(0) = \varepsilon, \quad (\gamma - \beta)\psi'(0) = 0. \quad (6)$$

В частности, при $\beta = \gamma$, $\varepsilon \neq 0$ можно произвольно задавать $\psi(0)$, $\psi'(0)$. Отметим, что $\psi(0) = 0$ при $\beta = \gamma$ и $\varepsilon = 0$, а функция $\varphi(k) = (1/k)\psi(k)$ удовлетворяет уравнению с $\beta = 1$. Функциональное уравнение Кантора (2) для функции $\varphi(k)$ соответствует случаю $\gamma = 3$, $\beta = 1$, $\varepsilon = 0$, и функция $\psi(k) = k\varphi(k)$ удовлетворяет при этом уравнению вида (5) с $\gamma = \beta = 3$.

Общее решение уравнения (5) выражается в элементарных функциях при $\gamma = 2$. Этот исключительный случай позволяет лучше понять роль дополнительных параметров β и ε в функциональном уравнении (5). Например, при $\beta = 2$, $\varepsilon = 0$ решение пропорционально $\operatorname{sh} k$, так как

$$\operatorname{sh}(2k) = 2 \operatorname{ch} k \operatorname{sh} k, \quad \psi(k) = \operatorname{sh} k, \quad (7)$$

а при $\varepsilon = -1$ решением неоднородного уравнения является, как легко проверить, экспонента $\psi(k) = e^k$.

Дальнейшее обобщение уравнения (2) приводит нас к линейному функциональному уравнению следующего вида:

$$\varphi(\gamma k) = g(k)\varphi(k) + \varepsilon, \quad |\gamma| > 1. \quad (8)$$

Здесь заданной считается целая функция $g(k) = \sum b_j k^j$ экспоненциального типа²⁾, и уравнение (8) сводится к системе линейных уравнений

$$\gamma^n a_n = b_0 a_n + \dots + b_n a_0 = \sum_{i+j=n} b_i a_j, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

относительно коэффициентов a_j ряда Тейлора для $\varphi(k)$. Доказательство леммы 1 переносится на рассматриваемое обобщение, и мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *При заданной целой функции экспоненциального типа $g(k) = \sum b_j k^j$ линейное уравнение (8) однозначно разрешимо в классе целых функций при фиксированных начальных условиях типа (6) в точке $k = 0$.*

При $\varepsilon = 0$ и $b_0 = 1$ решение уравнения (8) записывается в виде бесконечного произведения:

$$\varphi(k) = \prod_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{k}{\gamma^n}\right) \iff \varphi(\gamma k) = g(k) \prod_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{k}{\gamma^n}\right) = g(k)\varphi(k). \quad (10)$$

Сходимость этого бесконечного произведения при условии $g(0) = 1$ доказывается, как обычно, логарифмированием. Число нулевых и близких к нулю сомножителей в формуле (10) возрастает, очевидно, с ростом $|k|$. Поэтому в численных экспериментах, связанных с изучением поведения целой функции $\varphi(k)$ при больших $|k|$, эти “предельно малые сомножители” в бесконечном произведении (10) создают серьезные затруднения. Ниже на рис. 1 приводится для иллюстрации посчитанный на компьютере график решения уравнения (2) на вертикальной оси $k = i\xi$.

²⁾Целая функция $g(k) = \varphi(\gamma k)/\varphi(k)$ входит в этот класс, если $\varphi(k)$ – функция экспоненциального типа.

Рис. 1. Случай $N = 50$, $\gamma = 3$ в произведении (12).

Альтернативный подход, основанный на рядах Тейлора (см. лемму 1), имеет свои преимущества, однако объем вычислений при этом существенно возрастает. Заметим, что при $g(k) = \operatorname{ch} k$ и произвольных комплексных значениях γ мы, следуя доказательству леммы 1, находим, что в окрестности точки $k = 0$

$$\varphi(k) \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{k^2}{\gamma^2 - 1} + \frac{1}{4!} \frac{k^4(\gamma^2 + 5)}{(\gamma^2 - 1)^2(\gamma^2 + 1)} + \frac{k^6}{6!} \frac{\gamma^6 + 14\gamma^2(1 + \gamma^2) + 61}{(\gamma^2 - 1)^3(\gamma^2 + 1)(\gamma^4 + \gamma^2 + 1)} + \dots \quad (11)$$

Полюса найденных коэффициентов располагаются, как и следовало ожидать, на единичной окружности $|\gamma| = 1$. Отметим, что интерполяционной задаче из работы [3], определяющей солитонный сектор в методе обратной задачи, соответствует предельный случай $\gamma \rightarrow -1$ в общем уравнении (8).

Приведем два известных примера, связанных с факторизационной формулой (10).

ПРИМЕР 1. Для обобщенного уравнения Кантора (5) формула (10) дает разложение

$$\varphi(k) = \frac{\psi(k)}{k} = \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{k}{\gamma^n} \approx \varphi_N(k), \quad \varphi_N(k) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{n=1}^N \operatorname{ch} \frac{k}{\gamma^n} \quad (12)$$

(см. рис. 1). При $\gamma = 2$ это разложение эквивалентно, как нетрудно проверить, известным в теории целых функций формулам³⁾

$$\begin{aligned} \psi(k) &= \operatorname{sh} k, & \operatorname{sh}(\pi z) &= \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right), \\ \frac{\psi'}{\psi}(k\pi) &= \frac{1}{k} + 2kf(k), & \operatorname{th}(k\pi) &= 2k[4f(2k) - f(k)], & f(k) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + n^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

³⁾Эти формулы используются в следующем разделе.

Функцию $g(k)$ в уравнении (8) можно при $\varepsilon = 0$ рассматривать как q -разностный аналог логарифмической производной. При таком подходе формула (10) решает обратную задачу восстановления целой функции $\varphi(k)$ экспоненциального типа по ее γ -производной $g(k)$. В отличие от логарифмической производной, здесь бесконечное произведение заменяет интегрирование, и возникают вопросы, связанные с накоплением при больших k нулей сомножителей в формуле (10).

ПРИМЕР 2. Пусть $g(k) = 1 + k$ и $\gamma > 1$ (ср. со статьей [2]). Тогда с учетом неравенства $\ln(1+x) \leq x$, $x > 0$, формула (10) приводит к выражениям

$$\varphi(k) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{\gamma^n}\right), \quad |\varphi(k)| \leq \exp\left(\frac{|k|}{\gamma-1}\right).$$

Нули этой целой функции образуют, очевидно, геометрическую прогрессию (ср. с результатами работы [4]).

3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ НУЛЕЙ

Возвращаясь к графику функции, показанному на рис. 1, рассмотрим поведение решений обобщенного уравнения Кантора (5) на вертикальной оси $k = i\xi$ комплексной плоскости k . Всюду ниже предполагается, если не оговорено противное, что $\varepsilon = 0$ и вещественный параметр $\gamma > 1$. Так как $|\operatorname{ch}(i\xi)| = |\cos \xi| \leq 1$, из формулы (12) следует, что последовательность тригонометрических многочленов $\varphi_N(k)$, $N = 1, 2, \dots$, является при $k = i\xi$ монотонной: $|\varphi_{N+1}| \leq |\varphi_N|$, и ограниченной: $|\varphi_N(i\xi)| \leq 1$. При целом γ частичные произведения φ_N являются периодическими функциями ξ , но их период неограниченно возрастает при $N \rightarrow \infty$ и, вообще говоря, появляются кратные нули у предельной функции $\varphi(i\xi)$. На графике, соответствующем $\gamma = 3$, первый нуль кратности два появляется в интервале $\xi \in (14, 15)$, а кратности три – при $40 < \xi < 45$ (см. рис. 1).

При $\gamma = 2$ в исключительном случае (7) предельная функция $|\varphi(i\xi)| \leq 1/|\xi|$ стремится к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$. Покажем, что при $\gamma \neq 2$ это не так. Используя приближенную формулу (11) для вычисления $\varphi(i\pi)$, можно убедиться, что при возрастании γ решение меняет знак в точке $\xi = \pi$ при $\gamma = 2$ с отрицательного на положительный. В частности, $\varphi(i\pi) \approx 0,46 > 0$ при $\gamma = 3$. Отметим, что на вертикальной оси $k = i\xi$ коэффициенты разложения в ряд Тейлора (11) в нуле приводят нас к знакопеременному ряду, и при $\gamma = 3$, например,

$$\varphi\left(\frac{i\pi}{2}\right) \simeq 1 - 0,1542 + 0,0055 > 0,8457.$$

Так как $\operatorname{ch}(i\pi) = -1$, из функционального уравнения (5) следует, что

$$k_j = i\xi_j, \quad \xi_j = \gamma^j \pi, \quad j = 1, 2, \dots, \implies \varphi(k_j) = (-1)^j \varphi(i\pi). \quad (14)$$

Таким образом, $|\varphi(i\xi_j)| = |\varphi(i\pi)|$, и произведение (10) при $\gamma \neq 2$ не стремится к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Из представления (10) решений обобщенного уравнения Кантора (5) следует, что при вещественном γ все нули целой функции $\varphi(k)$ располагаются на вертикальной оси. Обозначим через $n(t)$ так называемую “считающую функцию” (counting

function), непрерывную слева и монотонную, подсчитывающую число нулей k_n функции $\varphi(k)$, удовлетворяющих условию $|k_n| < t$. Основным результатом настоящей статьи является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi(k)$ – решение (12) уравнения (5) с $\varepsilon = 0$ и $\gamma > 1$. Тогда считающая функция $n(t)$ нулей целой функции $\varphi(k)$ полностью определяется условиями

$$n(\gamma t) - n(t) = m(t), \quad n(0) = 0, \quad (15)$$

где $m(t)$ – считающая функция числа полюсов функции $\operatorname{th} k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для разности $f(t) = n_1(t) - n_2(t)$ двух решений уравнения (15) справедливы равенства

$$f(\gamma t) = f(t), \quad f(0) = 0 \implies f(\tau) = f\left(\frac{\tau}{\gamma^n}\right).$$

Устремляя здесь $n \rightarrow \infty$, получаем $f(\tau) = f(0) = 0$. Таким образом, решение уравнения (15) единственно.

Переход к логарифмическим производным в обобщенном уравнении Кантора при $\varepsilon = 0$ упрощает это уравнение⁴⁾ и приводит его к следующему уравнению в пространстве мероморфных функций:

$$\gamma \frac{\psi'}{\psi}(\gamma k) = \frac{\psi'}{\psi}(k) + \operatorname{th} k, \quad \operatorname{th} k = D \ln \operatorname{ch} k. \quad (16)$$

Интегрирование по границе круга $|k| < t$ в этом соотношении дает уравнение (15).

При суммировании числа нулей в $n(t)$ учитывается их кратность. Как уже отмечалось, не все нули рассматриваемых целых функций $\varphi(k)$ являются простыми, и в силу формулы (12) при $\gamma = 3$ мы находим, что

$$\varphi(k_n^m) = 0, \quad k_n^m = 3^m(2n+1)\frac{i\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Другими словами, решение $\varphi(k)$ обращается в нуль в точках, “ γ -кратных” нулям функции $\operatorname{ch} k$ (см. (13)). Первый нуль $k_0^1 \approx i4,7$ является простым, но уже следующий $k_0^2 = k_1^1$ имеет кратность два. С ростом m кратность нулей неограниченно возрастает, и при использовании бесконечного произведения (10) в численных экспериментах мы вынуждены заранее ограничивать число сомножителей. График на рис. 1 соответствует, в частности, выбору $N = 50$ в формуле (12).

Теорема 2 позволяет избежать указанных трудностей и сводит вопрос о распределении нулей для рассматриваемого класса целых функций к задаче из области *перечислительной математики*. В общем случае (10) аналог уравнения (15) принимает вид

$$n(\gamma t) - n(t) = \int_0^t \delta(s - |k_j|) ds,$$

где k_j – нули целой функции $g(k)$, а вместо (16) мы получаем

$$\gamma \frac{\varphi'}{\varphi}(\gamma k) = \frac{\varphi'}{\varphi}(k) + \frac{g'(k)}{g(k)}.$$

Отметим, что при любом γ решением однородного уравнения является функция $1/k$.

⁴⁾Параметр β при этом исчезает.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как было недавно показано (см. [5]), прямая задача рассеяния для уравнения Шредингера с финитным потенциалом $q(x)$ в пространстве мер Бореля сводится к преобразованию Фурье–Стилтьеса функции ограниченной вариации $Q(x)$. Известно, что всякую такую функцию $Q(x)$ можно представить в виде суммы трех компонент – функции скачков, абсолютно непрерывной функции и сингулярной функции (производная последней равна нулю почти всюду). Примером сингулярной функции является функция Кантора–Лебега, преобразование Фурье–Стилтьеса которой удовлетворяет функциональному уравнению (2). Обобщение этого примера в теореме 1 привело к построению класса целых функций экспоненциального типа, закодированных параметром γ в формуле (8). В рамках указанного класса целых функций предполагается исследовать разрешимость модельного уравнения обратной задачи рассеяния

$$a(k)a(-k) = 1 + b(k)b(-k). \quad (18)$$

В обратной задаче (см. работу [5]) в случае финитных потенциалов эти функции $a(k)$ и $b(k)$ заменяют данные рассеяния. При дополнительных предположениях четности

$$a(-k) = a(k), \quad b(-k) = b(k) \quad \implies \quad a^2(k) - b^2(k) = 1$$

общее решение последнего уравнения в классе целых функций экспоненциального типа выражается через тригонометрические функции (ср. с книгой [6]). Это известное решение уравнения (18) соответствует исключительному значению параметра $\gamma = 2$ (см. пример 1).

Список литературы

- [1] O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov, M. Vuorinen, *Expo. Math.*, **24**:1 (2006), 1–37.
- [2] В. П. Спиридонов, *УМН*, **63**:3(381) (2008), 3–72.
- [3] А. Б. Шабат, *ТМФ*, **179**:3 (2014), 303–316.
- [4] A. B. Shabat, *Inverse Problems*, **8**:2 (1992), 303–308.
- [5] Р. Ч. Кулаев, А. Б. Шабат, *Обратная задача рассеяния для финитных потенциалов в пространстве мер Бореля*, Препринт ЮМИ, Владикавказ, 2016.
- [6] Б. Я. Левин, *Целые функции*, Курс лекций, Изд-во Моск. ун-та, М., 1971.

Поступила в редакцию 15.05.2016