Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аллилуева, А. И. Шафаревич, Нестандартные характеристики и локализованные асимптотические решения линеаризованной системы магнитной гидродинамики с малыми вязкостью и сопротивлением, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 1, 191–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:50:09

© 2017 г. А. И. Аллилуева^{*†‡}, А. И. Шафаревич^{*†‡§}

НЕСТАНДАРТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С МАЛЫМИ ВЯЗКОСТЬЮ И СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Описаны асимптотические решения задачи Коши для линеаризованной системы магнитной гидродинамики с начальными условиями, локализованными в малой окрестности кривой или двумерной поверхности. Исследовано влияние эффекта смены кратности характеристик на такие решения. Доказана равномерная оценка остатка.

Ключевые слова: уравнения магнитной гидродинамики, нестандартные характеристики.

DOI: 10.4213/tmf9228

1. ВВЕДЕНИЕ

Линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики (МГД) описывают эволюцию малых возмущений поля скоростей и магнитного поля в проводящей жидкости. Исследованию такой эволюции в разных ситуациях посвящена обширная литература (см., например, [1]–[3] и цитированную там литературу). При описании коротковолновых асимптотик решений этих уравнений возникают эффекты, связанные со сменой кратности характеристик, которая в данной ситуации оказывается весьма специфической (не выполнены стандартные условия общего положения); в работе [4] эти эффекты описаны в случае идеальной и идеально проводящей

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 16-11-10282).

^{*}Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
E-mail: esina_anna@list.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

[§]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: shafarev@yahoo.com

жидкости для решений ВКБ. В то же время с точки зрения приложений интересны локализованные возмущения (вихри), образующие узкие нити и тонкие пленки. При описании таких решений, помимо упомянутого выше пересечения гладких характеристических поверхностей, возникает еще особая поверхность, связанная с негладкостью символа оператора МГД. Кроме того, поскольку сильные вязкость и сопротивление быстро гасят мелкомасштабные возмущения, локализованные решения могут существовать только при условии малости старшей по производным части оператора. Другими словами, локализованные асимптотические решения связаны с нестандартными (в смысле В. П. Маслова [5]) характеристиками.

Ниже описана и обоснована асимптотика решения задачи Коши для уравнений МГД с малыми вязкостью и сопротивлением и с начальными условиями, локализованными вблизи кривой или двумерной поверхности. Решение представляется в виде суммы альфвеновских мод и слагаемых, описывающих их взаимодействие.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Малые возмущения заданного движения проводящей жидкости описываются линейаризованной системой МГД

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (V, \nabla)v + (v, \nabla)V - (B, \nabla)b - (b, \nabla)B + \nabla P &= \varepsilon^2 \nu \Delta v, \\ \frac{\partial b}{\partial t} + (V, \nabla)b - (b, \nabla)V + (v, \nabla)B - (B, \nabla)v &= \varepsilon^2 \mu \Delta b, \\ (\nabla, v) &= 0, \quad (\nabla, b) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^3$, $B(x)$, $V(x)$ – заданные гладкие векторные поля (невозмущенные магнитное поле и поле скоростей), ограниченные вместе со всеми производными, v, b – неизвестные векторные поля, зависящие от времени (возмущения поля скоростей и магнитного поля), P – неизвестная скалярная функция (магнитное давление), μ, ν – положительные константы (коэффициенты сопротивления и вязкости), $\varepsilon \rightarrow 0$ – малый параметр. Относительно полей B, V будем предполагать, что они коммутируют:

$$(V, \nabla)B - (B, \nabla)V = 0;$$

это свойство выполнено, в частности, для стационарных решений нелинейной системы МГД. Для описания асимптотических решений удобно использовать сумму и разность внешних полей $U = V - B$, $W_2 = V + B$ и самих решений $w = v - b$, $u = v + b$. В этих обозначениях уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (W, \nabla)u + (w, \nabla)U + \nabla P &= \varepsilon^2 \left(\frac{\nu + \mu}{2} \Delta u + \frac{\nu - \mu}{2} \Delta w \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (U, \nabla)w + (u, \nabla)W + \nabla P &= \varepsilon^2 \left(\frac{\nu + \mu}{2} \Delta w + \frac{\nu - \mu}{2} \Delta u \right), \\ (\nabla, u) &= 0, \quad (\nabla, w) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Сформулируем для этих уравнений задачу Коши с бездивергентными начальными условиями, локализованными вблизи кривой или поверхности:

$$u|_{t=0} = u_0\left(\frac{\Phi^0(x)}{\varepsilon}, x\right), \quad w|_{t=0} = w_0\left(\frac{\Phi^0(x)}{\varepsilon}, x\right), \quad (3)$$

где $u_0(y, x), w_0(y, x)$ – гладкие функции, ограниченные вместе со всеми производными и убывающие при $|y| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|y|$, $\Phi(x)$ – гладкая скалярная или двумерная векторная функция, $y = \Phi(x)/\varepsilon$ – соответствующие “быстрые” переменные. Мы рассмотрим следующие две ситуации.

1. Начальные условия локализованы вблизи двумерной поверхности; в этом случае Φ^0 – скалярная функция, причем уравнение $\Phi^0 = 0$ задает гладкую регулярную компактную двумерную поверхность M_0 ; мы будем считать, что длина вектора $\nabla\Phi^0$ ограничена сверху и снизу положительными константами.

2. Начальные условия локализованы вблизи двумерной кривой; в этом случае Φ^0 – двумерная вектор-функция, причем уравнения $\Phi^0 = 0$ задают гладкую регулярную замкнутую кривую γ_0 ; мы будем считать, что векторы $\nabla\Phi_1^0, \nabla\Phi_2^0$ линейно независимы в $\mathbb{R}^3$ и постоянны вне компакта.

Наша цель – описание асимптотики решения задачи Коши (2), (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из уравнений (2) можно исключить давление P ; для этого рассмотрим проектор на бездивергентные векторные поля – псевдодифференциальный оператор $\hat{\Pi}$ вида

$$\hat{\Pi}f = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(k,x)} \Pi(k) \tilde{f} dk, \quad \Pi(k) = E - \frac{k \otimes k}{k^2},$$

где $\tilde{f}$ – преобразование Фурье векторного поля f , E – единичная матрица. Применяя этот оператор к уравнениям (2), получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathcal{L}h = \varepsilon^2 \mathcal{D}\Delta h, \quad (4)$$

где

$$h = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \hat{\Pi}(W, \nabla) & \hat{\Pi} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \hat{\Pi} \frac{\partial W}{\partial x} & \hat{\Pi}(U, \nabla) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu + \mu & \nu - \mu \\ \nu - \mu & \nu + \mu \end{pmatrix}.$$

Используя тот факт, что коммутатор бездивергентного поля бездивергентен, все входящие в $\mathcal{L}$ дифференциальные операторы первого порядка можно вынести за оператор $\hat{\Pi}$; в результате получим

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \{W, \cdot\} & 0 \\ 0 & \{U, \cdot\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\Pi} \frac{\partial W}{\partial x} & \hat{\Pi} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \hat{\Pi} \frac{\partial W}{\partial x} & \hat{\Pi} \frac{\partial U}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ – коммутатор векторных полей.

3. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Решение задачи Коши (2), (3) имеет следующую структуру. Асимптотический ряд состоит из слагаемых четырех типов: два из них описывают две альфвеновские моды, а два других – их взаимодействие, т. е. влияние первой моды на вторую и второй на первую. Опишем эти слагаемые. Введем сначала соответствующие характеристики. Пусть g_t – поток поля W , а q_t – поток поля U ; рассмотрим фазовые функции

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, t) &= \Phi^0(g_{-t}x), & \Phi_2(x, t) &= \Phi^0(q_{-t}x), \\ \Phi_{12}(x, t, \tau) &= \Phi^0(g_{-(t-\tau)}q_{-\tau}x), & \Phi_{21}(x, t, \tau) &= \Phi^0(q_{-(t-\tau)}g_{-\tau}x).\end{aligned}\quad (6)$$

Отметим, что эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + (W, \nabla) \Phi_1 &= 0, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + (U, \nabla) \Phi_2 &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial t} + (W, \nabla) \Phi_{12} &= 0, & \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial t} + (U, \nabla) \Phi_{21} &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

и начальным условиям

$$\Phi_j|_{t=0} = \Phi^0(x), \quad \Phi_{12}|_{t=\tau} = \Phi_2(\tau), \quad \Phi_{21}|_{t=\tau} = \Phi_1(\tau). \quad (8)$$

Отметим, кроме того, равенства (см. [4])

$$\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \tau} = (W - U, \nabla) \Phi_{12}, \quad \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial \tau} = (U - W, \nabla) \Phi_{21}. \quad (9)$$

Далее рассмотрим кокасательные векторы к $\mathbb{R}^3$, движущиеся вдоль соответствующих траекторий:

$$p_j = \nabla \Phi_j k, \quad p_{ij} = \nabla \Phi_{ij} k, \quad (10)$$

где k – число, если функция Φ_0 скалярна (т. е. начальное условие локализовано вблизи поверхности), или двумерный вектор, если функция Φ_0 векторная (начальное условие сосредоточено вблизи кривой; в этом случае $\nabla \Phi k$ – произведение (3×2) -матрицы на двумерный вектор). Эти векторы удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 + \frac{\partial W^*}{\partial x} p_1 &= 0, & \dot{p}_2 + \frac{\partial U^*}{\partial x} p_2 &= 0, \\ \dot{p}_{12} + \frac{\partial W^*}{\partial x} p_{12} &= 0, & \dot{p}_{21} + \frac{\partial U^*}{\partial x} p_{21} &= 0,\end{aligned}\quad (11)$$

где точкой обозначена производная вдоль соответствующего поля (W или U).

Наконец, опишем амплитуды альфвеновских волн. Обозначим через $\tilde{u}_1(x, t, k)$, $\tilde{w}_2(x, t, k)$, $\tilde{u}_{12}(x, \xi, \eta, k)$, $\tilde{u}_{21}(x, \xi, \eta, k)$, $\tilde{w}_{12}(x, \xi, \eta, k)$, $\tilde{w}_{21}(x, \xi, \eta, k)$ решения следующих задач:

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} + (W, \nabla) \tilde{u}_1 - \frac{p_1 \otimes p_1}{p_1^2} \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_1 = -p_1^2 \frac{\nu + \mu}{2} \tilde{u}_1, \quad \tilde{u}_1|_{t=0} = \tilde{u}_0(k, x); \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_2}{\partial t} + (U, \nabla) \tilde{w}_2 - \frac{p_2 \otimes p_2}{p_2^2} \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_2 = -p_2^2 \frac{\nu + \mu}{2} \tilde{w}_2, \quad \tilde{w}_2|_{t=0} = \tilde{w}_0(k, x); \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_{12}}{\partial \xi} + (W, \nabla) \tilde{u}_{12} + \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{12} - \frac{p_{12} \otimes p_{12}}{p_{12}^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{12} + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12} \right) = \\ = -p_{12}^2 \left(\frac{\nu + \mu}{2} u_{12} + \frac{\nu - \mu}{2} \tilde{w}_{12} \right), \\ \frac{\partial \tilde{w}_{12}}{\partial \eta} + (U, \nabla) \tilde{w}_{12} + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12} - \frac{p_{12} \otimes p_{12}}{p_{12}^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{12} + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12} \right) = \\ = -p_{12}^2 \left(\frac{\nu + \mu}{2} \tilde{w}_{12} + \frac{\nu - \mu}{2} \tilde{u}_{12} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tilde{w}_{12}|_{\eta=0} = 0, \quad \tilde{u}_{12}|_{\xi=0} = - \left(p_2^2 \frac{\nu - \mu}{2} + \left(E - \frac{p_2 \otimes p_2}{p_2^2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right) \tilde{w}_2;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_{21}}{\partial \xi} + (W, \nabla) \tilde{u}_{21} + \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{21} - \frac{p_{21} \otimes p_{21}}{p_{21}^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{21} + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{21} \right) = \\ = -p_{21}^2 \left(\frac{\nu + \mu}{2} \tilde{u}_{21} + \frac{\nu - \mu}{2} \tilde{w}_{21} \right), \\ \frac{\partial \tilde{w}_{21}}{\partial \eta} + (U, \nabla) \tilde{w}_{21} + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{21} - \frac{p_{21} \otimes p_{21}}{p_{21}^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{21} + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{21} \right) = \\ = -p_{21}^2 \left(\frac{\nu + \mu}{2} \tilde{w}_{21} + \frac{\nu - \mu}{2} \tilde{u}_{21} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tilde{u}_{21}|_{\eta=0} = 0, \quad \tilde{w}_{21}|_{\xi=0} = - \left(p_1^2 \frac{\nu - \mu}{2} + \left(E - \frac{p_1 \otimes p_1}{p_1^2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right) \tilde{u}_1.$$

Здесь $\tilde{u}_0(x, k)$, $\tilde{w}_0(x, k)$ – преобразования Фурье начальных функций по “быстрым” переменным y .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Задачи (12), (13) после перехода на характеристики сводятся к задачам Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Задачи (14), (15) аналогичны задаче Гурса – их разрешимость и гладкость устанавливается сведением к интегральным уравнениям и применением метода последовательных приближений.

Основной результат работы – следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи Коши (2), (3) представляется в виде*

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{(i/\varepsilon)k \cdot \Phi_1(x,t)} \tilde{u}_1(x, t, k) dk + \\
 & + \int_0^t d\tau \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{(i/\varepsilon)k \cdot \Phi_{12}(x,t,\tau)} \tilde{u}_{12}(x, \xi, \eta, k)|_{\xi=t-\tau, \eta=\tau} dk + \\
 & + \int_0^t d\tau \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{(i/\varepsilon)k \cdot \Phi_{21}(x,t,\tau)} \tilde{u}_{21}(x, \xi, \eta, k)|_{\xi=t-\tau, \eta=\tau} dk + \hat{u}, \quad \hat{u} = O(\varepsilon^{1-\alpha}),
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{(i/\varepsilon)k \cdot \Phi_2(x,t)} \tilde{w}_2(x, t, k) dk + \\
 & + \int_0^t d\tau \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{(i/\varepsilon)k \cdot \Phi_{12}(x,t,\tau)} \tilde{w}_{12}(x, \xi, \eta, k)|_{\xi=t-\tau, \eta=\tau} dk + \\
 & + \int_0^t d\tau \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{(i/\varepsilon)k \cdot \Phi_{21}(x,t,\tau)} \tilde{w}_{21}(x, \xi, \eta, k)|_{\xi=t-\tau, \eta=\tau} dk + \hat{w}, \quad \hat{w} = O(\varepsilon^{1-\alpha}).
 \end{aligned}$$

Здесь $s = 2$ для решений, локализованных вблизи поверхности кривой, и $s = 1$ для решений, локализованных вблизи поверхности, $\alpha > 0$ может быть сделано сколь угодно малым (не зависящим от ε), оценка остатка понимается в равномерной норме.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Первые слагаемые в выражениях для каждой функции представляют собой альфвеновские моды, порожденные начальными локализованными полями. Слагаемые, содержащие интегралы по τ , описывают взаимодействие альфвеновских мод.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Очевидно, альфвеновские моды локализованы вблизи сдвига начального асимптотического носителя (поверхности M_0 или кривой γ_0) вдоль траекторий поля W или U , соответствующая гладкая поверхность или кривая задается уравнениями $\Phi_1(x, t) = 0$ или $\Phi_2(x, t) = 0$. Локализация слагаемых, описывающих взаимодействие, вообще говоря, может быть различной, она зависит от наличия и структуры точек касания начального асимптотического носителя. В дальнейшем мы планируем детально исследовать локализацию и возможность временного роста асимптотических решений.

Ниже приведено конструктивное доказательство теоремы 1.

4. КОНСТРУКЦИЯ ФОРМАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКИ

4.1. Формальный ряд для регуляризованной задачи. Для определенности будем считать, что $s = 2$ (решение локализовано в окрестности кривой); для $s = 1$ все выкладки несколько проще. Поскольку разложение локализованной функции содержит, вообще говоря, все гармоники, а символ оператора (4) негладкий при нулевых кокасательных векторах, для построения асимптотического ряда нужно вырезать малую окрестность нулевых гармоник и затем отдельно оценить образовавшуюся функцию. С этой целью введем срезающую функцию $\chi(k)$, $k \in \mathbb{R}^s$,

равную нулю в окрестности нуля и единице в окрестности бесконечности; разобьем начальное условие $h^0 = {}^t(u^0, w^0)$ на две части:

$$h^0(y, x, t) = h_A^0 + h_B^0, \quad h_A^0 = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{i\Phi^0 \cdot k/\varepsilon} \chi\left(\frac{k}{\varepsilon^\beta}\right) \tilde{h}^0(k, x) dk, \quad (17)$$

где $\beta \in (0, 1)$ и достаточно близко к единице. Сначала заменим начальное поле h^0 на h_A^0 . Будем искать формальное асимптотическое решение этой задачи в виде

$$h(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (h_1^j + h_2^j + h_{12}^j + h_{21}^j), \quad (18)$$

где

$$h_l^j = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{(i/\varepsilon)k \cdot \Phi_l(x, t)} \tilde{h}_l^j(k, x, t) \chi\left(\frac{k}{\varepsilon^\beta}\right) dk,$$

$$h_{lm} = \int_0^t d\tau \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{(i/\varepsilon)k \cdot \Phi_{lm}(x, t, \tau)} \tilde{h}_{lm}^j(x, t, \tau, k) \chi\left(\frac{k}{\varepsilon^\beta}\right) dk.$$

В аналогичном виде будем искать давление (соответствующие слагаемые обозначим P_l^j и P_{lm}^j). Подставим (18) в (2) и приравняем слагаемые при разных степенях ε . При ε^{-1} вне интегралов по τ получим

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_l}{\partial t} + (W, \nabla) \Phi_l & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_l}{\partial t} + (U, \nabla) \Phi_l \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial y} h_l^0 + \begin{pmatrix} \nabla \Phi_l^0 \\ \nabla \Phi_l \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial y} P_l = 0. \quad (19)$$

Из условий $(\nabla, u) = 0$, $(\nabla, w) = 0$ вытекает, что $(\nabla \Phi_l, \nabla) \cdot (\partial h^0 / \partial y) = 0$. Умножая вектор из первых трех строк в (19) скалярно на градиенты функций Φ_l^m (компонент вектора Φ_l), получим

$$\sum_{m,n} (\nabla \Phi_l^m, \nabla \Phi_l^n) \frac{\partial^2}{\partial y_m \partial y_n} P_l^0 = 0.$$

Это эллиптическое уравнение, поэтому из условия убывания P_l на бесконечности вытекает, что $P_l = 0$. Теперь из равенств (19) вытекают уравнения (7) на Φ_l и структура векторов h_l^0 :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + (W, \nabla) \Phi_1 = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + (U, \nabla) \Phi_2 = 0, \quad w_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0.$$

В дальнейшем положим $w_1^j = 0$, $u_2^j = 0$ для всех j ; ниже доказано существование формальной асимптотики с такой структурой. Рассмотрим теперь слагаемые того же порядка, содержащие интегралы по τ :

$$\sum_{k \neq m} \int_0^t \left(\left(\frac{\partial \Phi_{lm}}{\partial t} + (W, \nabla) \Phi_{lm} \right) \cdot \frac{\partial u_{lm}^0}{\partial y} + \nabla \Phi_{lm} \cdot \frac{\partial P_{lm}^0}{\partial y} \right) d\tau = O(\varepsilon),$$

$$\sum_{k \neq m} \int_0^t \left(\left(\frac{\partial \Phi_{lm}}{\partial t} + (U, \nabla) \Phi_{lm} \right) \cdot \frac{\partial w_{lm}^0}{\partial y} + \nabla \Phi_{lm} \cdot \frac{\partial P_{lm}^0}{\partial y} \right) d\tau = O(\varepsilon), \quad (20)$$

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial y} \cdot (u_{lm}^0, \nabla) \Phi_{lm} d\tau = \int_0^t \frac{\partial}{\partial y} \cdot (w_{lm}^0, \nabla) \Phi_{lm} d\tau = O(\varepsilon).$$

Учитывая уравнения (7) на функции Φ_{lm} и полагая $P_{lm}^0 = 0$, получим, что векторные равенства приводятся к виду

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial t} + (W, \nabla) \Phi_{21} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} u_{21}^0 d\tau &= O(\varepsilon), \\ \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial t} + (U, \nabla) \Phi_{12} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} w_{12}^0 d\tau &= O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (21)$$

Преобразуем первый интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial t} + (W, \nabla) \Phi_{21} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} u_{21}^0 d\tau &= \\ = \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial t} + (U, \nabla) \Phi_{21} - (U - W, \nabla) \Phi_{21} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} u_{21}^0 d\tau &= - \int_0^t \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial}{\partial y} u_{21}^0 d\tau = \\ = -\varepsilon \int_0^t \left(\frac{d}{d\tau} u_{21}^0 \left(\frac{\Phi_{21}(x, t, \tau)}{\varepsilon}, x, t, \tau \right) - \frac{\partial u_{21}^0}{\partial \tau} \left(\frac{\Phi_{21}(x, t, \tau)}{\varepsilon}, x, t, \tau \right) \right) d\tau &= \\ = -\varepsilon u_{21}^0|_{\tau=t} + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial u_{21}^0}{\partial \tau} \left(\frac{\Phi_{21}(x, t, \tau)}{\varepsilon}, x, t, \tau \right) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали равенства (9) и положили $u_{21}^0|_{\tau=0} = 0$ (ср. с (15)). Аналогично преобразуется второй интеграл в (21), в результате эти равенства принимают вид

$$\begin{aligned} -\varepsilon u_{21}^0|_{\tau=t} + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial u_{21}^0}{\partial \tau} \left(\frac{\Phi_{21}(x, t, \tau)}{\varepsilon}, x, t, \tau \right) d\tau &= O(\varepsilon), \\ -\varepsilon w_{12}^0|_{\tau=t} + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial w_{12}^0}{\partial \tau} \left(\frac{\Phi_{12}(x, t, \tau)}{\varepsilon}, x, t, \tau \right) d\tau &= O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, свойства функций Φ_j, Φ_{lm} гарантируют выполнение векторных равенств (2) (mod $O(1)$), причем в следующее приближение переходят слагаемые (22).

Соберем теперь слагаемые при ε^0 , возникающие при подстановке ряда (18) в уравнения (2). С учетом свойств функций Φ, h^1 и равенств (22) вне интегралов по τ получаем

$$\begin{aligned} \sum_l \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + (W, \nabla) \frac{\partial U}{\partial x} \right) h_l^0 + \left(\frac{\nabla \Phi_l^1}{\nabla \Phi_l^1} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} P_l^1 \right] + \\ + \sum_{s \neq l} (h_{sl}^0|_{\tau=t} + h_{ls}^0|_{\tau=t}) = \left(\frac{u_{21}^0}{w_{12}^0} \right) \Big|_{t=\tau} + \sum_{m,n,l} (\nabla \Phi_l^m, \nabla \Phi_l^n) \frac{\partial^2}{\partial y_m \partial y_n} \mathcal{D} h_l^0, \end{aligned} \quad (23)$$

где $s \neq l$. Здесь учтены внеинтегральные слагаемые в (22). Рассмотрим первое векторное уравнение (т.е. уравнение, содержащее $\partial u / \partial t$), для второго выкладки аналогичны. Учитывая структуру вектора h_1^0 ($w_1^0 = 0$), получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (W, \nabla) \right) u_1^0 + \nabla \Phi_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y} P_1^0 - \frac{\mu + \nu}{2} \sum_{m,n} (\nabla \Phi_1^m, \nabla \Phi_1^n) \frac{\partial^2}{\partial y_m \partial y_n} u_1^0 = \\ = -\nabla \Phi_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} P_2^0 - \frac{\partial U}{\partial x} w_2^0 - u_{12}^0|_{\tau=t} + \frac{\nu - \mu}{2} \sum_{m,n} (\nabla \Phi_2^m, \nabla \Phi_2^n) \frac{\partial^2}{\partial y_m \partial y_n} w_2^0. \end{aligned} \quad (24)$$

Функции в левой части равенства зависят от быстрых переменных Φ_1/ε , а в правой части – от быстрых переменных Φ_2/ε (напомним, что $\Phi_{21}|_{\tau=t} = \Phi_2(t)$), поэтому обе части равенства должны обращаться в нуль. Рассмотрим сначала правую часть. Подставляя вместо функций от y соответствующие интегралы (см. (18)), получим

$$ip_2\tilde{P}_2^1 + \frac{\partial U}{\partial x}\tilde{w}_2^0 + \tilde{u}_{12}^0|_{\tau=t} + \frac{\nu - \mu}{2}p_2^2\tilde{w}_2^0 = 0.$$

Спроецируем это равенство на прямую, параллельную вектору p_2 , и на ортогональную к ней плоскость; поскольку из условий $(\nabla, u) = 0$, $(\nabla, w) = 0$ следует, что $(p_2, \tilde{w}_2^0) = 0$ и $(p_2, \tilde{u}_{21}|_{\tau=t}^0) = 0$, получаем

$$\tilde{P}_2^1 = \frac{i}{p_2^2} \left(p_2, \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_2^0 \right) \quad (25)$$

и

$$\tilde{u}_{12}^0|_{\tau=t} = -\frac{\nu - \mu}{2}p_2^2\tilde{w}_2^0 - \left(E - \frac{p_2 \otimes p_2}{p_2^2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_2^0$$

(отметим, что последнее равенство и условие $u_{21}^0|_{\tau=0} = 0$ совпадают с условиями в (14), (15)).

Рассмотрим теперь левую часть в (24). Подставляя вместо функций от y интегралы, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (W, \nabla) \right) \tilde{u}_1^0 + ip_1\tilde{P}_1^1 + p_1^2 \frac{\mu + \nu}{2} \tilde{u}_1^0 = 0.$$

Спроецируем это равенство на прямую, параллельную вектору p_1 , и на ортогональную к ней плоскость; отметим, что, поскольку функция Φ_1 удовлетворяет уравнениям (7), p_1 удовлетворяет (11). Кроме того, из условия $(\nabla, u) = 0$ следует, что $(p_1, \tilde{u}_1^0) = 0$, поэтому

$$\left(p_1, \left(\frac{\partial}{\partial t} + (W, \nabla) \right) \tilde{u}_1^0 \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (W, \nabla) \right) (p_1, \tilde{u}_1^0) - (u_1^0, \dot{p}_1) = \left(p_1, \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_1^0 \right).$$

В результате две указанные проекции приводят к равенствам

$$\tilde{P}_1^1 = \frac{i}{p_1^2} \left(p_1 \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_1^0 \right) \quad (26)$$

и

$$\frac{\partial \tilde{u}_1^0}{\partial t} + (W, \nabla) \tilde{u}_1^0 - \frac{p_1 \otimes p_1}{p_1^2} \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_1^0 = -p_1^2 \frac{\nu + \mu}{2} \tilde{u}_1^0;$$

отметим, что последнее уравнение совпадает с (12).

Аналогичные выкладки, примененные ко второму уравнению в (23), приводят к тем же равенствам (26), (25), уравнению (13) для $\tilde{w}_2^0$ и условиям $\tilde{w}_{12}^0|_{\tau=0} = 0$ и

$$\tilde{w}_{21}^0|_{\tau=t} = -\frac{\nu - \mu}{2}p_1^2\tilde{u}_1^0 - \left(E - \frac{p_1 \otimes p_1}{p_1^2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_1^0,$$

совпадающим с условиями в (14), (15).

Рассмотрим теперь слагаемые порядка ε^0 , содержащие интегралы по τ . Выпишем уравнения, содержащие функции с индексами 12 (для функций с индексами 21 выкладки аналогичны). Заменим функции от y соответствующими интегралами; приравняв к нулю подынтегральные функции, с учетом слагаемых (22) получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (W, \nabla) \right) \tilde{u}_{12}^0 + \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{12}^0 + ip_{12} P_{12}^1 &= -p_{12}^2 \left(\frac{\nu + \mu}{2} \tilde{u}_{12}^0 + \frac{\nu - \mu}{2} \tilde{w}_{12}^0 \right), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (U, \nabla) \right) \tilde{w}_{12}^0 + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12}^0 + ip_{12} P_{12}^1 + \frac{\partial w_{12}^0}{\partial \tau} &= -p_{12}^2 \left(\frac{\nu + \mu}{2} \tilde{w}_{12}^0 + \frac{\nu - \mu}{2} \tilde{u}_{12}^0 \right). \end{aligned}$$

Применим к этим уравнениям ту же процедуру проецирования на прямую, параллельную вектору p_{12} , и ортогональную ему плоскость. Отметим равенства

$$\begin{aligned} \left(p_{12}, \left(\frac{\partial}{\partial t} + (W, \nabla) \right) \tilde{u}_{12}^0 + \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{12}^0 \right) &= \\ = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (W, \nabla) \right) (\tilde{u}_{12}^0, p_{12}^0) + \left(p_{12}^0, \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{12}^0 + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12}^0 \right) &= \\ = \left(p_{12}^0, \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{12}^0 + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12}^0 \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left(p_{12}, \left(\frac{\partial}{\partial t} + (U, \nabla) \right) \tilde{w}_{12}^0 + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12}^0 + \frac{\partial \tilde{w}_{12}^0}{\partial \tau} \right) &= \\ = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (U, \nabla) + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) (p_{12}, \tilde{w}_{12}^0) - \left(\tilde{w}_{12}^0, \left(\frac{\partial}{\partial t} + (U, \nabla) + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) p_{12} \right) + \\ + \left(p_{12}, \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12}^0 \right) = \left(p_{12}, \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{12}^0 + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12}^0 \right). \end{aligned}$$

Эти равенства вытекают из формул (7), (9), (11), $(p_{12}, \tilde{u}_{12}^0) = 0$, $(p_{12}, \tilde{w}_{12}^0) = 0$ (последние, в свою очередь, следуют из условий $(\nabla, u) = 0$, $(\nabla, w) = 0$). Из приведенных равенств немедленно получаем

$$\tilde{P}_{12}^1 = \frac{i}{p_{12}^2} \left(p_{12}, \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{12}^0 + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12}^0 \right) \quad (27)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_{12}^0}{\partial t} + (W, \nabla) \tilde{u}_{12}^0 + \frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{12}^0 - \frac{p_{12} \otimes p_{12}}{p_{12}^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{12}^0 + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12}^0 \right) &= \\ = -p_{12}^2 \left(\frac{\nu + \mu}{2} \tilde{u}_{12}^0 + \frac{\nu - \mu}{2} \tilde{w}_{12}^0 \right), \\ \frac{\partial \tilde{w}_{12}^0}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{w}_{12}^0}{\partial \tau} + (U, \nabla) \tilde{w}_{12}^0 + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12}^0 - \frac{p_{12} \otimes p_{12}}{p_{12}^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \tilde{w}_{12}^0 + \frac{\partial W}{\partial x} \tilde{u}_{12}^0 \right) &= \\ = -p_{12}^2 \left(\frac{\nu + \mu}{2} \tilde{w}_{12}^0 + \frac{\nu - \mu}{2} \tilde{u}_{12}^0 \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Замена переменных $\xi = t - \tau$, $\eta = \tau$ приводит последние уравнения к виду (14).

Аналогично получаются уравнения для функций $\tilde{u}_{21}^0, \tilde{w}_{21}^0, \tilde{P}_{21}^1$; ясно, что все эти уравнения вместе с полученными ранее начальными условиями однозначно разрешимы (отметим, что задачи (14) и (15) аналогичны задачам Гурса). Если функции $\tilde{u}_1^0, \tilde{w}_2^0, \tilde{u}_{ls}^0, \tilde{w}_{ls}^0$ удовлетворяют выписанным задачам, ряд (18) удовлетворяет задаче Коши для системы МГД с начальным условием $h_A^0 \pmod{O(\varepsilon)}$; отметим, что указанные функции ограничены при $k \rightarrow 0$, в то время как функции $\tilde{P}_l^1, \tilde{P}_{ls}^1$ растут, как $1/|k|$ (в соответствующем интеграле эта особенность убирается срезающей функцией χ).

Остальные слагаемые ряда (18) определяются по той же схеме; они удовлетворяют аналогичным уравнениям с правыми частями, причем легко понять, что при $k \rightarrow 0$ функции $\tilde{u}_1^j, \tilde{w}_2^j, \tilde{u}_{ls}^j, \tilde{w}_{ls}^j, \tilde{P}_l^j, \tilde{P}_{ls}^j$ растут, как $O(|k|^{-j})$. Сформулируем полученное утверждение.

ЛЕММА 1. *Существует формальный ряд (18), удовлетворяющий системе МГД с начальным условием h_A^0 ; при этом функции $\Phi_l, \Phi_{lm}, \tilde{u}_l^j, \tilde{w}_l^j, \tilde{u}_{lm}^j, \tilde{w}_{lm}^j, \tilde{P}_l^j, \tilde{P}_{lm}^j$ удовлетворяют задачам, выписанным в разделе 3, с заменой начальных условий на функции h_A^0 (при $j \geq 1$ у систем имеются правые части, а начальные условия нулевые). При $k \rightarrow 0$ указанные функции растут, как $O(|k|^{-j})$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Срезающая функция χ предотвращает расходимость интегралов, входящих в слагаемые ряда (18), но влияет на их оценку. Легко понять, что нормы этих слагаемых в пространствах Соболева оцениваются следующим образом:

$$\|h_l^j\|_{W_2^m}(\mathbb{R}^3) = O(\varepsilon^{(j-m)(1-\beta)+s/2}), \quad (29)$$

причем N -я частичная сумма H_N этого ряда удовлетворяет задаче

$$\frac{\partial H_N}{\partial t} + \mathcal{L}H_N = \varepsilon^2 \mathcal{D}\Delta H_N + F_N, \quad H_N|_{t=0} = h_A^0, \quad (30)$$

где $\|F_N\|_{W_2^m} = O(\varepsilon^{(N+1-m)(1-\beta)+s/2})$.

4.2. Оценка поля h_B^0 . Из разложения (17) начального поля вытекает следующая формула для h_B^0 :

$$h_B^0 = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{i(\Phi^0 \cdot k/\varepsilon)} \left(1 - \chi\left(\frac{k}{\varepsilon^\beta}\right)\right) \tilde{h}^0(k, x) dk.$$

Отметим, что функция $1 - \chi(k)$ финитна; делая в интеграле замену переменной $k = \varepsilon^\beta \xi$, получим

$$h_B^0 = \varepsilon^{s\beta} \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{i(\Phi^0 \cdot \xi/\varepsilon^{1-\beta})} (1 - \chi(\xi)) \tilde{h}^0(\varepsilon^\beta \xi, x) d\xi = \varepsilon^{s\beta} H_B\left(\frac{\Phi^0}{\varepsilon^{1-\beta}}, x, \varepsilon^\beta\right),$$

где $H_B(y, x, \varkappa)$ – гладкая функция от всех своих аргументов при $(y, x) \in \mathbb{R}^{3+s}$, $\varkappa \in (0, \varkappa_0)$, причем при каждом фиксированном $\varkappa$ функция H_B и все ее производные убывают на бесконечности быстрее любых степеней $|x|, |y|$. Отсюда легко следуют оценки

$$\|h_B^0\|_{W_2^m} \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{\beta(s/2+m)-m+s/2}. \quad (31)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Обозначим через h_* вектор, входящий в правые части формул (16). Очевидно, он отличается от построенного в п. 4.1 вектора $h_1^0 + h_2^0 + h_{12}^0 + h_{21}^0$ только отсутствием в интегралах по k срезающей функции χ . Поэтому разность $h_* - (h_1^0 + h_2^0 + h_{12}^0 + h_{21}^0)$ удовлетворяет оценке (31).

5. ОЦЕНКА РАЗРЕШАЮЩЕГО ОПЕРАТОРА

Для обоснования построенной асимптотики надо получить оценку разрешающего оператора системы (2). Для этого представим ее в виде (4) и запишем соответствующий оператор $\mathcal{L}$ в виде (5). Очевидно, этот оператор представим в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,$$

где

$$\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} \{W, \cdot\} & 0 \\ 0 & \{U, \cdot\} \end{pmatrix},$$

а $\mathcal{L}_1$ – псевдодифференциальный оператор нулевого порядка. Заменяем $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}_0$ и рассмотрим задачу Коши для параболической системы

$$\frac{\partial h}{\partial t} h + \mathcal{L}_0 h = \varepsilon^2 \mathcal{D} \Delta h, \quad h|_{t=0} = h_0. \quad (32)$$

Пусть $G_0(x, \xi, t)$ – функция Грина этой задачи Коши, а $G(x, \xi, t, \tau)$ – функция Грина соответствующей задачи с ненулевой правой частью (и нулевым начальным условием). Применяя метод Леви (см., например, [6]) и отслеживая в соответствующих итерациях зависимость от ε (аналогичные выкладки подробно приведены в работах [7], [8]), получим следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. На любом конечном промежутке времени справедливы оценки

$$\begin{aligned} |G_0(x, \xi, t)| &\leq \text{const} \cdot \frac{1}{\varepsilon^3 t^{3/2}} e^{\lambda(x-\xi)^2/\varepsilon^2 t}, \\ |G(x, \xi, t, \tau)| &\leq \text{const} \cdot \frac{1}{\varepsilon^3 (t-\tau)^{3/2}} e^{\lambda(x-\xi)^2/\varepsilon^2 (t-\tau)}, \end{aligned} \quad \lambda > 0. \quad (33)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Разрешающий оператор задачи Коши для системы (32) – интегральный оператор, ограниченный на конечном промежутке времени в любом пространстве Соболева.

Рассмотрим теперь полную систему (4).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Разрешающий оператор задачи Коши для системы (4) ограничен в любом пространстве Соболева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать оператор $\mathcal{L}_1$ возмущением и применим метод последовательных приближений. Уравнение для разрешающего оператора стандартным образом сводится к операторному уравнению Вольтерра (см., например, [5], [8]). А именно, пусть R – разрешающий оператор задачи Коши для системы (4), а R_0 – разрешающий оператор задачи Коши для системы (32). Будем искать $R(t)$ в виде

$$R(t) = R_0(t) + \int_0^t R_0(t-\tau) \Omega(\tau) d\tau.$$

Учитывая равенства $R_0(0) = \text{id}$ и

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_0 - \varepsilon^2 \mathcal{D} \Delta \right) R_0 = 0,$$

получим

$$\Omega(t) + \int_0^t K(t, \tau) \Omega(\tau) d\tau = F(t),$$

где $K(t, \tau) = \mathcal{L}_1 R_0(t - \tau)$, $F(t) = -\mathcal{L}_1 R_0(t)$. Можно считать, что нормы обоих последних операторов ограничены в произвольном фиксированном пространстве Соболева одной константой A . Из метода последовательных приближений вытекает тогда, что норма Ω в том же пространстве ограничена при $t \in [0, T]$ константой Ae^{AT} . ■

6. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

Завершим доказательство теоремы. Пусть $h(x, t, \varepsilon)$ – точное решение системы (4) с начальным условием (3), h_A^N – N -я частичная сумма ряда (18) с достаточно большим N , а h_A и h_B – решения задач Коши с начальными условиями h_A^0 и h_0^B соответственно, h_* – вектор, входящий в правые части формул (16) (старшая часть асимптотики). Очевидно, $h = h_A + h_B$, причем из оценки (31) и ограниченности разрешающего оператора следует, что

$$\|h_B\|_{W_2^m} = O(\varepsilon^{\beta(s/2+m)-m+s/2}).$$

Далее из оценки (30) и ограниченности разрешающего оператора следует, что

$$\|h_A - h_A^N\|_{W_2^m} = O(\varepsilon^{(N+1-m)(1-\beta)+s/2}),$$

причем

$$\|h_* - h_A^N\|_{W_2^m} = O(\varepsilon^{\beta(s/2+m)-m+s/2})$$

(см. замечание 6). Таким образом, из неравенства треугольника получаем

$$\|h_* - h\|_{W_2^m} = O(\varepsilon^{\beta(s/2+m)-m+s/2} + \varepsilon^{(N+1-m)(1-\beta)+s/2}).$$

Зафиксируем произвольное (сколь угодно малое) $\alpha > 0$ и выберем $m = 3/2 + \delta$, $\beta = 1 - \delta$, $\delta > 0$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\beta\left(\frac{s}{2} + m\right) - m + \frac{s}{2} > 1 - \alpha.$$

Убедимся, что такое δ существует; для этого перепишем левую часть предыдущего неравенства:

$$(1 - \delta)\left(\frac{s}{2} + \left(\frac{3}{2} + \delta\right)\right) - \left(\frac{3}{2} + \delta\right) + \frac{s}{2} = s - \delta^2 - \delta\frac{s+3}{2}.$$

При $\delta = 0$ правая часть равна $s \geq 1$, поэтому при достаточно малых δ имеем $\beta(s/2 + m) - m + s/2 > 1 - \alpha$. Теперь зафиксируем δ и выберем N так, чтобы выполнялось неравенство

$$(N + 1 - m)(1 - \beta) + \frac{s}{2} > 1 - \alpha.$$

Таким образом, при любом $\alpha > 0$ для некоторого $m > 3/2$

$$\|h_* - h\|_{W_2^m} = O(\varepsilon^{1-\alpha}).$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из теоремы вложения Соболева.

Список литературы

- [1] Н. К. Мэффатт, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluid*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978.
- [2] S. Friedlander, M. M. Vishik, “On stability and instability criteria for magnetohydrodynamics”, *Chaos*, **5**:2 (1995), 416–423.
- [3] V. V. Kucherenko, “Waves in the linearized system of magnetohydrodynamics”, *Russ. J. Math. Phys.*, **17**:3 (2010), 272–279.
- [4] V. V. Kucherenko, A. Kryvko, “Interaction of Alfven waves in the linearized system of magnetohydrodynamics for an incompressible ideal fluid”, *Russ. J. Math. Phys.*, **20**:1 (2013), 56–67.
- [5] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.
- [6] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, Мир, М., 1968.
- [7] А. И. Шафаревич, “Поведение магнитного поля в проводящей жидкости с быстроменяющимся полем скоростей”, *Докл. РАН*, **360**:1 (1998), 31–33.
- [8] A. I. Esina, A. I. Shafarevich, “Delta-type solutions for a system of induction equations with discontinuous velocity field”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **20**:1 (2014), 17–33.

Поступила в редакцию 16.05.2016