Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Н-модель критической динамики: выбор динамических переменных, исключение звуковых мод, уравнения для звуковых волн вблизи T_c , *ТМФ*, 1998, том 117, номер 1, 140–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf923>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:04:26

**Н-МОДЕЛЬ КРИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ:
ВЫБОР ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ,
ИСКЛЮЧЕНИЕ ЗВУКОВЫХ МОД, УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ВБЛИЗИ T_c**

Обсуждается полная флуктуационная модель, описывающая динамику всех мягких мод в окрестности критической точки фазового перехода жидкость–газ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья открывает серию работ, посвященных ревизии известной Н-модели [1–3]. Н-модель используется при описании критической динамики в окрестности точки фазового перехода жидкость–газ для простых жидкостей и аналогичной критической “точки расслоения” в бинарных смесях. Эти две задачи на уровне феноменологии различаются, и для определенности мы будем говорить лишь о критической точке перехода жидкость–газ в простых жидкостях с молекулами одного сорта.

В этой статье обсуждаются проблема выбора динамических переменных Н-модели и процедура исключения звуковых мод из соответствующих стохастических уравнений. Приводится также вывод уравнений для звуковых волн и соответствующего закона дисперсии в критической области.

Считается [1–3], что роль основного поля параметра порядка ψ в Н-модели играет величина $\Delta\bar{S} = \bar{S} - \bar{S}_c$, где $\bar{S} = S/\rho$ – “энтропия на одну частицу” (кратная “энтропии на единицу массы”), а S и ρ (здесь и далее) – объемные плотности энтропии и числа частиц, соответственно (через F_c всегда будем обозначать значение любой величины F в критической точке, $\Delta F \equiv F - F_c$). Основанием для такого выбора является то, что именно для величины $\Delta\bar{S}$ в линеаризованных уравнениях гидродинамики идеальной (т.е. в пренебрежении эффектами теплопроводности и вязкости) жидкости имеет место отщепление от продольной компоненты поля скорости, связанной со звуковыми колебаниями. Действительно, точные уравнения гидродинамики идеальной жидкости для обеих величин $F = \rho$, S и поля скорости v_i имеют вид [4] $\partial_t F + \partial_i(v_i F) = 0$ (по

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

повторяющимся индексам всегда подразумевается суммирование), откуда для соответствующих величин $\Delta F = F - F_c$ получаем, что

$$\partial_t \Delta F + F_c \partial_i v_i + \partial_i (v_i \Delta F) = 0, \quad F = \rho, S. \quad (1)$$

Из уравнения (1) видно, что в линейном по совокупности “малых величин” ΔF , v приближении (когда последним слагаемым в левой части (1) можно пренебречь) вклад с продольной составляющей поля скорости $\partial_i v_i$ исчезает для той линейной комбинации $\Delta \rho$ и ΔS , которая в линейном приближении кратна величине

$$\Delta \bar{S} = \rho_c^{-2} [\rho_c \Delta S - S_c \Delta \rho]. \quad (2)$$

Именно поэтому $\Delta \bar{S}$ обычно и принимают за основное поле параметра порядка, считая при этом, что соответствующая критическая статика описывается простой ψ^4 -моделью Гинзбурга–Ландау–Вильсона (критическая точка перехода жидкость–газ относится к классу эквивалентности модели Изинга). При этом игнорируется тот факт, что комбинация (2) в критической статике является в действительности смесью двух слагаемых с разной критической размерностью: одного – с размерностью самого поля ψ в ψ^4 -модели, другого – с размерностью составного оператора ψ^2 . Хотя это объективный и допускающий экспериментальную проверку факт, при построении Н-модели его обычно не принимают во внимание, полагая, что отщепление от ∂v в уравнении типа (1) имеет решающее значение.

Мы покажем, что такая точка зрения ошибочна. “Правильным” полем параметра порядка следует считать не величину (2), а ту линейную комбинацию $\Delta \rho$ и ΔS , которая в статике точно соответствует основному полю ψ и имеет соответствующую критическую размерность Δ_ψ . Хотя для этой комбинации сцепление с продольной составляющей поля скорости остается, в действительности это значения не имеет (вопреки общепринятому мнению), что будет строго доказано в разделе 4 путем анализа процедуры исключения звуковых мод из динамики Н-модели. В конечном итоге мы приходим к обычным динамическим уравнениям Н-модели только с иным смыслом поля ψ . При этом будет показано, что это изменение не меняет смысла коэффициента Онзагера λ (коэффициент теплопроводности) в динамическом уравнении для ψ . Этот коэффициент остается точно таким же, как и для поля (2) (т.е. общепринятым), несмотря на изменение смысла самого поля ψ . Важно также, что исходная полная система стохастических уравнений для данной задачи является корректной основой при анализе проблемы распространения звука вблизи критической точки перехода жидкость–газ. Соответствующие динамические уравнения для звуковых волн выводятся в разделе 5.

2. КРИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА ПЕРЕХОДА ЖИДКОСТЬ–ГАЗ

В этом разделе приводятся необходимые для дальнейшего краткие справочные сведения о критической статике перехода жидкость–газ. Этот переход принадлежит классу эквивалентности модели Изинга и описывается простой ψ^4 -моделью, которой при

записи весового множителя в виде $\exp S$ соответствует функционал действия $S(\psi) = -(\partial\psi)^2/2 - \tau\psi^2/2 - g\psi^4/24 + h\psi$, где $\tau = T - T_c$, h – внешнее магнитное поле. По d -мерному пространственному аргументу $\mathbf{x}$ поля ψ в статических функционалах и по $x = (t, \mathbf{x})$ в динамических всегда подразумевается интегрирование. Формальным аналогом удельной (в расчете на узел) свободной энергии магнетика $F(T, h)$ для большого канонического ансамбля газа является величина $-p(T, \mu)$, где p – давление, μ – химический потенциал. Однако аналогия между h и μ неполная, т.к. на плоскости T, μ линия сосуществования жидкой и газовой фаз $\mu = \mu_0(T)$, $T \leq T_c$, имеет конечный наклон вблизи точки ее окончания $T = T_c$, $\mu = \mu_c = \mu_0(T_c)$ из-за отсутствия характерной для магнетика симметрии относительно перемены знака поля. Поэтому точными аналогами переменных $e_1 = h$, $e_2 = \tau = T - T_c$ магнетика для газа следует считать [5] некоторые линейные комбинации

$$e_1 = \Delta\mu + a\Delta T, \quad e_2 = \Delta T + b\Delta\mu, \quad (3)$$

где a и b – числовые коэффициенты. Линия сосуществования фаз вблизи T_c считается прямой $e_1 = 0$, $T \leq T_c$ (ее кривизна, т.е. наличие возможных нелинейностей в соотношениях (3) (поправки к скейлингу), обсуждаться и учитываться не будет). Коэффициент a определяется наклоном этой прямой. Коэффициенты a и b теоретически можно вычислить по статсумме большого канонического ансамбля газа, но нельзя измерить непосредственно (подробнее об этом см. в конце раздела). По правилам термодинамики [6]

$$dp = SdT + \rho d\mu. \quad (4)$$

В окрестности критической точки

$$p(T, \mu) = p_c + S_c\Delta T + \rho_c\Delta\mu + p^{(s)}, \quad (5)$$

где первые три слагаемых – регулярная, а последнее слагаемое – сингулярная части давления. Для магнетика аналогично: $F(T, h) = F_c - S_c\Delta T + F^{(s)}$. Согласно идее универсальности функции $F^{(s)}(e)$ и $-p^{(s)}(e)$ для d -мерной задачи должны иметь одинаковое скейлинговое представление типа

$$-p^{(s)} \sim |e_1|^{d/\Delta_1} f(z), \quad z \sim e_2|e_1|^{\Delta_2/\Delta_1},$$

с одинаковыми для обеих задач критическими размерностями $\Delta_i = \Delta[e_i]$ переменных e_i и одинаковой (с точностью до нормировок) скейлинговой функцией f от критически безразмерного аргумента z . При этом для магнетика $e_1 = h$, $e_2 = \tau = \Delta T$, а для газа роль переменных e играют величины (3). В пренебрежении поправками, возникающими от слагаемого $p^{(s)}$, из (5) имеем $\Delta p = S_c\Delta T + \rho_c\Delta\mu$, что позволяет выразить переменные (3) через непосредственно измеримые величины ΔT и Δp .

Из соотношений (3) и (4) имеем $\partial_\mu = \partial_1 + b\partial_2$, $\partial_T = a\partial_1 + \partial_2$ ($\partial_i \equiv \partial/\partial e_i$) и

$$\Delta\rho = (\partial_1 + b\partial_2)p^{(s)}, \quad \Delta S = (a\partial_1 + \partial_2)p^{(s)}. \quad (6)$$

Определенные критические размерности имеют величины $p^{(s)}$ и переменные e , а величины (6) – суммы двух вкладов с разной размерностью: $d - \Delta_1$ для $\partial_1 p^{(s)}$ (как у намагниченности в модели Изинга) и $d - \Delta_2$ для $\partial_2 p^{(s)}$ (как у сопряженного с τ оператора ψ^2). Численно $\Delta_1 > \Delta_2$, поэтому операция ∂_1 “более сингулярна”, чем ∂_2 , она и определяет ведущие вклады.

На линии сосуществования фаз $e_1 = 0$, $\Delta T \leq 0$ величины $\partial_2 p^{(s)}$ однозначны, а $\partial_1 p^{(s)}$ двузначны. Эти величины исчезают при $e_1 = 0$, $\Delta T > 0$. Отсюда следует, что на линии $e_1 = 0$ величины $\Delta\rho$ и ΔS при $\Delta T > 0$ однозначны и имеют асимптотику $\Delta\rho \equiv \rho - \rho_c \cong bA_+|e_2|^{1-\alpha}$, $\Delta S \equiv S - S_c \cong A_+|e_2|^{1-\alpha}$, а при $\Delta T < 0$ они двузначны, и для двух фаз (жидкость–газ) имеем

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ж}} - \rho_c &\cong B|e_2|^\beta + bA_-|e_2|^{1-\alpha}, & \rho_{\text{г}} - \rho_c &\cong -B|e_2|^\beta + bA_-|e_2|^{1-\alpha}, \\ S_{\text{ж}} - S_c &\cong aB|e_2|^\beta + A_-|e_2|^{1-\alpha}, & S_{\text{г}} - S_c &\cong -aB|e_2|^\beta + A_-|e_2|^{1-\alpha}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\beta = (d - \Delta_1)/\Delta_2$, $1 - \alpha = (d - \Delta_2)/\Delta_2$ (α и β – критические индексы теплоемкости и намагниченности в модели Изинга), $A_\pm$ – амплитудные множители $\partial_2 p^{(s)}$ с двух сторон от T_c , а B – амплитудный множитель $\partial_1 p^{(s)}$ при $\Delta T < 0$. Вместо e_2 в формулах (7) можно использовать любую из величин ΔT , $\Delta\rho$, $\Delta\mu$, что приведет лишь к изменению амплитуд (в частности, $e_2 = (1 - ab)\Delta T$). Если полностью пренебречь малой четной поправкой, для $\Delta T > 0$ получим, что $\Delta\rho = 0$ и $\Delta S = 0$. Поэтому в реальном эксперименте с фиксированным количеством вещества линию $e_1 = 0$ выше температуры T_c можно приблизительно считать критической изохорой и (одновременно) критической адиабатой.

Обсудим в заключение вопрос об измеримости коэффициентов a и b в соотношениях (3). Если исходить из определения давления $p = p(T, \mu)$ с помощью стандартного соотношения $\ln Z = Vp/kT$, где Z – статсумма большого канонического ансамбля (V – объем, k – постоянная Больцмана) в термодинамическом пределе, то функция $p(T, \mu)$ и ее частные производные $S = \partial_T p$ и $\rho = \partial_\mu p$ теоретически вычислимы через статсумму Z . Однако выбор ансамбля – вопрос соглашения (подобно выбору калибровки потенциалов в электродинамике), поэтому следует различать понятия “вычислимость” и “измеримость”. Величины p и ρ измеримы непосредственно, но для объемной плотности энтропии S это не так. Общее термодинамическое определение энтропии [6] допускает произвол $\bar{S} \rightarrow \bar{S} + c$, где $\bar{S} = S/\rho$ – энтропия на одну частицу, c – произвольная константа. При этом $F \rightarrow F - cNT$ для полной свободной энергии системы (N – число частиц) и $\mu \rightarrow \mu - cT$ для химического потенциала. Принимая в качестве исходных определенных стандартные соотношения для большого канонического ансамбля [6], мы тем самым уже фиксируем некоторую конкретную нормировку энтропии и связанных с ней величин F и μ . Поэтому эти величины оказываются теоретически вычислимыми, не будучи непосредственно измеримыми (подобно потенциалам с фиксированной калибровкой в электродинамике).

Реально измеримыми являются лишь те величины, которые не зависят от отмеченного выше произвола в определении энтропии. Это, естественно, все величины, допускающие прямое экспериментальное измерение, в частности p и ρ , теплоемкости C_v и C_p

и сжимаемости (изотермическая и адиабатическая), но не S и μ . Произволу $\bar{S} \rightarrow \bar{S} + c$ в “энтропии на частицу” $\bar{S} = S/\rho$ соответствует произвол $S \rightarrow S + c\rho$ в ее объемной плотности, сохраняющийся даже для разности $\Delta S = S - S_c$. Однако для разности $\Delta \bar{S} = \bar{S} - \bar{S}_c$ указанный произвол исчезает, так что эта разность становится измеримой. В линейном приближении величина $\Delta \bar{S}$ имеет вид (2), поэтому из соотношений (7) можно получить аналогичные формулы для $\Delta \bar{S}$. Сравнивая амплитуды при однотипных вкладах в экспериментально измеримых величинах $\Delta \rho$ и $\Delta \bar{S}$, можно найти $a\rho_c - S_c$ и $b^{-1}\rho_c - S_c$, т.е. эти две комбинации измеримы (отметим, что по их разности можно найти отношение $(1 - ab)/b$ и что комбинация $a\rho_c - S_c$ легко находится также по наклону кривой сосуществования вблизи ее окончания в плоскости T, p).

Таким образом, по экспериментальным данным можно получить только две связи на три параметра a, b и S_c . Поэтому на феноменологическом уровне один из них (a или S_c , но не b) можно было бы фиксировать произвольно, положив, например, $a = 0$. Однако если считать исходной микромоделью большой канонический ансамбль, то поступить так нельзя, поскольку для него все три параметра a, b, S_c теоретически вычислимы.

3. ПОЛНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ФЛУКТУАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

Исходной фундаментальной микротеорией жидкости можно считать неравновесную статистическую физику системы взаимодействующих классических частиц. В рамках этой теории корректно определены случайные поля $\hat{F}(x) = \hat{H}(x), \hat{p}_i(x), \hat{n}(x)$ – объемные плотности сохраняющихся величин: энергии, импульса и числа частиц (для любых величин в динамике $x \equiv (t, \mathbf{x})$). Их средние значения $\langle \dots \rangle$ по равновесному распределению – известные термодинамические величины: $\langle \hat{H}(x) \rangle = U$ – внутренняя энергия единицы объема, $\langle \hat{n}(x) \rangle = \rho$ – плотность числа частиц, $\langle \hat{p}_i(x) \rangle = 0$. Согласно общим принципам теории критического поведения Ландау [6] отклонения $\Delta \hat{F}(x) = \hat{F}(x) - F_c$ случайных полей $\hat{F}(x)$ от их равновесных средних значений в критической точке $\langle \hat{F}(x) \rangle_c \equiv F_c$ можно считать “малыми” в критической области величинами, старшими степенями которых можно пренебрегать по сравнению с младшими (а в термодинамике с ними можно обращаться как с дифференциалами). Тогда по исходным полям $\hat{H}(x) - U_c \equiv \Delta \hat{U}(x)$ и $\hat{n}(x) - \rho_c \equiv \Delta \hat{\rho}(x)$ с помощью термодинамического соотношения $\Delta U = T \Delta S + \mu \Delta \rho \cong T_c \Delta S + \mu_c \Delta \rho$ можно определить аналогичное случайное поле для объемной плотности энтропии $\Delta \hat{S}(x) = T_c^{-1} [\Delta \hat{U}(x) - \mu_c \Delta \hat{\rho}(x)]$, а вместо импульса $\hat{p}_i(x)$ можно ввести с той же точностью случайное поле скорости $\hat{v}_i(x) = \hat{p}_i(x)/M\rho_c$, где M – масса частицы. Переменная v удобнее p при обсуждении галилеевой инвариантности (“галилеево-ковариантным” аналогом ∂_t является операция $\nabla_t = \partial_t + (v\partial)$). Хотя поле v в отличие от импульса p не является точно сохраняющейся величиной, из определений следует, что различием между ними в критической области можно пренебречь, т.е. все связанные с этим различием поправки должны быть “инфракрасно” (ИК)-несущественными величинами. Последующий строгий анализ, разумеется, подтвердит это утверждение.

Пять полей $\Delta \hat{S}(x), \Delta \hat{\rho}(x)$ и $\hat{v}_i(x)$ образуют полный базис фигурирующих в динамике

переменных.

Равновесные средние $\langle \Delta \hat{\rho}(x) \rangle$ и $\langle \Delta \hat{S}(x) \rangle$ – известные из статистики величины [6]. Каждая из них содержит ведущий сингулярный вклад, пропорциональный $\partial_1 p^{(s)}$ и менее сингулярный вклад $\sim \partial_2 p^{(s)}$ с критическими размерностями $d - \Delta_1 = \Delta_\psi$ и $d - \Delta_2 = \Delta[\psi^2]$, соответственно, где $\Delta_F \equiv \Delta[F]$ – критические размерности величин F в простой ψ^4 -модели ($\Delta_1 \equiv \Delta_h$, $\Delta_2 \equiv \Delta_\tau$ для магнетика). Из соотношений (6) следует, что выделенными линейными комбинациями величин $\Delta \hat{\rho}(x)$ и $\Delta \hat{S}(x)$ являются те, равновесные средние которых имеют определенные критические размерности $\partial_1 p^{(s)}$ и $\partial_2 p^{(s)}$, а именно,

$$\psi(x) = \text{const} [\Delta \rho(x) - b \Delta S(x)], \quad (8)$$

$$m(x) = \text{const} [\Delta S(x) - a \Delta \rho(x)], \quad (9)$$

где a и b – коэффициенты из (3). В модели ψ^4 поле ψ является параметром порядка, а поле m представляется составным оператором ψ^2 . Эквивалентная статическая задача с двумя независимыми полями ψ и m описывается известной “моделью С” [3] (подробнее см. ниже).

Выразив линейные комбинации (8), (9) через непосредственно измеримые величины $\Delta \rho$ и $\Delta \bar{S}$ с помощью соотношений (2) и (6), получим $\psi \sim [(b^{-1} \rho_c - S_c) \Delta \rho - \rho_c^{-2} \Delta \bar{S}]$ и $m \sim [\rho_c^2 \Delta \bar{S} - (a \rho_c - S_c) \Delta \rho]$. Отношение коэффициентов при $\Delta \bar{S}$ и $\Delta \rho$ в этих двух величинах выражается через измеримые комбинации параметров a , b и S_c .

Именно комбинацию (8), имеющую определенную критическую размерность (в отличие от комбинации (2), являющейся смесью двух слагаемых с разной размерностью), следует считать основным полем параметра порядка Н-модели.

Уравнения гидродинамики идеальной жидкости для полей ψ , m получаются из их определений (8), (9) и уравнений (1):

$$\partial_t \psi = -\psi_0 \partial_i v_i - \partial_i (v_i \psi), \quad \partial_t m = -m_0 \partial_i v_i - \partial_i (v_i m), \quad (10)$$

где ψ_0 и m_0 – некоторые константы. Добавив вклады затухания и шумов и интерпретируя слагаемые с v как межмодовую связь, нетрудно достроить уравнения (10) до полной флуктуационной модели всех трех полей ψ , m , v (см. ниже). В следующем разделе будет показано, что наличие “сцепления” между полем ψ и продольной частью поля скорости $v_{\parallel}$ в (10) (которого не было бы для поля (2)) в действительности проблем не порождает, т.к. приводит лишь к некоторой перенормировке коэффициента Онзагера в стохастическом уравнении для ψ . Тем самым теряет силу основной аргумент в пользу выбора именно величины (2) в качестве поля параметра порядка. Поэтому предпочтительным становится выбор переменных (8), (9), поскольку именно эти комбинации имеют определенные критические размерности.

Опишем “полную флуктуационную модель” для трех полей ψ , m , v . Согласно общим принципам построения моделей критической динамики [3, 7] стохастические уравнения

для произвольной системы полей $\varphi = \{\varphi_\alpha(x)\}$ с заданным статическим функционалом действия $S^{\text{st}}(\varphi)$ должны иметь следующий вид:

$$\partial_t \varphi_a = \sum_b (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) H_{\varphi_b} + \eta_a, \quad (11)$$

$$\langle \eta_a(x) \eta_b(x') \rangle \equiv D_{ab}(x, x') = 2\alpha_{ab} \delta(x - x'), \quad (12)$$

где $\eta = \{\eta_a(x)\}$ – набор случайных сил (“шумов”) с гауссовым распределением, заданным матрицей корреляторов (12), α_{ab} – симметричная матрица коэффициентов Онзагера, описывающих различные процессы диссипации, β_{ab} – антисимметричная матрица коэффициентов межмодовой связи. В (11) введено обозначение

$$H_{\varphi_a} \equiv \left. \frac{\delta S^{\text{st}}(\varphi)}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} \right|_{\varphi_a \mathbf{x} \rightarrow \varphi_a(x)}. \quad (13)$$

Термины “симметричность” для матрицы α и “антисимметричность” для матрицы β при наличии в них операций дифференцирования нужно понимать как соотношения $\alpha_{ba} = \alpha_{ab}^T$, $\beta_{ba} = \beta_{ab}^T$ с обычным правилом транспонирования производных $\partial^T = -\partial$.

Как известно, одновременные корреляционные функции полей φ стохастической задачи (11), (12) совпадают со статическими корреляционными функциями тех же полей с функцией распределения $\exp(S^{\text{st}}(\varphi))$ (по смыслу $S^{\text{st}}(\varphi) = -S_0/kT_c$, где S_0 – функционал энергии Ландау). В этом и состоит свойство взаимной согласованности динамики и статистики [3, 7].

Для нашей системы полей $\varphi = \{\psi, m, v\}$ в качестве $S^{\text{st}}(\varphi)$ используется статический функционал действия С-модели для полей ψ, m с простой добавкой приближенного выражения $M\rho_c v^2/2$ для кинетической энергии [2, 3, 7]:

$$S^{\text{st}}(\varphi) = -\frac{(\partial\psi)^2}{2} - \frac{e_2\psi}{2} - \frac{g_1\psi^4}{24} + e_1\psi - \frac{m^2}{2} + \frac{g_2 m\psi^2}{2} - \frac{av^2}{2}, \quad (14)$$

где $e_{1,2}$ – параметры (3), $g_{1,2}$ – заряды, интегрирование по d -мерному аргументу $\mathbf{x}$ подразумевается. Параметр $a = M\rho_c/kT_c$ введен в (14) для того, чтобы сохранить обычный физический смысл размерности поля скорости v . Поля ψ и m в функционале (14) имеют канонические размерности $d_\psi = d/2 - 1$ и $d_m = d/2$, что должно обеспечиваться выбором нормировочных множителей в (8), (9) в виде подходящих степеней параметра обрезания $\Lambda = r_{\min}^{-1}$, где $r_{\min}$ – минимальный характерный размер для данной задачи – межатомное расстояние.

В отсутствие диссипации и шумов все должно сводиться к уравнениям гидродинамики идеальной жидкости (10) для полей ψ, m . К ним нужно добавить известное [4] гидродинамическое уравнение для скорости $\partial_t(\bar{\rho}v_i) + \partial_k T_{ik} = 0$, где $\bar{\rho}$ – массовая плотность среды, T_{ik} – тензор натяжений, содержащий среди прочего “кинетический вклад”

$\bar{\rho}v_iv_k$. В нашей задаче добавочные вклады T_{ik} , описывающие взаимодействие скорости v с полями ψ и m , однозначно определяются изложенными выше общими принципами построения моделей критической динамики. Действительно, если интерпретировать вклады с v в (10) как межмодовую связь полей ψ и m с v , то с учетом равенства $H_{v_i} = -av_i$ для производной (13) функционала (14) из уравнений (10) находим коэффициенты межмодовой связи полей ψ и m с полем v : $\beta[\psi, v_i] = a^{-1}\partial_i[(\psi_0 + \psi)\dots]$, $\beta[m, v_i] = a^{-1}\partial_i[(m_0 + m)\dots]$. Отсюда по общим правилам $\beta_{ba} = -\beta_{ab}^T$ и $\partial^T = -\partial$ определяются аналогичные коэффициенты межмодовой связи поля v с полями ψ и m : $\beta[v_i, \psi] = a^{-1}(\psi_0 + \psi)\partial_i\dots$, $\beta[v_i, m] = a^{-1}(m_0 + m)\partial_i\dots$. В конечном итоге это приводит к следующему уравнению для скорости:

$$\partial_t v_i + (v_k \partial_k) v_i = a^{-1}(\psi_0 + \psi)\partial_i H_\psi + a^{-1}(m_0 + m)\partial_i H_m, \quad (15)$$

где H_ψ — соответствующие производные (13) функционала (14). Обеспечивающее галилееву инвариантность слагаемое $(v\partial)v$ в левой части уравнения (15) порождается кинетическим вкладом $\bar{\rho}v_iv_k$ в T_{ik} . Если бы поле скорости v было чисто поперечным (несжимаемость), то вклад $(v\partial)v$ (точнее, его “поперечная часть”) был бы согласован со статикой (14), т.к. мог бы быть интерпретирован как межмодовое взаимодействие между компонентами v . Добавки от продольной части v в слагаемое $(v\partial)v$ нарушают согласованность со статикой (14) и в этом смысле являются “плохими”. В разделе 4 будет показано, что вклад $(v\partial)v$ в действительности является ИК-несущественным, т.е. при анализе критической асимптотики может быть отброшен, и все связанные с ним проблемы исчезают. В принципе нетрудно изменить модель так, чтобы обеспечить полную согласованность со статикой. Для этого нужно изменить статическое действие (14) заменой приближенного выражения $\rho_c v^2$ точным ρv^2 , изменив соответственно вклады межмодового взаимодействия в правой части уравнения (15) (что проще всего сделать в переменных $\Delta S, \Delta\rho$), а вместо вклада $(v\partial)v$ в левой части (15) добавить в правую часть (15) межмодовое взаимодействие между компонентами v с коэффициентами $\beta[v_i, v_k] = kT_c\bar{\rho}^{-1}(\partial_k v_i - \partial_i v_k)$. При этом все отличия от простого уравнения (15) будут определяться ИК-несущественными поправками, которыми в критической области можно пренебречь. Поэтому в дальнейшем будем исходить из уравнений (10), (15).

К этим уравнениям нужно добавить скоррелированные между собой согласно соотношениям (11), (12) вклады диссипации и шумов. Разложив векторное поле скорости на продольную ($v_\parallel$) и поперечную ($v_\perp$) составляющие, обозначим для краткости

$$\{\psi, m, v_\parallel, v_\perp\} \equiv \{\varphi_a, \quad a = 1, 2, 3, 4\} \quad (16)$$

и обсудим возможный общий вид (4×4) -матрицы коэффициентов Онзагера α_{ab} . Он определяется с учетом следующих соображений: 1) матрица α должна быть симметричной и положительно-определенной; 2) поперечное векторное поле $v_\perp \equiv \varphi_4$ не может смешиваться с прочими, поэтому $\alpha_{4a} = 0 \quad \forall a = 1, 2, 3$; 3) поскольку все наши поля порождаются сохраняющимися величинами (см. начало раздела), все нетривиальные

элементы α_{ab} должны содержать хотя бы один “множитель” ∂ [3, 7]. Отсюда с учетом индексной структуры и положительной определенности матрицы α следует, что все четыре диагональных элемента α_{aa} и недиагональный элемент α_{12} следует считать кратными оператору Лапласа $\partial^2 \equiv \partial_i \partial_i$, а элементы α_{a3} с $a = 1, 2$ – кратными оператору $\partial^2 \partial_i$. Поясним последнее утверждение. Допустимый по индексной структуре вариант, когда $\alpha_{a3} \sim \partial_i$ (т.е. $\alpha_{a3} \sim p_i$ в импульсном представлении), противоречил бы при $p \rightarrow 0$ неравенству Коши–Буняковского $\alpha_{a3}^2 \leq \alpha_{aa} \alpha_{33} \sim p^4$, вытекающему из положительной определенности матрицы α . Суммируя сказанное выше, можно ввести следующую параметризацию элементов матрицы α в обозначениях (16):

$$\alpha_{aa} = -\lambda_{aa} \partial^2 \quad \forall a; \quad \alpha_{12} = -\lambda_{12} \partial^2; \quad \alpha_{a3} = -\lambda_{a3} \partial^2 \partial_i, \quad a = 1, 2, \quad (17)$$

где все λ – числовые коэффициенты, при этом $\lambda_{aa} > 0 \quad \forall a$.

Есть еще одно важное соображение относительно возможного вида матрицы α . Если бы вместо полей ψ , m в качестве переменных использовались исходные величины ΔS и $\Delta \rho$, то вклады от диссипации следовало бы ожидать в уравнениях для энтропии (теплопроводность) и скорости (вязкость), но их не должно быть в уравнении для плотности из-за отсутствия физического механизма “диссипации числа частиц”. Это значит, что в таких переменных мы имели бы $\alpha_{\rho\rho} = 0$, а поэтому и $\alpha_{\rho s} = \alpha_{\rho v} = 0$ вследствие положительной определенности α . Тогда отличными от нуля могли бы быть лишь элемент α_{ss} , два (продольный и поперечный) элемента типа α_{vv} и один элемент типа α_{sv} . Переход к переменным ψ , m соответствует некоторому линейному преобразованию полей $\varphi \rightarrow L\varphi$, при котором $\eta \rightarrow L\eta$, $\alpha \rightarrow L\alpha L^T$, что следует из соотношений (11), (12). Поэтому из сказанного выше относительно структуры матрицы α в переменных ΔS , $\Delta \rho$, v вытекают вполне определенные связи для элементов новой матрицы α в переменных ψ , m , v . Легко проверить, что эти связи в обозначениях (16) имеют вид

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} = \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{23}} = \frac{L_{11}}{L_{21}}, \quad (18)$$

где L_{11} – коэффициент при ΔS в равенстве (8), а L_{21} – в (9). Связи (18) эквивалентны аналогичным соотношениям на коэффициенты λ в (17). Из (18), в частности, следует, что три элемента α_{11} , α_{12} и α_{22} взаимно пропорциональны и могут быть равными нулю только одновременно.

Добавив к уравнениям (10), (15) вклады шумов и диссипации с коэффициентами Онзагера (17), согласно общим правилам (11), (12) получим следующую полную систему уравнений для полей $\varphi = \psi$, m , $v_{\parallel}$, $v_{\perp}$:

$$\begin{aligned} \partial_t \psi &= -\lambda_{11} \partial^2 H_{\psi} - \lambda_{12} \partial^2 H_m + a \lambda_{13} \partial^2 (\partial v_{\parallel}) - \partial(v\psi) - \psi_0 (\partial v_{\parallel}) + \eta_1, \\ \partial_t m &= -\lambda_{22} \partial^2 H_m - \lambda_{12} \partial^2 H_{\psi} + a \lambda_{23} \partial^2 (\partial v_{\parallel}) - m_0 (\partial v_{\parallel}) - \partial(vm) + \eta_2, \\ \partial_t v_{\parallel} &= P^{\parallel} \{ \lambda_{33} \partial^2 v_{\parallel} - \lambda_{13} \partial (\partial^2 H_{\psi}) - \lambda_{23} \partial (\partial^2 H_m) - (v\partial)v + a^{-1} \psi \partial H_{\psi} + \\ &\quad + a^{-1} \psi_0 \partial H_{\psi} + a^{-1} m \partial H_m + a^{-1} m_0 \partial H_m \} + \eta_3, \\ \partial_t v_{\perp} &= P^{\perp} \{ a \lambda_{44} \partial^2 v_{\perp} - (v\partial)v + a^{-1} \psi \partial H_{\psi} + a^{-1} m \partial H_m \} + \eta_4, \end{aligned} \quad (19)$$

где $P^{\parallel}$ и $P^{\perp}$ – продольный и поперечный проекторы ($P_{ik}^{\parallel} = \partial_i \partial_k / \partial^2$, $P_{ik}^{\perp} = \delta_{ik} - P_{ik}^{\parallel}$), векторные индексы полей v и символов ∂ для краткости опущены. Совокупность четырех уравнений (19) представляет собой “полную флуктуационную модель”, описывающую критическую динамику всех мягких мод в рассматриваемой задаче.

Отметим в заключение, что линии сосуществования фаз и ее прямолинейному продолжению – критической изохоре – соответствует выбор $e_1 = 0$, $e_2 \sim \Delta T = T - T_c$ в (14), а критический изобаре – выбор $e_1 \sim e_2 \sim \Delta T$ (для критической изотермы $\Delta T \rightarrow \Delta p$). Слагаемое $e_1 \psi$ в (14) порождает в H_{ψ} константу e_1 , вклад которой в уравнениях (19) исчезает, т.к. H_{ψ} входит в них только под знаком ∂ . В такой ситуации для воспроизведения вклада e_1 необходимо искать решения уравнений (19) для всех полей $\varphi(x)$ в виде $\varphi' + \varphi''(x)$, где $\varphi''(x)$ – убывающие при $|x| \rightarrow \infty$ для всех t “флуктуационные составляющие”, а φ' – константы, определяемые из условия минимума энергии $H_{\varphi} = 0$ для всех φ на не зависящих от x полях φ .

4. ИСКЛЮЧЕНИЕ ЗВУКОВЫХ МОД

Мы привели громоздкие общие уравнения для полей (19). Докажем теперь, что многие вклады в этих уравнениях являются ИК-несущественными. Поэтому при анализе ведущих критических сингулярностей они могут быть отброшены. В конечном счете данная процедура упрощения модели (19) приведет к полному исключению звуковых мод m , $v_{\parallel}$ и к обычной формулировке Н-модели, но только с полем параметра порядка (8) вместо обычного поля (2).

Переходим к доказательству этого утверждения. Согласно общим принципам построения флуктуационных моделей теории критического поведения [6] судить об относительной ИК-существенности различных слагаемых в уравнениях (19) можно просто по размерности входящих в них числовых коэффициентов. Речь идет лишь о таких коэффициентах, которые остаются конечными в исследуемой критической асимптотике. Важно также, чтобы сами поля соответствовали величинам с определенными размерностями, а не смесям таких величин, что и согласуется с выбором полей (8), (9) в качестве динамических переменных.

В динамических задачах аналогом обычной (импульсной) размерности статических моделей является “суммарная каноническая размерность”

$$d_F = d_F^p + d_{\omega} d_F^{\omega}, \quad (20)$$

где d_F^p и d_F^{ω} – соответственно импульсная и частотная канонические размерности рассматриваемой величины F , d_{ω} – относительная размерность частоты. Последняя определяется по соотношению между ∂_t и ∂ в линейной части стохастических уравнений при $T = T_c$, т.е. непосредственно в критической точке. В нашем случае из уравнений (14) и (19) видно, что при $T = T_c$ в динамическое уравнение для ψ входит комбинация $\partial_t + \text{const} \cdot \partial^4$, а в уравнения для полей m и v входит $\partial_t + \text{const} \cdot \partial^2$. Поэтому выбор величины d_{ω} в данном случае неоднозначен (либо $\omega \sim p^4$, либо $\omega \sim p^2$) и в такой ситуации должен пониматься просто как один из элементов точной постановки асимптотической задачи.

Общепринятым для Н-модели является выбор $\omega \sim p^4$ ($d_\omega = 4$), соответствующий полноценной динамике для поля параметра порядка ψ . Они принимаются в дальнейшем, как и выбор $d = 4 - 2\epsilon$ размерности пространства, поскольку оба статических взаимодействия в (14), как и межмодовое взаимодействие ψ с v в уравнениях (15), логарифмичны при $d = 4$. Нужные для дальнейшего сведения о суммарных размерностях (20) входящих в систему (19) величин при $d_\omega = 4$, $d = 4$ приведены в следующей таблице.

F	ψ, ψ_0	m, m_0	v	H_ψ	H_m	a	λ_{11}	$\lambda_{12}, \lambda_{13}$	$\lambda_{22}, \lambda_{23}$	$\lambda_{33}, \lambda_{44}$
d_F	1	2	3	3	2	-2	0	1	2	4

Размерности d_F полей ψ , m находятся по виду функционала (14), размерность скорости – непосредственно из ее определения (условно v (см/с) $\sim \omega/p \sim p^3$), по ней из (14) находится d_a . Размерности шумов η_a в уравнениях (19) совпадают с размерностями производных $\partial_t \varphi_a$, по ним из соотношений (12) находятся размерности всех λ_{ab} в (17).

Из таблицы видно, что числовые коэффициенты при различных слагаемых (19) имеют разные суммарные размерности, поэтому некоторые из них заведомо могут быть отброшены как ИК-несущественные. По общим правилам в каждом из уравнений (19) самыми главными являются те вклады, числовые коэффициенты при которых имеют максимальные суммарные размерности. При такой оценке вклады шумов η_a мы считаем представленными в виде

$$\eta_a = \lambda_{aa}^{1/2} \eta'_a, \quad (21)$$

рассматривая множители $\lambda_{aa}^{1/2}$ как числовые коэффициенты на равных правах со всеми прочими.

Для краткости будем использовать термины “порядок вклада” и “его индекс”, понимая последний как суммарную размерность числового коэффициента в этом вкладе. Индексы всех вкладов в уравнениях (19) легко находятся из таблицы. В частности, из (21) следует, что индексы шумов $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ в (19) равны соответственно 0, 1, 2, 2.

Поскольку нас интересуют только ведущие сингулярности в критической области, из сказанного выше на первый взгляд следует, что в каждом из уравнений (19) нужно оставить лишь главные вклады с максимальным индексом (+1 в уравнении для ψ , +2 в уравнениях для m и $v_\perp$, +4 в уравнении для $v_\parallel$). В таком приближении уравнения для $v_\parallel$ и m сводятся к простым соотношениям

$$\partial H_m = 0, \quad \partial v_\parallel = 0, \quad (22)$$

при учете которых уравнение для ψ становится тождеством ($0 = 0$). Содержательным остается лишь уравнение для $v_\perp$.

Однако в действительности таким приближением ограничиваться в данном случае нельзя, т.к. “малые” величины (22) входят в оба вклада $-\lambda_{12} \partial^2 H_m$ и $-\psi_0 (\partial v_\parallel)$ с максимальным индексом +1 в уравнении для ψ . Поэтому сейчас важны и поправки к ним с относительным индексом -1, которые после умножения на коэффициенты λ_{12} и ψ_0 с

размерностью $+1$ дадут в уравнении для ψ добавки с нулевым индексом, т.е. вклады того же порядка, что и у большинства других слагаемых этого уравнения.

Таким образом, из-за “аномальной малости” величин (22) ведущим порядком в уравнении для ψ являются все вклады с нулевым (а не равным $+1$) индексом, и для их определения нужно учитывать не только самые главные (с максимальным индексом) слагаемые, но также и все “первые поправки”, т.е. все вклады с индексом на единицу меньше максимального. Сразу отметим, что поправки следующего порядка с уменьшением индекса на 2 и более заведомо ИК-несущественны и могут быть отброшены. К их числу относятся все вклады с λ_{13} и λ_{23} , а также вклады $(v\partial)v$ и $\partial_t v$ во всех уравнениях. Поэтому проблема нарушения согласованности со статикой из-за вкладов с $v_{\parallel}$ в $(v\partial)v$ фактически снимается.

Учитывая в уравнениях для $v_{\parallel}$ и m все первые поправки, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \psi_0 \partial H_{\psi} + m_0 \partial H_m, \\ 0 &= -\lambda_{22} \partial^2 H_m - \lambda_{12} \partial^2 H_{\psi} - m_0 (\partial v_{\parallel}) + \eta_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Найдя отсюда “малые величины” ∂H_m , $\partial v_{\parallel}$, подставив их в уравнения (19) для ψ и $v_{\parallel}$, а затем отбросив в правых частях этих уравнений все ИК-несущественные поправочные вклады (с отрицательным индексом в уравнении для ψ и с индексом меньше двух в уравнении для $v_{\parallel}$), получим следующую систему:

$$\partial_t \psi = -\lambda'_{11} \partial^2 H_{\psi} - \partial(v\psi) + \eta'_1, \quad (24)$$

$$\partial_t v_{\parallel} = P^{\perp} \{ a \lambda_{44} \partial^2 v_{\perp} + a^{-1} \psi \partial H_{\psi} \} + \eta_4, \quad (25)$$

в которой

$$\eta'_1 = \eta_1 - \alpha \eta_2, \quad \lambda'_{11} = \lambda_{11} - 2\alpha \lambda_{12} + \alpha^2 \lambda_{22}, \quad \alpha \equiv \psi_0 / m_0. \quad (26)$$

Для сохранения традиционной формы записи мы оставили в уравнении (25) и вклад $\partial_t v_{\perp}$, хотя он является ИК-несущественным, т.к. имеет индекс 0, а все слагаемые в правой части (25) – индекс $+2$. Если умножить обе части (25) на коэффициент a с $d_a = -2$ (см. таблицу), все вклады в правой части (25) будут иметь индекс 0, как и все слагаемые уравнения (24), а вклад $a \partial_t v_{\perp}$ в левой части уравнения для $v_{\perp}$ будет явно ИК-несущественной поправкой с индексом -2 , которой при анализе ведущих ИК-сингулярностей можно пренебречь. Равенство нулю индексов всех вкладов главного порядка в конечных уравнениях – основной признак “хорошей” (логарифмической) теории, т.к. все добавки с отрицательными индексами ИК-несущественны (важно, чтобы не было вкладов с положительными индексами).

В записи (24), (25) поля m и $v_{\parallel}$ еще не устранены полностью, поскольку m входит в производную H_{ψ} (13) функционала (14), а $v_{\parallel}$ входит в $\partial(v\psi)$. Для полного исключения полей m и $v_{\parallel}$ нужно воспользоваться уравнениями связи (22), в данном случае уже без поправок из (23), поскольку они будут порождать в уравнениях (24), (25) лишь заведомо ИК-несущественные вклады. Из (22) следует, что $H_m = \text{const}$, $v_{\parallel} = \text{const}$ и обе

эти константы должны быть равны нулю даже при наличии у полей постоянных (не зависящих от x) составляющих по условиям минимума энергии (см. замечание в конце раздела 3). Таким образом, с учетом явного вида производной H_m функционала (14) получаем

$$H_m = -m + \frac{g_2 \psi^2}{2} = 0, \quad v_{\parallel} = 0. \quad (27)$$

Отсюда следует, что поле v в уравнениях (24), (25) можно считать чисто поперечным, а поле m можно выразить явно через ψ с помощью первого соотношения (27). Это позволяет исключить m из производной H_{ψ} в (24), (25). Легко проверить, что данная процедура эквивалентна исключению m с помощью соотношения (27) непосредственно в самом функционале (14), который перейдет тогда в статическое действие простой ψ^4 -модели (плюс вклад v^2 с $v \equiv v_{\perp}$ согласно (27))

$$S^{\text{st}}(\psi, v) = -\frac{(\partial\psi)^2}{2} - \frac{e_2 \psi^2}{2} - \frac{g' \psi^4}{24} + e_1 \psi - \frac{av^2}{2} \quad (28)$$

с зарядом $g' \equiv g_1 - 3g_2^2$.

Вытекающая из (27) поперечность поля v в (24), (25) позволяет сделать в уравнении (24) замену $\partial(v\psi) \rightarrow (v\partial)\psi$, и тогда этот вклад вместе с $\partial_t \psi$ комбинируется в галилеево-ковариантную производную $\nabla_t \psi = [\partial_t + (v\partial)]\psi$, чем обеспечивается галилеева инвариантность уравнения для ψ . Аналогичное свойство уравнения для $v_{\perp}$ будет иметь место при одновременном отбрасывании (или сохранении) ИК-несущественных вкладов $\partial_t v$ и $(v\partial)v$.

После исключения полей m и $v_{\parallel}$ из (24), (25) получаем соотношения

$$\partial_t \psi = -\lambda'_{11} \partial^2 H_{\psi} - (v\partial)\psi + \eta'_1, \quad (29)$$

$$a\partial_t v_{\perp} = P^{\perp} \{ a^2 \lambda_{44} \partial^2 v_{\perp} + \psi \partial H_{\psi} \} + a\eta_4, \quad (30)$$

в которых H_{ψ} — производная (13) статического действия (28). С точностью до обозначений соотношения (29), (30) совпадают с обычными уравнениями Н-модели [2, 3] (только с иным физическим смыслом поля ψ). По общему правилу (см., например, [7]) стохастическая задача (29), (30) эквивалентна квантово-полевой модели с удвоенным числом полей $\Phi = \psi, v, \psi', v'$ и следующим динамическим функционалом действия:

$$S(\Phi) = -\lambda'_{11} \psi' \partial^2 \psi' + \psi' [-\partial_t \psi - \lambda'_{11} \partial^2 H_{\psi} - (v\partial)\psi] - \\ - a^2 \lambda_{44} v' \partial^2 v' + v' [-a\partial_t v + a^2 \lambda_{44} \partial^2 v + \psi \partial H_{\psi}]. \quad (31)$$

Векторные поля v, v' в (31) считаются поперечными, поэтому проектор $P^{\perp}$ перед вкладом $\psi \partial H_{\psi}$ можно опустить.

Обсудим теперь коэффициенты Онзагера в уравнениях (24), (25) и (29), (30). По своему смыслу комбинация $a\lambda_{44}$ в (25) — кинематический коэффициент вязкости, а λ'_{11} в (24) — коэффициент теплопроводности (для неренормированной задачи все эти параметры являются затравочными). Отметим, что произошедшая при исключении полей m и $v_{\parallel}$

перенормировка $\lambda_{11} \rightarrow \lambda'_{11}$ (26) коэффициента Онзагера в уравнении для ψ точно соответствует по правилам (11), (12) перенормировке $\eta_1 \rightarrow \eta'_1$ соответствующего случайного шума. При этом новый шум η'_1 оказывается точно таким же, как если бы мы с самого начала писали релаксационное уравнение для “энтропии на частицу” (2), а не для нашего поля (8). Это очевидно из выражения (26) для η'_1 : формально такой шум можно было бы получить, если бы мы умножили обе части уравнения (19) для поля m на коэффициент $\alpha = \psi_0/m_0$ и затем вычли его из уравнения (19) для ψ . Тогда вклад $\psi_0(\partial v_{\parallel})$ в этом уравнении сократился бы, а под знаком ∂_t появилась комбинация $\psi - \alpha m$, кратная, очевидно, величине (2), т.к. относительный коэффициент между ΔS и $\Delta \rho$ в (2) однозначно определяется именно требованием взаимного сокращения $\partial v_{\parallel}$ в линейаризованных уравнениях гидродинамики. Это доказывает, что определенный соотношением (26) параметр λ'_{11} в (24) и есть тот самый коэффициент теплопроводности, который используется обычно [1–3], когда релаксационные уравнения пишутся непосредственно для “энтропии на частицу” (или “энтропии на единицу массы”) (2).

Добавим в заключение, что вместо уравнений (19) для полей $\psi \equiv \varphi_1$ и $m \equiv \varphi_2$ можно было бы, конечно, написать аналогичные уравнения для любой другой пары переменных $\varphi' = \varphi'_1, \varphi'_2$, связанных с $\varphi = \varphi_1, \varphi_2$ произвольным линейным преобразованием $\varphi' = L\varphi$, и это привело бы к соответствующему преобразованию шумов и коэффициентов Онзагера: $\eta \rightarrow \eta' = L\eta$, $\alpha \rightarrow \alpha' = L\alpha L^T$. Полезно отметить, что входящая в уравнение (15) для $\partial_t v$ комбинация $\sum_{\alpha} (\varphi_{0\alpha} + \varphi_{\alpha}) \partial H_{\varphi_{\alpha}} \equiv (\varphi_0 + \varphi) \partial H_{\varphi}$ является инвариантом любых линейных преобразований: $(\varphi_0 + \varphi) \partial H_{\varphi} = (\varphi'_0 + \varphi') \partial H_{\varphi'} \quad \forall \varphi' = L\varphi$. По физическим соображениям выделенной парой переменных является $\varphi'_1 = \Delta \bar{S}$ (2) и $\varphi'_2 = \Delta \rho$, т.к. для первой из них в линейном приближении нет сплечения с $\partial v_{\parallel}$ (т.е. $\varphi'_{01} = 0$), а для второй нет диссипации и соответствующего шума (т.е. $\eta'_2 = 0$). Для таких переменных в уравнении для $\partial_t \varphi'_1$ не будет вкладов типа $\text{const}(\partial v_{\parallel})$ и $\alpha'_{12} H'_2$, т.е. тех самых двух слагаемых, которые порождали некоторые проблемы (впрочем, легко решаемые) в аналогичном уравнении (19) для ψ . Однако для последующего “анализа по размерности” ИК-существенности различных вкладов в уравнениях, необходимого для их упрощения, все равно придется вернуться к “правильным” (в смысле размерностей) переменным $\varphi = \psi, m$. В конечном счете после упрощений мы все равно придем к уравнению (24) для нашего поля ψ независимо от выбора пары исходных переменных φ' , а второе уравнение в ведущем (по индексу) порядке сведется к связи $\partial v_{\parallel} = 0$.

5. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

Полная модель (19) является естественной основой для вывода уравнений, описывающих распространение звука в окрестности критической точки. Взаимодействие звуковой волны с критическими флуктуациями ведет к появлению критических сингулярностей в скорости звука и в коэффициенте затухания. Экспериментально эти эффекты наблюдаются обычно в ультразвуковом диапазоне [8].

В литературе предлагались разные способы вывода уравнений для звуковых волн и соответствующего закона дисперсии, основанные на разных вариантах “полной флук-

туационной модели” с разным выбором ее динамических переменных [9–11]. Здесь мы приведем еще один вариант вывода звуковых уравнений, на наш взгляд, более четкий и прозрачный, причем (что важно) оперирующий с “правильными” динамическими переменными ψ , m . Для определенности будем полагать в (14) $e_1 = 0$, $e_2 = T - T_c \equiv \tau$ с точностью до нормировки (критическая изохора), что соответствует постановке эксперимента (заданное количество вещества в заданном объеме).

Приступая к самому выводу, для конкретизации задачи допустим, что к случайным шумам $\eta_{2,3}$ в уравнениях (19) добавлены сколь угодно слабые по интенсивности внешние (т.е. фиксированные, а не случайные) гармонические (т.е. кратные $\exp(-i\omega t)$) с заданной произвольной звуковой частотой ω) источники $\delta\eta_{2,3}$. Тогда в решениях для полей m и $v_{\parallel}$ появятся малые гармонические добавки $\theta = \{\delta m, \delta v_{\parallel}\}$, которые в дальнейшем будем называть “волновыми” (или “звуковыми”) составляющими. Взаимодействие всех полей в (19) приведет, естественно, к появлению аналогичных звуковых добавок и у полей ψ и $v_{\perp}$, но нас они будут интересовать лишь постольку, поскольку они будут влиять на решения для $\theta = \{\delta m, \delta v_{\parallel}\}$.

Итак, рассмотрим уравнения (19) с добавками $\delta\eta_{2,3}$ и в качестве первого шага, как и раньше, выполним процедуру исключения в уравнении для ψ вкладов $\lambda_{12}\partial^2 H_m$ и $\psi_0(\partial v_{\parallel})$ с индексом $+1$. Для этого перепишем точные уравнения (19) для m и $v_{\parallel}$ с добавками $\delta\eta_{2,3}$ в виде $m_0(\partial v_{\parallel}) = \text{“все прочее”}$, $a^{-1}m_0\partial H_m = \text{“все прочее”}$, выразим отсюда через “все прочее” величины $\partial v_{\parallel}$ и ∂H_m , подставим их в уравнения (19) для ψ и $v_{\perp}$, а затем отбросим в их правых частях все ИК-несущественные по индексу вклады. Отметим, что при этом будут исключены и все кратные $\delta\eta_{2,3}$ добавки (т.е. эти добавки имеют смысл “волновых поправок” в ИК-несущественных вкладах, поэтому и отбрасываются вместе с последними). В итоге для полей ψ и $v_{\perp}$ мы получим прежние уравнения (24), (25). Следует подчеркнуть, что это еще не означает полную потерю вкладов волновых поправок $\theta = \{\delta m, \delta v_{\parallel}\}$ в уравнениях для ψ и $v_{\perp}$, т.к. в уравнениях (24), (25) все еще остаются поля m и $v_{\parallel}$, содержащие эти поправки.

Таким образом, четыре уравнения (19) заменяются парой уравнений (24), (25) для полей ψ , $v_{\perp}$ и парой уравнений (19) для полей m и $v_{\parallel}$ с добавками звуковых источников $\eta_{2,3}$. Такая замена выгодна тем, что в уравнении (24) уже нет вкладов с индексом $+1$, поэтому при исключении из уравнений (24), (25) полей m и $v_{\parallel}$ можно ограничиться ведущим (без поправок) приближением для этих полей. Это значит, что при расчете полей m и $v_{\parallel}$ с помощью соответствующих уравнений (19) в них уже можно пренебрегать всеми ИК-несущественными поправками, ограничиваясь ведущими вкладами.

В отсутствие волновых добавок уравнения (19) для m и $v_{\parallel}$ в ведущем (по индексу) приближении сводились к равенствам $0 = -\lambda_{22}\partial^2 H_m - m_0(\partial v_{\parallel})$, $0 = a^{-1}m_0\partial H_m$, что приводило к связям (22) и их следствиям (27), из которых получалось, что $v_{\parallel} = 0$, $m = g_2\psi^2/2 \equiv \bar{m}$. При введении источников $\delta\eta_{2,3}$ появляются соответствующие волновые добавки $\delta v_{\parallel} = v_{\parallel}$, $\delta m = m - \bar{m}$, при этом $H_m = -\delta m$ согласно первому равенству (27).

Для вычисления волновых добавок в уравнениях (19) для m и $v_{\parallel}$, кроме приведенных выше главных (по индексу) слагаемых, следует также сохранить и вклады $\partial_t m$, $\partial_t v_{\parallel}$ в левых частях, которые, очевидно, совершенно необходимы для описания звуковых волн.

Пренебрегая всеми прочими вкладами в (19) как ИК-несущественными, получаем следующую систему звуковых уравнений:

$$\partial_t m = -\lambda_{22} \partial^2 H_m - m_0 (\partial v_{\parallel}) + \delta \eta_2, \quad \partial_t v_{\parallel} = a^{-1} m_0 \partial H_m + \delta \eta_3, \quad (32)$$

в которых $m = \bar{m} + \delta m$, $\bar{m} = g_2 \psi^2 / 2$, $H_m = -\delta m$.

Слагаемое с λ_{22} в системе (32) определяет затухание звуковой волны за счет эффектов теплопроводности. В дальнейшем мы будем им пренебрегать, т.к. эти эффекты в критической области несущественны по сравнению с затуханием, порождаемым взаимодействием волны с критическими флуктуациями (аналогичный вклад в затухание от продольной вязкости в системе (32) уже отброшен). Опустив в (32) вклад с λ_{22} и подставив явные выражения для m и H_m , получим

$$\partial_t \left[\delta m + \frac{g_2 \psi^2}{2} \right] + m_0 (\partial v_{\parallel}) = \delta \eta_2, \quad \partial_t v_{\parallel} + a^{-1} m_0 \delta m = \delta \eta_3. \quad (33)$$

Взаимодействие звуковой волны с критическими флуктуациями определяется вкладом, пропорциональным ψ^2 . Без него соотношения (33) являются простой системой линейных неоднородных уравнений $L_0 \theta = J$ для полей $\theta = \delta m, v_{\parallel}$ и источников $J = \delta \eta_2, \delta \eta_3$ с (2×2) -матричной дифференциальной операцией L_0 . Условие $\det L_0 = 0$ приводит к стандартному закону дисперсии

$$\omega = c_0 k, \quad c_0^{-2} = a m_0^{-2}, \quad (34)$$

константа c_0 – скорость звука в данном приближении.

Теперь нужно учесть влияние возмущения, пропорционального ψ^2 , в уравнениях (33). При оценке этого влияния необходимо иметь в виду очень важное качественное различие между звуковыми ($\theta \equiv \delta m, v_{\parallel}$) и флуктуационными ($\varphi \equiv \psi, v_{\perp}$) полями. Для последних характерным размером при $\tau \equiv |T - T_c| \rightarrow 0$ (на критической изотерме $\Delta T \rightarrow \Delta p$) является корреляционная длина $\xi \sim \tau^{-\nu}$, характерным импульсом (волновым вектором) – величина $k_{\text{фл}} = \xi^{-1} \sim \tau^{\nu}$, характерной частотой – величина $\omega_{\text{фл}} \sim k_{\text{фл}}^z \sim \tau^{z\nu}$, где $z \equiv \Delta_{\omega}$ – критическая размерность частоты в Н-модели. Качественные оценки естественно делать просто по каноническим размерностям, т.е. без учета аномалий. Тогда $\nu = 1/2$, $z = 4$ и при $\tau \rightarrow 0$ получаем, что $k_{\text{фл}} \sim \tau^{1/2}$ и $\omega_{\text{фл}} \sim k_{\text{фл}}^4 \sim \tau^2$. Для звуковых полей θ частоту $\omega_{\text{зв}}$ можно выбирать произвольно, если она определяется внешним источником. С точки зрения эксперимента интерес представляет широкая область частот, в которой $\omega_{\text{зв}}$ может быть как много меньше, так и много больше характерной флуктуационной частоты $\omega_{\text{фл}}$. Поэтому при качественной оценке их можно считать величинами одного порядка: $\omega_{\text{зв}} \sim \omega_{\text{фл}} \sim \tau^2$. Отсюда для характерных волновых векторов звуковых полей получается $k_{\text{зв}} = c_0^{-1} \omega_{\text{зв}} \sim \tau^2$, что приводит к неравенству $k_{\text{зв}} \sim \tau^2 \ll k_{\text{фл}} \sim \tau^{1/2}$ при $\tau \rightarrow 0$. По смыслу $k_{\text{зв}} = \lambda_{\text{зв}}^{-1}$ – обратная длина звуковой волны, а $k_{\text{фл}} = \xi^{-1}$ – обратная корреляционная длина, так что приведенное выше неравенство эквивалентно неравенству $\lambda_{\text{зв}} \gg \xi$. Это означает, что длина звуковой волны

много больше характерного размера флуктуаций ξ . Поэтому при оценке обратного влияния звуковых полей θ на флуктуационные поля Н-модели поля θ можно рассматривать как “почти пространственно-однородные” (хотя скорость их изменения сопоставима с аналогичной величиной для флуктуационных полей). Неравенство $\lambda_{zv} \gg \xi$ выполняется во всей достижимой экспериментально области значений ω_{zv} и τ , причем даже тогда, когда ω_{zv} превышает ω_{fl} на три-четыре порядка [8].

Вернемся к уравнениям (33). Входящую в них величину ψ^2 нужно рассматривать как соответствующее случайное поле Н-модели, “слегка возмущенной” влиянием на нее звуковых полей. Это возмущение слабое (т.к. звуковые поля определяются источниками в (33) и поэтому могут считаться сколь угодно малыми), но полностью пренебречь им нельзя, т.к. пропорциональные звуковым полям θ поправки $\delta\psi^2$ в случайной величине ψ^2 сопоставимы с прочими вкладами в (33). Для любой построенной из полей Н-модели случайной величины F эти поправки определяются соотношением $\delta F = F\delta S$, где δS — линейная по звуковым полям θ поправка к динамическому действию (31) Н-модели. Действительно, функция распределения для полей ϕ возмущенной Н-модели определяется в функциональных интегралах по ϕ весовым множителем $\exp[S(\phi) + \delta S(\phi)]$, сводящимся к $[1 + \delta S(\phi)] \exp S(\phi)$ в линейном приближении по возмущению. Отсюда, в частности, следует, что для случайной величины ψ^2 в (33)

$$\psi^2(x)|_{\text{точн}} \cong \psi^2(x) + \psi^2(x)\delta S(\phi). \quad (35)$$

Все поля в правой части соотношения (35) имеют смысл соответствующих случайных величин простой Н-модели без поправок, поскольку их распределение определяется (см. выше) весовым множителем $\exp S(\phi)$.

При подстановке (35) в (33) не зависящее от звуковых полей θ первое слагаемое в правой части (35) будет порождать лишь некоторую “флуктуационную” (и при этом не гармоническую) добавку к источнику $\delta\eta_2$, которую в дальнейшем будем опускать, т.к. она не оказывает влияния на интересующий нас закон дисперсии звуковых волн. В этом смысле важна лишь линейная по полям θ поправка $\psi^2\delta S(\phi)$ в (35). Величину $\delta S(\phi)$ нетрудно найти по поправкам $\sim \theta$ в уравнениях (24), (25). Они порождаются, во-первых, вкладом $v_{||}$ в $\partial(v\psi)$, во-вторых, вкладом $g_2\psi t$ в производную H_ψ функционала (14), что дает добавку $\delta H_\psi = g_2\psi\delta t$. Все эти поправки в уравнениях (24), (25) соответствуют добавке

$$\delta S(\phi) = \psi' [-\lambda_{11}g_2\partial^2(\psi\delta t) - \partial(v_{||}\psi)] + v'_\perp [g_2\psi\partial(\psi\delta t)] \quad (36)$$

к динамическому действию (31) Н-модели.

Мы привели полное выражение для $\delta S(\phi)$, но фактически в нем существенно только первое слагаемое. Действительно, нас интересует лишь регулярная гармоническая составляющая звуковых полей θ , которая порождается вкладом гармонических внешних источников в уравнениях (33). Порождаемая вкладом, пропорциональным ψ^2 , невозмущенной Н-модели аддитивная “флуктуационная добавка” в θ нас не интересует, и мы условились ее отбрасывать. Считая это сделанным, под $v_{||}$ и δt в (36) можно понимать лишь малые гармонические составляющие этих полей. В силу неравенства $\lambda_{zv} \gg \xi$ эти

величины в рамках Н-модели можно рассматривать как “почти пространственно однородные”, поэтому можно пренебрегать их градиентами. В таком приближении в правой части равенства (36) исчезает последний вклад (вследствие поперечности $v_\perp$), а в первом выражение $\partial^2(\psi\delta m)$ можно заменить на $(\partial^2\psi)(\delta m)$. Эта добавка к действию Н-модели соответствует сдвигу температуры $\tau \rightarrow \tau - g_2\delta m$ в пренебрежении поправками от градиента δm . Поскольку в окрестности критической точки параметр τ – малая величина, малые добавки порядка δm к ней существенны. Этим данное слагаемое (36) отличается от вклада $\partial(v_\parallel\psi)$, который в пренебрежении градиентом $\partial v_\parallel$ является лишь малой поправкой $v_\parallel\partial\psi$ к “немалой” величине $v_\perp\partial\psi$ в Н-модели.

Из сказанного следует, что в рассматриваемой задаче точное выражение (36) можно заменить приближенным

$$\delta S(\phi) = -\lambda'_{11}g_2\psi'(\partial^2\psi)(\delta m). \quad (37)$$

Здесь учитывается лишь эффект сдвига τ , соответствующий гармоническим колебаниям температуры в звуковой волне из-за процессов адиабатического расширения и сжатия [4]. Он и является основным механизмом взаимодействия волны с критическими флуктуациями.

Подставив выражение (36) с $\delta S(\phi)$ из (37) в (33) и отбросив несущественную для нашей задачи (см. выше) флуктуационную добавку, пропорциональную ψ^2 , к источнику $\delta\eta_2$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_t \left[\delta m(x) - \lambda'_{11}A'\psi^2(x) \int dx' \psi'(x')\partial^2\psi(x')\delta m(x') \right] + m_0\partial v_\parallel(x) &= \delta\eta_2(x), \\ \partial_t v_\parallel(x) + a^{-1}m_0\partial(\delta m(x)) &= \delta\eta_3(x), \quad A' \equiv \frac{g_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь указано явно подразумеваемое во всех формулах типа (37) интегрирование по $x \equiv (t, \mathbf{x})$.

Мы пришли к известной задаче о распространении волны в среде со случайными параметрами (“шумом”). В компактной форме система уравнений (38) для звуковых полей $\theta \equiv \delta m$, $v_\parallel$ записывается в виде

$$L\theta = J, \quad L = L_0 - V, \quad (39)$$

где L_0 – невозмущенный оператор, V – возмущение, содержащее случайные поля ψ , ψ' с заданной (Н-моделью) функцией распределения. Задача (39) доопределяется естественным условием запаздывания. Нас интересует усредненное по распределению шума решение $\theta = L^{-1}J$ задачи (39), т.е. величина $\langle\theta\rangle = \langle G\rangle J$, $G \equiv L^{-1}$. По смыслу $\langle G\rangle = \langle L^{-1}\rangle$ – “полный пропагатор” волны. Его можно вычислить по теории возмущений, усредняя по распределению шума величину $G = L^{-1} = (L_0 - V)^{-1} = G_0 + G_0VG_0 + G_0VG_0VG_0 + \dots$ с $G_0 \equiv L_0^{-1}$. Результат представляется диаграммами типа фейнмановских. Для полного пропагатора будет выполняться уравнение Дайсона

$$\langle G\rangle^{-1} = L_0 - \Sigma,$$

где

$$\Sigma = \langle V \rangle + \langle V G_0 V \rangle - \langle V \rangle G_0 \langle V \rangle + \dots \quad (40)$$

есть сумма 1-неприводимых “собственно-энергетических” графов. Искомый закон дисперсии находится путем решения уравнения $\det \langle G \rangle^{-1} = \det [L_0 - \Sigma]$ в импульсно-частотном представлении.

В нашем случае в (40) можно ограничиться простейшим приближением $\Sigma = \langle V \rangle$. Этот вклад определяется Н-моделью, а все следующие члены в разложении для Σ дают лишь ИК-несущественные поправки от взаимодействия полей Н-модели со звуковыми модами. Это можно проверить явно оценкой вкладов второго порядка по V в выражении (40) для Σ , представив их соответствующими фейнмановскими графами. УФ- (“ультрафиолетово”) расходящиеся (что естественно для ИК-несущественных вставок) интегралы по импульсам внутренней звуковой линии в этих графах можно обрезать на флуктуационных масштабах $k_{\text{фл}} \sim \tau^{1/2}$, тогда ИК-несущественность данных вкладов становится очевидной. Таким образом, в нашей задаче с точностью до ИК-несущественных поправок

$$\langle G \rangle^{-1} = \langle G^{-1} \rangle = \langle L \rangle, \quad (41)$$

т.е. усреднять по распределению шума можно сам оператор L в (39), а не величину $G = L^{-1}$. После усреднения $\langle \dots \rangle$ вклад возмущения V в уравнениях (38) представится в виде

$$2A' \partial_t \int dx' \overline{R}(x, x') \delta m(x'), \quad (42)$$

где $\overline{R}(x, x')$ – коррелятор двух составных операторов Н-модели:

$$\begin{aligned} \overline{R}(x, x') &\equiv \langle F(x) F'(x') \rangle, \\ F(x) &\equiv \frac{\psi^2(x) - \langle \psi^2(x) \rangle}{2}, \quad F'(x) \equiv -\lambda'_{11} \psi'(x) \partial^2 \psi(x). \end{aligned} \quad (43)$$

Вычитание константы $\langle \psi^2(x) \rangle$ из оператора $\psi^2(x)$ допустимо потому, что он входит в (38) в виде $\partial_t \psi^2(x)$, в операторы F и F' коэффициенты введены для удобства. В импульсно-частотном представлении свертка в (42) переходит в произведение $\overline{R}(\omega, k) \delta m(\omega, k)$, где ω и k – параметры звуковой волны. Поскольку коррелятор $\overline{R}(\omega, k)$ определяется Н-моделью, “естественным масштабом” для его аргументов ω и k являются соответствующие величины $\omega_{\text{фл}}$ и $k_{\text{фл}}$. Поэтому неравенство $k_{\text{фл}} \gg k_{\text{эв}}$ для волновых векторов (см. выше) позволяет пренебречь зависимостью функции $\overline{R}(\omega, k)$ от k и считать, что $k = 0$. В таком приближении интеграл в (42) заменяется выражением

$$\int dt' R(t, t') \delta m(t', \mathbf{x}), \quad (44)$$

где

$$R(t, t') \equiv \int d\mathbf{x}' \overline{R}(x, x').$$

Выражение (42) в приближении (44) в ω, k -представлении принимает вид $-2i\omega A' R(\omega) \times \delta t(\omega, k)$, поэтому для оператора L в (38) имеем

$$\langle G \rangle^{-1} = \langle L \rangle = \begin{vmatrix} -i\omega[1 + 2A'R(\omega)] & m_0 ik \\ a^{-1}m_0 ik & -i\omega \end{vmatrix}. \quad (45)$$

Отсюда получаем искомый закон дисперсии:

$$k^2 = \omega^2 [c_0^{-2} + A_0 R(\omega)], \quad A_0 \equiv 2A'c_0^{-2}, \quad (46)$$

с неуниверсальными константами c_0^{-2} из (34) и A' из (38).

При заданной частоте ω решение дисперсионного уравнения (46) для $k \equiv |k|$ ищется в виде $k = \omega c^{-1} + i\alpha$, откуда находятся положительные параметры c (скорость звука) и α (коэффициент затухания). Обычно вместо α приводится величина $\alpha_\lambda \equiv \alpha \lambda_{\text{зв}} = 2\pi c\alpha/\omega$ — затухание на длине волны $\lambda_{\text{зв}}$. В реальных условиях $\alpha \ll \omega/c$, и тогда из (46) следует, что

$$c^{-2}(\omega) = c_0^{-2} + A_0 \operatorname{Re} R(\omega), \quad \alpha_\lambda(\omega) c^{-2}(\omega) = \pi A_0 \operatorname{Im} R(\omega). \quad (47)$$

Напомним, что $R(\omega)$ — фурье-образ коррелятора $R(t, t')$ из (44). По физическому смыслу этот коррелятор является функцией отклика величины $\langle F(x) \rangle$ на зависящую только от времени вариацию температуры $\delta\tau(t')$ в Н-модели (с точностью до знака). Функция $R(t, t')$ не имеет δ -образной особенности при $t = t'$, поэтому ее фурье-образ $R(\omega)$ исчезает при $\omega \rightarrow \infty$, так что из (46) имеем

$$R(\infty) = 0, \quad c(\infty) = c_0, \quad \alpha_\lambda(\infty) = 0. \quad (48)$$

Таким образом, константа c_0 имеет смысл предельной скорости звука при $\omega \rightarrow \infty$. Отметим, что эта величина не зависит от τ в отличие от $c(0)$. С точки зрения теории критического поведения параметры c_0 и A_0 в соотношениях (47) представляют собой не зависящие от τ неуниверсальные константы. В правую часть второго равенства (47) параметр c_0 не входит, а из первого равенства (47) его можно исключить вычитанием величины $c^{-2}(\infty) = c_0^{-2}$.

Функцию отклика $R(t, t')$ можно выразить через коррелятор

$$D(t, t') \equiv \int d\mathbf{x}' \langle F(x) F(x') \rangle \quad (49)$$

двух операторов F из (43), воспользовавшись флуктуационно-диссипационной теоремой [12] для Н-модели:

$$R(t, t') = \theta(t - t') \int d\mathbf{x}' \langle F(x) \psi(x') \partial_{t'} \psi(x') \rangle = \theta(t - t') \partial_{t'} D(t, t'). \quad (50)$$

Равенство (50) можно переписать в виде

$$R(t, t') = \delta(t - t') D^{\text{st}} + \partial_{t'} D^{\text{ret}}(t, t'), \quad (51)$$

$$D^{\text{st}} \equiv D(t, t) = C, \quad D^{\text{ret}}(t, t') \equiv \theta(t - t') D(t, t').$$

Согласно общим принципам соответствия между динамикой и статикой, коррелятор $D(t, t)$ не зависит от t и совпадает с соответствующим статическим объектом, в данном случае имеющим смысл теплоемкости $C = C_v$ в простой ψ^4 -модели. В частотном представлении равенство (51) принимает следующий вид:

$$R(\omega) = D^{\text{st}} + i\omega D^{\text{ret}}(\omega), \quad D^{\text{st}} = C. \quad (52)$$

Соотношения (47), (48), (52) являются окончательными выражениями для закона дисперсии в рассматриваемой задаче. Они совпадают с результатами работы [10], отличаюсь лишь способом вывода, в частности выбором динамических переменных. Однопетлевой расчет затухания и скорости звука на критической изохоре вблизи T_c был проведен в работе [9] (однако вывод общего закона дисперсии типа (46) в [9] некорректен). Результаты двухпетлевого расчета мы приведем в следующей работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 96-02-17-033) и КЦФЕ Минобразования РФ (грант № 97-0-14.1-30).

Список литературы

- [1] *K. Kawasaki.* Ann. Phys. N. Y. 1970. V. 61. P. 1.
- [2] *E. D. Siggia, B. I. Halperin, P. C. Hohenberg.* Phys. Rev. B. 1976. V. 13. P. 2110.
- [3] *P. C. Hohenberg, B. I. Halperin.* Rev. Mod. Phys. 1977. V. 49. P. 435.
- [4] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [5] *А. З. Паташинский, В. Л. Покровский.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982.
- [6] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Статистическая физика. Т.1 Изд. 3-е. М.: Наука, 1976.
- [7] *C. De Dominicis, L. Peliti.* Phys. Rev. B. 1978. V. 18. P. 353.
- [8] *D. Roe, B. Wallace, H. Meyer.* J. Low Temp. Phys. 1974. V. 16. P. 51; 1978. V. 30. P. 91.
- [9] *D. M. Kroll, J. M. Ruhland.* Phys. Lett. A. 1980. V. 80. P. 45.
- [10] *R. Dengler, F. Schwabl.* Z. Phys. B. 1987. V. 69. P. 327.
- [11] *R. A. Ferrel, J. K. Bhattacharjee.* Phys. Lett. A. 1981. V. 86. P. 109; 1982. V. 88. P. 77; Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 1788; *R. A. Ferrel, B. Mirhoshen, J. K. Bhattacharjee.* Phys. Rev. B. 1987. V. 35. P. 4662.
- [12] *R. Baush, H. K. Janssen, H. Z. Wagner.* Z. Phys. B. 1976. V. 24. P. 113.

Поступила в редакцию 24.II.1998 г.