Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Лобанов, Осцилляции частиц в Стандартной модели, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 1, 70–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:02:55

© 2017 г.

А. Е. Лобанов*

ОСЦИЛЛЯЦИИ ЧАСТИЦ В СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ

Гильбертовы пространства состояний частиц построены таким образом, что все нейтрино, а также заряженные лептоны, верхние и нижние кварки объединены в мультиплеты, компоненты которых можно рассматривать как различные квантовые состояния одной частицы. Показано, что в теории, основанной на лагранжиане фермионного сектора Стандартной модели, модифицированном на основе данного подхода, возникает эффект осцилляций нейтрино.

Ключевые слова: Стандартная модель, осцилляции нейтрино, состояния с неопределенной массой, группа Пуанкаре, группа $SU(3)$, алгебра Вейля.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9233>

1. ВВЕДЕНИЕ

Стандартная модель электрослабого взаимодействия, основанная на предположении о генерации масс частиц за счет спонтанного нарушения симметрии [1], на неабелевой калибровочной симметрии взаимодействия [2] и идеологии смешивания поколений [3], [4], является общепризнанной. Ее предсказания, полученные в рамках теории возмущений, очень хорошо согласуются с экспериментальными данными, и нет серьезных указаний на необходимость ревизии основных положений модели, по крайней мере для тех энергий, которые достижимы в настоящее время.

Однако осцилляции нейтрино в вакууме не описываются Стандартной моделью электрослабых взаимодействий, поскольку предполагают возможность превращения различных типов свободных фундаментальных фермионов друг в друга. Для описания этого важного явления, надежно установленного экспериментально (см. [5]), используется феноменологическая теория, основанная на пионерских работах Понтекорво [6] и Маки и др. [7]. Эта теория хорошо развита и не противоречит экспериментальным данным. Изложение ее основ дано в отличных обзорных статьях и монографиях (см., например, [8]). Кроме очевидного предположения, что имеются три типа нейтрино с различными (ненулевыми) массами, постулируется, что нейтрино, образующиеся в различных реакциях, возникают в состояниях, представляющих собой суперпозиции массовых состояний. Эти состояния называются

*Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: lobanov@phys.msu.ru

флейворными, причем предполагается, что связь между базисом пространства массовых состояний и базисом пространства флейворных состояний может быть задана унитарной матрицей смешивания. Считается, что в начальный момент времени элементы массового базиса описываются плоскими волнами с одним и тем же (трехмерным) импульсом. Эволюция во времени волновых функций, описывающих флейворные состояния, определяется решением соответствующей задачи Коши. Основные принципы квантовой механики дают возможность из этих предположений получить однозначным образом формулы для вероятностей перехода из одного флейворного состояния в другое. Следующая из них линейная зависимость длин осцилляций от энергии нейтрино подтверждается экспериментально.

Выводы этой теории справедливы при условии малости нейтринных масс по сравнению с энергией нейтрино $m_\nu^2/\mathcal{E}_\nu^2 \ll 1$, что прекрасно выполняется для всех реальных экспериментов, в которых исследуются нейтринные осцилляции. Однако это условие нарушается, когда необходимо рассматривать нейтрино низких энергий, например реликтовых. Существование таких нейтрино предсказывается основными космологическими моделями.

Таким образом, имеет место очевидное логическое противоречие. С одной стороны, осцилляции наблюдаются при энергиях, которые характерны для Стандартной модели. С другой стороны, осцилляции нейтрино предполагают возможность превращения различных типов свободных фундаментальных фермионов друг в друга. То есть уже нельзя считать массовые состояния нейтрино фундаментальными частицами. Подчеркнем, что речь идет именно об осцилляциях нейтрино. Осцилляции нейтральных мезонов, например $K^0 \rightleftharpoons \bar{K}^0$, в Стандартной модели адекватно описываются диаграммой, включающей обмен $W^\pm$ -бозонами.

Чтобы разрешить эту проблему, было предпринято множество попыток. В частности, начиная с работы [9] использовались весьма остроумные рассуждения, связанные с соотношениями неопределенностей. Еще один вариант преодоления указанных противоречий опирается на описание состояний нейтрино в виде волновых пакетов (см., например, [10]), что явно навеяно работами по осцилляциям нейтральных мезонов. Еще один подход связан с рассмотрением рождения нейтрино и его детектирования как единого процесса (см., например, [11], [12] и ссылки в этих статьях). Обзор квантово-полевых моделей для описания осцилляций нейтрино дан в работе [13]. Однако в настоящий момент теория осцилляций нейтрино является в логическом и математическом плане не замкнутой и обладает рядом парадоксальных свойств (см. [14]).

Все противоречия теории можно было бы разрешить, если бы удалось объединить нейтрино (а также заряженные лептоны, верхние и нижние кварки) в фермионные мультиплеты. В таком варианте для описания процессов с участием нейтрино можно было бы использовать теорию возмущений в рамках представления взаимодействия. Именно теория возмущений в Стандартной модели электрослабых взаимодействий и позволяет получить те результаты, которые замечательно подтверждаются экспериментальными данными. Чтобы использовать теорию возмущений, необходимо проквантовать свободные поля, построив пространства Фока для состояний с неопределенной массой, для чего, применив теорему Нётер, надо найти набор интегралов движения, которые отражают симметрию теории (см., например, [15]).

Однако этот, казалось бы, наиболее естественный подход, до сих пор не увенчался успехом, хотя попытки построить пространство Фока для флейворных состояний нейтрино предпринимались неоднократно (см. [16]–[18]). Либо перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения получались отличными от канонических, либо вакуум теории явно зависел от времени (из-за использования унитарно-неэквивалентных фоковскому представлений канонических перестановочных соотношений). Обсуждение этого вопроса можно найти в кратком обзоре [19].

Причина этой неудачи вполне ясна. В релятивистской квантовой теории поля частица обычно ассоциируется с неприводимым представлением группы Пуанкаре [20], [21]. При этом собственное значение оператора Казимира, образованного из квадратов операторов трансляций, отождествляется с квадратом наблюдаемой массы частицы. Очевидно, что при таком подходе существование состояний частиц, являющихся суперпозициями состояний с различными массами, противоречит релятивистской инвариантности теории. Хотя бы потому, что метрика в пространстве состояний задается на гиперboloиде, определяемом значением массы.

Поэтому, чтобы появилась возможность рассматривать суперпозицию состояний с различными массами, необходимо расширить группу симметрии теории, включив в нее преобразования, связанные с внутренней симметрией мультиплетов. Существует ряд теорем [22], из которых следует, что разумные расширения группы симметрии должны сводиться к прямому произведению группы Пуанкаре и группы внутренней симметрии. Это сразу ограничивает круг рассматриваемых моделей. Тем не менее если считать, что спектр масс частиц в мультиплете можно задавать “руками”, как это и делается в Стандартной модели при подборе юкавских констант, и указанная симметрия должна сохраняться только для свободных частиц, то данное обстоятельство не является принципиально важным.

Основным препятствием для построения мультиплетов, содержащих частицы с разными массами, является теорема Йоста¹⁾ [23] (см. также [24]). Кажется, что вследствие этой теоремы попытка расширить группу симметрии теории, включив в нее группу внутренней симметрии мультиплета, приводит к тривиальному результату: массы компонентов мультиплета должны быть равными. Именно это обстоятельство стало наиболее важной причиной неудач при конструировании пространства Фока для флейворных состояний.

Однако возможность обойти данный результат, как будет показано, существует. Основная идея предлагаемого подхода состоит в построении таких неприводимых представлений прямого произведения группы Пуанкаре и группы внутренней симметрии, которые, будучи унитарно-эквивалентными прямому произведению дираковского представления группы Пуанкаре и фундаментального представления группы внутренней симметрии, не являются для него “физически эквивалентными”, поскольку пространства таких представлений будут включать в себя волновые функции частиц с различными массами.

¹⁾Пусть G – конечномерная связная группа Ли, содержащая группу Пуанкаре в качестве аналитической подгруппы. Пусть U – непрерывное унитарное представление G в гильбертовом пространстве H , а P_μ – оператор 4-импульса. Пусть спектр P_μ содержится в $\{0\} \cup V^+$, где V^+ – конус будущего в пространстве Минковского M^4 . Если оператор массы $m = (P_\mu P^\mu)^{1/2}$ имеет изолированное собственное значение $m_1 > 0$, то соответствующее собственное подпространство H_1 инвариантно относительно U .

Отметим, что для группы Пуанкаре “физически неэквивалентные” представления известны. В частности, еще в работе [25] было показано, что так называемые волковские решения уравнения Дирака, описывающего заряженную частицу в поле электромагнитной волны, можно рассматривать как базис пространства представления, унитарно-эквивалентного пространству представления для свободной частицы; впоследствии аналогичный результат был получен для уравнения Дирака–Паули [26]. В работе [27] соответствующие представления были получены для обобщенного уравнения Дирака, описывающего взаимодействие нейтрино с плотной средой и электромагнитным полем. Указанные модели являются моделями с “нарушенной лоренц-инвариантностью”, поэтому существование “физически неэквивалентных” представлений вполне естественно. Для вакуумных же моделей наличие таких представлений кажется несколько неожиданным, однако они будут явно построены в разделе 2.

Рассмотрим требования, предъявляемые к модели, описывающей осцилляции фермионов. Прежде всего необходимо учитывать, что полное действие модели должно быть инвариантным относительно неоднородных преобразований Лоренца координат пространства событий. Действие для свободных полей должно быть инвариантным относительно преобразований расширенной группы симметрии, а в части действия, связанного со взаимодействием частиц, внутренняя симметрия должна быть нарушена. Кроме того, в лагранжиане взаимодействия должны быть члены, которые нарушают инвариантность теории относительно преобразований абелевой подгруппы группы Пуанкаре, которая обычно связывается с трансляциями. Естественно, поскольку пространство событий очевидным образом однородно, нарушение трансляционной инвариантности, как и нарушение четности в слабых процессах, может возникнуть только вследствие специальной структуры лагранжиана взаимодействия. А это означает, что преобразование волновых функций при трансляциях не должно сводиться к тривиальному соотношению $\psi'(x') = \psi(x)$. Поэтому генераторы трансляций должны отличаться от производных по соответствующим координатам, т. е. не должны сводиться к операторам канонического импульса.

В разделе 3 показано, что модель, основанная на лагранжиане Стандартной модели электрослабых взаимодействий, в котором поля отдельных фермионов заменены полями мультиплетов, удовлетворяет этим требованиям. А квантование полей мультиплетов приводит к каноническим перестановочным соотношениям.

2. ПРОСТРАНСТВА ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Хорошо известно (см., например, [24]), что алгебра дифференцирований для алгебры Ли группы Пуанкаре (алгебра Вейля) состоит не только из генераторов трансляций P^μ и генераторов лоренцевских поворотов $M^{\mu\nu}$, но и из генератора дилатаций D :

$$[P^\mu, D] = P^\mu, \quad [M^{\mu\nu}, D] = 0, \quad (1)$$

вследствие чего можно построить внешние автоморфизмы алгебры Пуанкаре, которые приводят к изменению масштаба операторов трансляций. Для неприводимых представлений дилатации изменяют значения оператора Казимира, характеризующего массу частицы. То есть такое преобразование позволяет рассматривать частицы, имеющие различные массы, даже в том случае, если изначально их массы

считались равными. Необходимо отметить, что это вполне отвечает духу Стандартной модели, в которой все массы генерируются за счет ненулевого вакуумного среднего единственного поля Хиггса. Следовательно, в Стандартной модели расщепление масс фермионов можно интерпретировать не только как различие констант связи с хиггсовским полем, но и как масштабное преобразование пространств событий для различных фермионов.

Выберем $SU(3)$ как группу внутренней симметрии теории. Такое предположение вполне разумно, поскольку экспериментальные данные свидетельствуют о том, что имеются три поколения фермионов. Будем считать, что расширенная группа симметрии теории есть прямое произведение группы Пуанкаре и группы $SU(3)$.

Рассмотрим неприводимое представление этой группы, построенное как тензорное произведение дираковского представления группы Пуанкаре и фундаментального представления группы $SU(3)$. Явный вид элементов алгебры Ли в этом случае вполне очевиден. Это стандартные генераторы алгебры Пуанкаре для дираковского представления, умноженные на единичную (3×3) -матрицу $\mathbb{I}$:

$$P_\mu = i \partial_\mu \mathbb{I}, \quad M_{\mu\nu} = i \left((x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu}{4} \right) \mathbb{I}, \quad (2)$$

и эрмитовы генераторы X_i фундаментального представления группы $SU(3)$, которые можно реализовать в виде матриц Гелл-Манна:

$$\begin{aligned} X_1 &= (e^{(1)} \otimes e^{(2)}) + (e^{(2)} \otimes e^{(1)}), \\ X_2 &= i(e^{(2)} \otimes e^{(1)}) - i(e^{(1)} \otimes e^{(2)}), \\ X_3 &= (e^{(1)} \otimes e^{(1)}) - (e^{(2)} \otimes e^{(2)}), \\ X_4 &= (e^{(1)} \otimes e^{(3)}) + (e^{(3)} \otimes e^{(1)}), \\ X_5 &= i(e^{(3)} \otimes e^{(1)}) - i(e^{(1)} \otimes e^{(3)}), \\ X_6 &= (e^{(2)} \otimes e^{(3)}) + (e^{(3)} \otimes e^{(2)}), \\ X_7 &= i(e^{(3)} \otimes e^{(2)}) - i(e^{(2)} \otimes e^{(3)}), \\ X_8 &= (e^{(1)} \otimes e^{(1)}) + (e^{(2)} \otimes e^{(2)}) - 2(e^{(3)} \otimes e^{(3)}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $e^{(l)}$ – базис трехмерного векторного пространства над полем комплексных чисел, который для определенности можно выбрать следующим образом:

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}_{m,1/2}$ решений матричного уравнения Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I} - m\mathbb{I})\Psi(x) = 0, \quad (5)$$

которое описывает мультиплет, состоящий из трех частиц. Если ввести скалярное произведение (суммирование ведется по координатам векторов $e_s^{(l)}$)

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{s=1}^3 \int d\mathbf{x} \Psi_s^\dagger(\mathbf{x}, t) \Phi_s(\mathbf{x}, t), \quad (6)$$

то $\mathcal{H}_{m,1/2}$ есть прямая сумма пространств неприводимых унитарных представлений прямого произведения группы Пуанкаре и группы $SU(3)$, отвечающих положительным и отрицательным частотам. Действие этой группы в $\mathcal{H}_{m,1/2}$ задается генераторами (2), (3). Очевидно, что в этом представлении все компоненты мультиплета имеют одинаковые массы.

Естественный базис для пространства решений с положительной частотой представляет собой набор функций

$$\Psi_{p,\zeta,l}(x) = \psi_{p,\zeta}(x)e^{(l)}. \quad (7)$$

Здесь $\psi_{p,\zeta}(x)$ – плоские волны

$$\psi_{p,\zeta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2p^0}} u_{p,\zeta} e^{-i(px)}, \quad (8)$$

где $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, а спиноры $u_{p,\zeta}$ удовлетворяют уравнению

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u_{p,\zeta} = 0 \quad (9)$$

и нормированы условием

$$\bar{u}_{p,\zeta} u_{p,\zeta'} = 2m\delta_{\zeta,\zeta'}, \quad \bar{u}_{p,\zeta} = u_{p,\zeta}^\dagger \gamma^0. \quad (10)$$

Индексы $\zeta = \pm 1$ нумеруют состояния поляризации частиц.

Таким же образом можно рассмотреть пространство представления с отрицательной частотой. Базис в этом пространстве можно задать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_{-p,\zeta,l}(x) &= \psi_{-p,\zeta}(x)e^{(l)}, & \psi_{-p,\zeta}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2p^0}} u_{-p,\zeta} e^{i(px)}, \\ (\gamma^\mu p_\mu + m)u_{-p,\zeta} &= 0, & \bar{u}_{-p,\zeta} u_{-p,\zeta'} &= -2m\delta_{\zeta,\zeta'}. \end{aligned} \quad (11)$$

Явный вид спиноров $u_{p,\zeta}$, $\bar{u}_{p,\zeta}$, а также спиноров $u_{-p,\zeta}$, $\bar{u}_{-p,\zeta}$, приведен, например, в монографии [28]. В дальнейшем мы будем работать с представлениями с положительной частотой. Преобразования для представлений с отрицательной частотой аналогичны.

Будем считать, что нейтрино, заряженные лептоны, а также верхние и нижние кварки объединяются в четыре различных мультиплета. Построим пространства представлений расширенной группы симметрии для этих мультиплетов. Идея построения, как уже отмечалось, основана на факте существования у рассматриваемой группы внешних автоморфизмов, связанных с дилатациями. Ясно, что пространства неприводимых представлений для мультиплетов, вообще говоря, не должны совпадать.

Действительно, в пространстве $\mathcal{H}_{m,1/2}$ дилатации задаются оператором

$$D = x_\mu \partial^\mu + \frac{3}{2}. \quad (12)$$

Оператор уравнения Дирака (5) коммутирует с генераторами (2), (3). Однако имеет место равенство

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I} - m\mathbb{I}, D] = i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I}, \quad (13)$$

т.е. коммутатор обращается в нуль только на решениях для частиц с $m = 0$. Отсюда следует возможность построения несовпадающих пространств неприводимых представлений для мультиплетов с ненулевыми массами. Подчеркнем, что для безмассовых фермионов такая возможность отсутствует, но теория становится масштабно-инвариантной (а следовательно, и конформно-инвариантной).

Свяжем пространства представлений для мультиплетов, которые обозначим через $\mathcal{H}_{m,1/2}^{(i)}$, $i = \nu, e, u, d$, с пространством $\mathcal{H}_{m,1/2}$ сплетающими операторами, которые можно сконструировать следующим образом. Для каждого мультиплета вместо базисных векторов $e^{(l)}$ введем новые базисные векторы²⁾ $n^{(l)}$, подействовав некоторой унитарной матрицей $\mathbb{V}^{(i)}$ на $e^{(l)}$:

$$n_s^{(l)} = \sum_{r=1}^3 V_{sr}^{(i)} e_r^{(l)}. \quad (14)$$

Векторы $n^{(l)}$ нормированы условиями (звездочка означает комплексное сопряжение)

$$\sum_{s=1}^3 n_s^{(l)} n_s^{*(k)} = \delta_{kl}, \quad \sum_{l=1}^3 n_s^{(l)} n_r^{*(l)} = \delta_{sr}. \quad (15)$$

Операторы

$$\mathbb{P}_{(l)}^{(i)} = n^{(l)} \otimes n^{*(l)} \quad (16)$$

определяют ортогональные проекторы:

$$\mathbb{P}_{(l)}^{(i)} \mathbb{P}_{(k)}^{(i)} = \delta_{kl} \mathbb{P}_{(l)}^{(i)}, \quad \sum_{l=1}^3 \mathbb{P}_{(l)}^{(i)} = \mathbb{I}. \quad (17)$$

Наиболее общий вид для нетривиальных сплетающих операторов

$$\mathcal{K}^{(i)} = \sum_{l=1}^3 \mathcal{D}_{(l)}^{(i)} (n^{(l)} \otimes e^{(l)}), \quad (18)$$

где

$$\mathcal{D}_{(l)}^{(i)} = \exp \left(\ln \mu_l^{(i)} \left(x_\nu \partial^\nu + \frac{3}{2} \right) \right), \quad (19)$$

$\mu_l^{(i)}$ – положительные числа.

Новые пространства $\mathcal{H}_{m,1/2}^{(i)}$ состоят из решений модифицированных уравнений Дирака, задающих условия неприводимости представлений. Так как

$$\mathcal{K}^{(i)} (i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I} - m\mathbb{I}) \mathcal{K}^{(i)-1} = (i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{N}^{(i)} - m\mathbb{I}), \quad \mathbb{N}^{(i)} = \sum_{l=1}^3 (\mu_l^{(i)})^{-1} \mathbb{P}_{(l)}^{(i)}, \quad (20)$$

то эти уравнения записываются следующим образом:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{N}^{(i)} - m\mathbb{I}) \Psi^{(i)}(x) = 0. \quad (21)$$

²⁾Естественно, для каждого мультиплета они свои. Индекс (i) при записи этих векторов будем опускать.

Поскольку параметры $\mu_l^{(i)}$ выбраны отличными от нуля, то $\mathbb{N}^{(i)}$ невырождены, и существуют обратные матрицы

$$(\mathbb{N}^{(i)})^{-1} = \sum_{l=1}^3 \mu_l^{(i)} \mathbb{P}_{(l)}^{(i)}. \quad (22)$$

Если умножить (21) на (22) слева, то уравнения Дирака принимают более привычный вид

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \mathbb{I} - \mathbb{M}^{(i)})\Psi^{(i)}(x) = 0, \quad (23)$$

где

$$\mathbb{M}^{(i)} = m(\mathbb{N}^{(i)})^{-1} = \sum_{l=1}^3 m_l^{(i)} \mathbb{P}_{(l)}^{(i)}, \quad m_l^{(i)} = m\mu_l^{(i)}. \quad (24)$$

Очевидно, что множества решений уравнений (21) и (23) совпадают.

Базисы $\Psi_{q,\zeta,\mu_l^{(i)}}^{(i)}(x)$ в пространствах $\mathcal{H}_{m,1/2}^{(i)}$ можно построить, подействовав операторами $\mathcal{K}^{(i)}$ на функции (7):

$$\Psi_{q,\zeta,\mu_l^{(i)}}^{(i)}(x) = \psi_{q,\zeta,\mu_l^{(i)}}^{(i)}(x) n^{(l)}. \quad (25)$$

Здесь $\psi_{q,\zeta,\mu_l^{(i)}}^{(i)}(x)$ – плоские волны, полученные из (8) с помощью изменения масштаба координат пространства событий:

$$\psi_{q,\zeta,\mu_l^{(i)}}^{(i)}(x) = \frac{(\mu_l^{(i)})^{3/2}}{\sqrt{2q^0}} u_{q,\zeta} e^{-i\mu_l^{(i)}(qx)}. \quad (26)$$

В этой формуле $q^0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$, спиноры $u_{q,\zeta}$ удовлетворяют уравнению

$$(\gamma^\mu q_\mu - m)u_{q,\zeta} = 0 \quad (27)$$

и нормированы условием

$$\bar{u}_{q,\zeta} u_{q,\zeta'} = 2m\delta_{\zeta,\zeta'}. \quad (28)$$

Очевидно, что $\Psi^{(i)}(x)$ (элементы пространства $\mathcal{H}_{m,1/2}^{(i)}$) и $\Psi(x)$ (элементы пространства $\mathcal{H}_{m,1/2}$) связаны унитарным (относительно скалярного произведения (6)) преобразованием.

Прямым вычислением можно получить явный вид элементов алгебры Ли для рассматриваемых представлений. Действие генераторов, отвечающих группе $SU(3)$,

сводится к очевидным перестановкам базисных элементов. Эти генераторы определяются формулами $X_j^{(i)} = \mathcal{K}^{(i)} X_j \mathcal{K}^{(i)-1}$:

$$\begin{aligned}
 X_1^{(i)} &= (n^{(1)} \otimes \bar{n}^{(2)}) \mathcal{D}_{(1)}^{(i)} (\mathcal{D}_{(2)}^{(i)})^{-1} + (n^{(2)} \otimes \bar{n}^{(1)}) \mathcal{D}_{(2)}^{(i)} (\mathcal{D}_{(1)}^{(i)})^{-1}, \\
 X_2^{(i)} &= i(n^{(2)} \otimes \bar{n}^{(1)}) \mathcal{D}_{(2)}^{(i)} (\mathcal{D}_{(1)}^{(i)})^{-1} - i(n^{(1)} \otimes \bar{n}^{(2)}) \mathcal{D}_{(1)}^{(i)} (\mathcal{D}_{(2)}^{(i)})^{-1}, \\
 X_3^{(i)} &= (n^{(1)} \otimes \bar{n}^{(1)}) - (n^{(2)} \otimes \bar{n}^{(2)}), \\
 X_4^{(i)} &= (n^{(1)} \otimes \bar{n}^{(3)}) \mathcal{D}_{(1)}^{(i)} (\mathcal{D}_{(3)}^{(i)})^{-1} + (n^{(3)} \otimes \bar{n}^{(1)}) \mathcal{D}_{(3)}^{(i)} (\mathcal{D}_{(1)}^{(i)})^{-1}, \\
 X_5^{(i)} &= i(n^{(3)} \otimes \bar{n}^{(1)}) \mathcal{D}_{(3)}^{(i)} (\mathcal{D}_{(1)}^{(i)})^{-1} - i(n^{(1)} \otimes \bar{n}^{(3)}) \mathcal{D}_{(1)}^{(i)} (\mathcal{D}_{(3)}^{(i)})^{-1}, \\
 X_6^{(i)} &= (n^{(2)} \otimes \bar{n}^{(3)}) \mathcal{D}_{(2)}^{(i)} (\mathcal{D}_{(3)}^{(i)})^{-1} + (n^{(3)} \otimes \bar{n}^{(2)}) \mathcal{D}_{(3)}^{(i)} (\mathcal{D}_{(2)}^{(i)})^{-1}, \\
 X_7^{(i)} &= i(n^{(3)} \otimes \bar{n}^{(2)}) \mathcal{D}_{(3)}^{(i)} (\mathcal{D}_{(2)}^{(i)})^{-1} - i(n^{(2)} \otimes \bar{n}^{(3)}) \mathcal{D}_{(2)}^{(i)} (\mathcal{D}_{(3)}^{(i)})^{-1}, \\
 X_8^{(i)} &= (n^{(1)} \otimes \bar{n}^{(1)}) + (n^{(2)} \otimes \bar{n}^{(2)}) - 2(n^{(3)} \otimes \bar{n}^{(3)}).
 \end{aligned} \tag{29}$$

Отметим, что диагональные операторы $X_3^{(i)}$, $X_8^{(i)}$, по стандартной терминологии отвечающие проекции слабого изоспина и гиперзаряду, определяются постоянными матрицами.

Генераторы группы Лоренца не изменяют свою форму:

$$M_{\mu\nu}^{(i)} = \mathcal{K}^{(i)} M_{\mu\nu} \mathcal{K}^{(i)-1} = M_{\mu\nu} = i \left((x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu}{4} \right) \mathbb{I}, \tag{30}$$

так как оператор дилатаций коммутирует с операторами поворотов и бустов. Это вполне естественно, поскольку результаты наблюдений, в частности для осцилляций частиц, не должны зависеть от выбора инерциальной системы отсчета, в которой проводятся измерения.

Для операторов трансляций имеем

$$P_\mu^{(i)} = \mathcal{K}^{(i)} P_\mu \mathcal{K}^{(i)-1} = i \partial_\mu \mathbb{N}^{(i)}, \tag{31}$$

т. е. они уже не являются операторами канонического импульса.

Подчеркнем еще раз, что собственные значения всех операторов Казимира, построенных из генераторов (29)–(31), на решениях уравнений (23) принимают те же значения, что и при реализации представления в пространстве $\mathcal{H}_{m,1/2}$. В частности,

$$P^{(i)\mu} P_\mu^{(i)} \Psi^{(i)}(x) = m^2 \Psi^{(i)}(x), \tag{32}$$

однако теперь параметр m уже не имеет смысла наблюдаемой массы, а задает масштаб масс мультиплета. Иными словами, он представляет собой затравочную массу мультиплета. Наблюдаемые массы определяются действием квадрата оператора канонического импульса на функции $\Psi_{q,\zeta,\mu_l}^{(i)}(x)$ и равны $m_l^{(i)} = \mu_l^{(i)} m$ для l -компоненты мультиплета.

Следует отметить, что выбор базисов в пространствах $\mathcal{H}_{m,1/2}^{(i)}$, определяемых формулой (25), не является единственно возможным. Базисные функции являются собственными функциями полного набора операторов, коммутирующих с операторами уравнений (23). Естественно, выбор такого полного набора неоднозначен. Для

обычного уравнения Дирака, если ограничиться случаем плосковолновых решений, в указанный полный набор входят пространственные компоненты импульса (т.е. генераторы пространственных трансляций) и оператор проекции спина, который строится известным образом из компонент вектора Паули–Любаньского–Баргмана. Неоднозначность состава полного набора в этом случае связана только с выбором спинового оператора. В отличие от обычного уравнения Дирака, для уравнений (23) полный набор состоит из пяти операторов, вследствие чего ситуация становится более сложной.

Найдем полные наборы операторов, для которых базисы пространств решений уравнений (23) состоят из плоских волн. Пусть $\mathbb{L}^{(i)}$ – невырожденные эрмитовы матрицы, коммутирующие с $\mathbb{M}^{(i)}$. Такие матрицы могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbb{L}^{(i)} = \sum_{l=1}^3 \lambda_l^{(i)} \mathbb{P}_{(l)}^{(i)}, \quad \lambda_l^{(i)} \neq 0. \quad (33)$$

Если считать, что параметры $\lambda_l^{(i)}$ при фиксированном (i) попарно не совпадают, то в пространстве решений уравнения (23) эта матрица задает действие оператора $\mathcal{M}^{(i)}$, представляющего собой линейную комбинацию $X_3^{(i)}$, $X_8^{(i)}$ и операторов Казимира группы $SU(3)$. Поскольку рассматриваемое представление неприводимо, то действие указанных операторов Казимира задается матрицами, кратными единичной. Очевидно, что оператор $\mathcal{M}^{(i)}$ можно выбрать в качестве одного из операторов полного набора. Этот оператор нужен для того, чтобы выделять ортогональные подпространства, задаваемые проекторами $\mathbb{P}_{(l)}^{(i)}$. Поэтому численные значения параметров $\lambda_l^{(i)}$ могут быть произвольными. Естественнo положить $\lambda_l^{(i)} = m_l^{(i)}$, т.е. считать, что действие оператора $\mathcal{M}^{(i)}$ задается матрицей $\mathbb{M}^{(i)}$.

Чтобы базис был плосковолновым, в полный набор необходимо включить три оператора с непрерывным спектром. Если в качестве таких операторов выбрать генераторы пространственных трансляций, т.е. пространственные компоненты 4-вектора $P_\mu^{(i)}$, то в качестве оператора, определяющего проекцию спина, необходимо взять любой стандартный спиновый проектор, умноженный на матрицу $\mathbb{N}^{(i)}$. Тогда полная ортонормированная система решений уравнения (23), отвечающая фиксированной (положительной) частоте, представляет собой рассмотренный нами базис $\Psi_{q,\zeta,\mu_l^{(i)}}^{(i)}(x)$ (см. (25)).

Однако в качестве операторов с непрерывным спектром можно выбрать пространственные компоненты 4-вектора

$$\mathbb{L}^{(i)} P_\mu^{(i)} = i \partial_\mu \mathbb{L}^{(i)} \mathbb{N}^{(i)}, \quad (34)$$

где $\mathbb{L}^{(i)}$ – любая матрица, удовлетворяющая соотношению (33). В частности, можно положить $\mathbb{L}^{(i)} = (\mathbb{N}^{(i)})^{-1}$. Тогда базисные функции являются собственными функциями пространственных компонент оператора канонического импульса $i \partial_\mu$ и вид этих функций определяется соотношением

$$\Psi_{p,\zeta,m_l^{(i)}}^{(i)}(x) = \psi_{p,\zeta,m_l^{(i)}}(x) n^{(l)}, \quad (35)$$

где $\psi_{p,\zeta,m_l^{(i)}}(x)$ – плоские волны, описывающие частицы с массой $m_l^{(i)}$:

$$\psi_{p,\zeta,m_l^{(i)}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2p_l^0}} u_{p,\zeta}^{(m_l^{(i)})} e^{-i(px)}. \quad (36)$$

Здесь $p_l^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + (m_l^{(i)})^2}$, спиноры $u_{p,\zeta}^{(m_l^{(i)})}$ удовлетворяют уравнениям

$$(\gamma^\mu p_\mu - m_l^{(i)}) u_{p,\zeta}^{(m_l^{(i)})} = 0 \quad (37)$$

и нормированы условием

$$\bar{u}_{p,\zeta}^{(m_l^{(i)})} u_{p,\zeta'}^{(m_l^{(i)})} = 2m_l^{(i)} \delta_{\zeta,\zeta'}. \quad (38)$$

Таким образом, матрицу $\mathbb{M}^{(i)}$ можно интерпретировать как массовую матрицу мультиплетта, а параметры $m_l^{(i)} = \mu_l^{(i)} m$ имеют смысл наблюдаемых масс входящих в мультиплет частиц. Состояния, которые являются собственными функциями оператора $\mathcal{M}^{(i)}$, естественно называть массовыми при любом выборе операторов с непрерывным спектром, т. е. при любом выборе матрицы $\mathbb{L}^{(i)}$, в том числе и когда $\mathbb{L}^{(i)} = \mathbb{I}$.

Однако базис в пространстве $\mathcal{H}_{m,1/2}^{(i)}$ можно задать и в виде суперпозиции массовых состояний. Рассмотрим произвольную унитарную матрицу $\mathbb{U}$ с компонентами $U_{\alpha l}$. Функции³⁾

$$\Psi_{p,\zeta,\alpha}^{(i)}(x) = \sum_{l=1}^3 U_{\alpha l} \Psi_{p,\zeta,l}^{(i)}(x) \quad (39)$$

представляют собой полную ортонормированную систему в пространстве $\mathcal{H}_{m,1/2}^{(i)}$ относительно скалярного произведения (6). Базис (39) можно получить как результат унитарного преобразования $\mathcal{U}$, переводящего пространство $\mathcal{H}_{m,1/2}^{(i)}$ в себя:

$$\Psi_{p,\zeta,\alpha}^{(i)}(x) = \mathcal{U} \Psi_{p,\zeta,l}^{(i)}(x) = \int K^{(i)}(x, y) \Psi_{p,\zeta,l}^{(i)}(y) dy. \quad (40)$$

Ядро преобразования определяется формулой

$$K^{(i)}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{\zeta=\pm 1} \int d\mathbf{q} \delta_{\alpha k} \Psi_{p,\zeta,\alpha}^{(i)}(x) \otimes \Psi_{p,\zeta,k}^{(i)\dagger}(y). \quad (41)$$

Элементы базиса (39) уже не являются собственными функциями оператора $\mathcal{M}^{(i)}$, задаваемого массовой матрицей. Пятый оператор полного набора (назовем его $\mathcal{F}^{(i)}$) определяется теперь следующим образом:

$$\mathcal{F}^{(i)} = \mathcal{U} \mathcal{M}^{(i)} \mathcal{U}^\dagger. \quad (42)$$

³⁾Здесь $\Psi_{p,\zeta,l}^{(i)}(x)$ означает волновую функцию произвольного массового состояния.

Естественно, этот оператор может явно зависеть от координат пространства событий.

Следует подчеркнуть, что вид причинной функции Грина уравнения (23)

$$S_c^{(i)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{l=1}^3 \mathbb{P}_l^{(i)} \int \frac{(\gamma_\mu p^\mu + m_l^{(i)})e^{-i(px)}}{(m_l^{(i)})^2 - p^2 - i\epsilon} d^4p \quad (43)$$

не зависит от выбранного базиса.

3. МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Теперь все готово для того, чтобы записать лагранжиан, описывающий электро-слабое взаимодействие. Поскольку, как хорошо известно из экспериментальных данных, взаимодействие переносится калибровочными полями, связанными с группой $SU(2) \times U(1)$, то лагранжиан должен представлять собой обобщение лагранжиана Стандартной модели, дополненного правым нейтринным синглетом. Естественно, возникают изменения в фермионном секторе. Лагранжиан для физических фермионных полей в рассматриваемой модели записывается следующим образом:

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (44)$$

где

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} \sum_{i=\nu, e, u, d} [(\bar{\Psi}^{(i)} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi^{(i)})) - (\partial_\mu \bar{\Psi}^{(i)}) \gamma^\mu \Psi^{(i)}] - \sum_{i=\nu, e, u, d} \bar{\Psi}^{(i)} \mathbb{M}^{(i)} \Psi^{(i)} \quad (45)$$

– лагранжиан свободных полей, а

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & - \sum_{i=\nu, e, u, d} \bar{\Psi}^{(i)} \mathbb{M}^{(i)} (H/v) \Psi^{(i)} - \\ & - \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{\Psi}^{(e)} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \Psi^{(\nu)} W_\mu^- + \bar{\Psi}^{(\nu)} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \Psi^{(e)} W_\mu^+) - \\ & - \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{\Psi}^{(d)} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \Psi^{(u)} W_\mu^- + \bar{\Psi}^{(u)} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \Psi^{(d)} W_\mu^+) - \\ & - e \sum_{i=e, u, d} Q^{(i)} \bar{\Psi}^{(i)} \gamma^\mu \Psi^{(i)} A_\mu - \\ & - \frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_{i=\nu, e, u, d} \bar{\Psi}^{(i)} \gamma^\mu (T^{(i)} - 2Q^{(i)} \sin^2 \theta_W + T^{(i)} \gamma^5) \Psi^{(i)} Z_\mu \end{aligned} \quad (46)$$

– лагранжиан взаимодействия фермионов с векторными бозонами $W_\mu^\pm$, Z_μ , A_μ и бозоном Хиггса H . Здесь θ_W – угол Вайнберга, $e = g \sin \theta_W$ – электрический заряд позитрона, $T^{(i)}$ – проекция слабого изоспина ($T^{(\nu)} = T^{(u)} = 1/2$, $T^{(e)} = T^{(d)} = -1/2$), $Q^{(i)}$ – электрический заряд мультиплета в единицах e , а v – вакуумное среднее поля Хиггса. Таким образом, по форме лагранжиан (44) совпадает с лагранжианом Стандартной модели (см., например, [5]), однако в нем волновые функции $\Psi^{(i)}$ описывают не отдельные частицы, а мультиплет в целом.

Сделаем небольшое отступление феноменологического характера. В Стандартной модели генерация масс осуществляется за счет спонтанного нарушения симметрии. Поэтому, чтобы получить различные массы частиц, наблюдаемые в эксперименте, необходимо ввести различные юкавские константы связи с полем Хиггса. Эта процедура разрушает $SU(3)$ -симметрию теории, которая имела бы место при равных юкавских константах. Чтобы возникало наблюдаемое смешивание поколений, юкавские константы необходимо заменить массовыми матрицами [4] и тем самым ввести новые параметры в модель. Без ограничения общности эти матрицы можно считать эрмитовыми, так как конечный поворот в флейворном пространстве для правых синглетов не приводит к наблюдаемым эффектам.

Дальнейшие преобразования не являются столь же однозначными. В формализме Кобаяши–Маскава производится диагонализация массовых матриц (причем для каждого типа фермионов для этого используются, вообще говоря, различные унитарные матрицы). Это преобразование приводит к появлению матрицы смешивания в членах лагранжиана взаимодействия, связанных с заряженными токами. При таком преобразовании предполагается, что все описываемые моделью фермионы (нейтрино, заряженные лептоны, верхние и нижние кварки) являются фундаментальными частицами. Это предположение вполне адекватно экспериментальным данным семидесятых годов. Однако после обнаружения нейтринных осцилляций оно уже не кажется столь естественным.

В предлагаемой модификации Стандартной модели затравочные массы m , фигурирующие в формуле (32), представляют собой (с точностью до неизмеримых констант) вакуумное среднее поля Хиггса. Смешивание возникает на уровне теории возмущений в представлении взаимодействия за счет использования решений уравнений (23), т. е. 12-компонентных волновых функций. При этом нет необходимости явно вводить в $\mathcal{L}_{\text{int}}$ матрицу смешивания. Очевидно, что вероятности переходов, полученные таким способом, будут осциллировать. Однако, по крайней мере в древесном приближении, предсказания результатов измерений детекторами, находящимися на малых по сравнению с длинами осцилляций расстояниях от источника, будут полностью совпадать с предсказаниями общепринятого подхода.

С математической точки зрения такая модификация модели возможна, так как для каждого мультиплет действие, определяемое лагранжианом свободных полей (45), инвариантно относительно преобразований, задаваемых унитарно-эквивалентными представлениями прямого произведения группы Пуанкаре и группы $SU(3)$, описанными выше. Поэтому при квантовании предлагаемой модели мультиплет можно рассматривать как одну частицу. Одночастичные состояния в пространстве Фока при этом задаются обычным образом, операторы рождения и уничтожения удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям. Однако эти операторы несут дополнительное дискретное квантовое число, которое характеризует массовый состав состояния. В определенном смысле можно говорить, что в нашей модели существуют четыре фундаментальных фермиона, каждый из которых может находиться либо в одном из трех массовых состояний, либо в чистом, в квантово-механическом смысле, состоянии, которое представляет собой суперпозицию состояний с фиксированными массами.

Обсудим все это детально, используя стандартную процедуру, описанную, например, в книге [15]. Рассмотрим базис (25). Компоненты полевой функции запишем

в виде

$$\begin{aligned}\Psi_s^{(i)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=1}^3 \sum_{\zeta=\pm 1} \int \frac{d\mathbf{q}}{\sqrt{2q^0}} (\mu_l^{(i)})^{3/2} n_s^{(l)} \times \\ &\quad \times [e^{-i\mu_l^{(i)}(qx)} u_{q,\zeta} \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^-(\mathbf{q}) + e^{i\mu_l^{(i)}(qx)} u_{-q,\zeta} \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^+(\mathbf{q})], \\ \bar{\Psi}_s^{(i)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=1}^3 \sum_{\zeta=\pm 1} \int \frac{d\mathbf{q}}{\sqrt{2q^0}} (\mu_l^{(i)})^{3/2} n_s^{*(l)} \times \\ &\quad \times [e^{-i\mu_l^{(i)}(qx)} \bar{u}_{-q,\zeta} \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^{*-}(\mathbf{q}) + e^{i\mu_l^{(i)}(qx)} \bar{u}_{q,\zeta} \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^{*+}(\mathbf{q})].\end{aligned}\quad (47)$$

Используя теорему Нётер, найдем интегралы движения для полей. Аналог тензора энергии-импульса, связанный с трансляционной инвариантностью, определяется соотношением

$$T_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^3 [\bar{\Psi}_s^{(i)}(x) \gamma_\alpha (P_\beta^{(i)} \Psi^{(i)}(x))_s + (P_\beta^{(i)*} \bar{\Psi}^{(i)}(x))_s \gamma_\alpha \Psi_s^{(i)}(x)]. \quad (48)$$

Он обеспечивает существование сохраняющегося вектора

$$\mathcal{P}_\beta^{(i)} = \sum_{l=1}^3 \sum_{\zeta=\pm 1} \int q_\beta d\mathbf{q} [\mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^{*+}(\mathbf{q}) \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^-(\mathbf{q}) - \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^{*-}(\mathbf{q}) \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^+(\mathbf{q})]. \quad (49)$$

Вектор тока, связанный с глобальной калибровочной симметрией лагранжиана, определяется соотношением

$$J_\alpha^{(i)} = \sum_{s=1}^3 \bar{\Psi}_s^{(i)}(x) \gamma_\alpha \Psi_s^{(i)}(x). \quad (50)$$

Он обеспечивает сохранение полного заряда поля

$$\mathcal{Q}^{(i)} = \sum_{l=1}^3 \sum_{\zeta=\pm 1} \int d\mathbf{q} [\mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^{*+}(\mathbf{q}) \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^-(\mathbf{q}) + \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^{*-}(\mathbf{q}) \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^+(\mathbf{q})]. \quad (51)$$

Тензор, связанный с $SU(3)$ -симметрией поля, определяется соотношением

$$S_{k\alpha}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^3 [\bar{\Psi}_s^{(i)}(x) \gamma_\alpha (X_k^{(i)} \Psi^{(i)}(x))_s + (X_k^{(i)*} \bar{\Psi}^{(i)}(x))_s \gamma_\alpha \Psi_s^{(i)}(x)], \quad k = 1, \dots, 8. \quad (52)$$

Он обеспечивает существование восьми интегралов движения $\mathcal{X}_l^{(i)}$. Используя эти интегралы движения и полный заряд (51), можно сконструировать девять сохраняющихся линейных комбинаций

$$\mathcal{X}_{lk}^{(i)} = \sum_{\zeta=\pm 1} \int d\mathbf{q} [\mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^{*+}(\mathbf{q}) \mathbf{a}_{k,\zeta,(i)}^-(\mathbf{q}) + \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^{*-}(\mathbf{q}) \mathbf{a}_{k,\zeta,(i)}^+(\mathbf{q})], \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (53)$$

причем три из них диагональны по индексам l, k .

Мы не рассматриваем здесь тензор момента импульса, поскольку для дальнейшего его анализ не критичен. Так как генераторы группы Лоренца (30) имеют обычный вид, то и тензор момента совпадает с приведенным в [15].

Интегралы движения для полей связаны с генераторами алгебры Ли группы симметрии теории следующим образом:

$$Z\Psi^{(i)}(x) = [\Psi^{(i)}(x), \mathcal{Z}]. \quad (54)$$

Здесь $Z = \{P_\beta^{(i)}, Q^{(i)}, X_l^{(i)}, \dots\}$ и $\mathcal{Z} = \{\mathcal{P}_\beta^{(i)}, \mathcal{Q}^{(i)}, \mathcal{X}_l^{(i)}, \dots\}$. Эти соотношения позволяют трактовать $\mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^+(\mathbf{q})$ и $\mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^-(\mathbf{q})$ как операторы рождения и уничтожения фермиона типа (i) в состоянии l с кинетическим импульсом $\mathbf{q}$ и поляризацией ζ , а соответственно $\mathbf{a}_{k,\zeta,(i)}^+(\mathbf{q})$ и $\mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^*(\mathbf{q})$ – как операторы рождения и уничтожения антифермиона типа (i) в состоянии l с кинетическим импульсом $\mathbf{q}$ и поляризацией ζ . Уравнение (54) и условие инвариантности относительно замены частицы на античастицу для $\mathcal{P}_\beta^{(i)}$ приводят к каноническим перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^-(\mathbf{q}), \mathbf{a}_{k,\zeta',(i)}^+(\mathbf{q}')]_+ &= \delta_{lk} \delta_{\zeta\zeta'} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \\ [\mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^*(\mathbf{q}), \mathbf{a}_{k,\zeta',(i)}^+(\mathbf{q}')]_+ &= \delta_{lk} \delta_{\zeta\zeta'} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \end{aligned} \quad (55)$$

Рассмотрим теперь линейные комбинации этих операторов

$$\mathbf{a}_{\alpha,\zeta,(i)}^\pm(\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^3 U_{\alpha l} \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^\pm(\mathbf{q}), \quad \mathbf{a}_{\alpha,\zeta,(i)}^{*\pm}(\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^3 U_{\alpha l}^* \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^{*\pm}(\mathbf{q}), \quad (56)$$

где $U_{\alpha l}$ – компоненты произвольной унитарной матрицы $\mathbb{U}$. Перестановочные соотношения для $\mathbf{a}_{\alpha,\zeta,(i)}^\pm(\mathbf{q})$, $\mathbf{a}_{\alpha,\zeta,(i)}^{*\pm}(\mathbf{q})$ являются каноническими, т. е. имеют вид (55).

При записи через эти операторы только $\mathcal{P}_\beta^{(i)}$ и $\mathcal{Q}^{(i)}$ сохраняют диагональную форму. Однако из $\mathcal{Q}^{(i)}$ и оставшихся интегралов движения всегда можно составить три линейные комбинации вида

$$\mathcal{X}'_{\alpha\alpha} = \int d\mathbf{q} [\mathbf{a}_{\alpha,\zeta,(i)}^+(\mathbf{q}) \mathbf{a}_{\alpha,\zeta,(i)}^-(\mathbf{q}) + \mathbf{a}_{\alpha,\zeta,(i)}^*(\mathbf{q}) \mathbf{a}_{\alpha,\zeta,(i)}^+(\mathbf{q})], \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (57)$$

Таким образом, операторы $\mathbf{a}_{\alpha,\zeta,(i)}^\pm(\mathbf{q})$, $\mathbf{a}_{\alpha,\zeta,(i)}^{*\pm}(\mathbf{q})$ задают хорошо определенные состояния в пространстве Фока, причем разность числа частиц и античастиц в состоянии α с заданным $\mathbf{q}$ является интегралом движения.

Рассмотрим теперь базис (35). Компоненты полевой функции запишем в виде

$$\begin{aligned} \Psi_s^{(i)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=1}^3 \sum_{\zeta=\pm 1} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2p_l^0}} n_s^{(l)} \times \\ &\quad \times [e^{-i(p x)} u_{p,\zeta}^{(m_l^{(i)})} \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^-(\mathbf{p}) + e^{i(p x)} u_{-p,\zeta}^{(m_l^{(i)})} \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^+(\mathbf{p})], \\ \bar{\Psi}_s^{(i)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=1}^3 \sum_{\zeta=\pm 1} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2p_l^0}} n_s^{*(l)} \times \\ &\quad \times [e^{-i(p x)} \bar{u}_{-p,\zeta}^{(m_l^{(i)})} \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^*(\mathbf{p}) + e^{i(p x)} \bar{u}_{p,\zeta}^{(m_l^{(i)})} \mathbf{a}_{l,\zeta,(i)}^+(\mathbf{p})]. \end{aligned} \quad (58)$$

Операторы $a_{l,\zeta,(i)}^{\pm}(\mathbf{p})$, $a_{l,\zeta,(i)}^{*\pm}(\mathbf{p})$ возникают в результате масштабного преобразования

$$a_{l,\zeta,(i)}^{\pm}(\mathbf{p}) = (\mu_l^{(i)})^{-3/2} a_{l,\zeta,(i)}^{\pm}(\mathbf{q}), \quad a_{l,\zeta,(i)}^{*\pm}(\mathbf{p}) = (\mu_l^{(i)})^{-3/2} a_{l,\zeta,(i)}^{*\pm}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{p}}{\mu_l^{(i)}}. \quad (59)$$

Используя (54) и условие инвариантности относительно перестановки частиц и античастиц для $\mathcal{P}_{\beta}^{(i)}$, можно убедиться, что эти операторы, так же как их линейные комбинации

$$a_{\alpha,\zeta,(i)}^{\pm}(\mathbf{p}) = \sum_{l=1}^3 U_{\alpha l} a_{l,\zeta,(i)}^{\pm}(\mathbf{p}), \quad a_{\alpha,\zeta,(i)}^{*\pm}(\mathbf{p}) = \sum_{l=1}^3 U_{\alpha l}^* a_{l,\zeta,(i)}^{*\pm}(\mathbf{p}), \quad (60)$$

удовлетворяют перестановочным соотношениям вида (55).

Обратим внимание на то, что перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения фермионов задаются антикоммутаторами, которые обращаются в нуль для объектов с различными квантовыми числами. Если же рассматривать все члены мультиплета фермионов как фундаментальные частицы, то, как хорошо известно (см. [29]), операторы рождения и уничтожения для них можно считать либо коммутирующими, либо антикоммутирующими. То есть предлагаемая модель ликвидирует данную неопределенность.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что состояния, задаваемые операторами $a_{l,\zeta,(i)}^{\pm}(\mathbf{p})$, $a_{l,\zeta,(i)}^{*\pm}(\mathbf{p})$ и $a_{\alpha,\zeta,(i)}^{\pm}(\mathbf{p})$, $a_{\alpha,\zeta,(i)}^{*\pm}(\mathbf{p})$, также хорошо определены в пространстве Фока. Однако есть одно важное отличие. Интеграл движения $\mathcal{P}_{\beta}^{(i)}$, если его записать через операторы $a_{\alpha,\zeta,(i)}^{\pm}(\mathbf{p})$, $a_{\alpha,\zeta,(i)}^{*\pm}(\mathbf{p})$, перестает быть диагональным. Эта ситуация является вполне ожидаемой. Интеграл движения $\mathcal{P}_{\beta}^{(i)}$ не является каноническим импульсом поля, а представляет собой величину, которую можно назвать его кинетическим импульсом. А поскольку состояния, представляющие собой суперпозиции массовых состояний, нестационарны, то недиагональность $\mathcal{P}_{\beta}^{(i)}$ отражает тот факт, что возможна перекачка энергии от одного флейворного состояния к другому.

Часть действия, связанная с лагранжианом взаимодействия (46), уже не инвариантна относительно $SU(3)$. Еще раз подчеркнем, что если предположить, что матрицы $\mathbb{V}$, связанные с верхними и нижними мультиплетам лептонного и кваркового секторов соответственно, одинаковы, то мы приходим, по крайней мере в рамках теории возмущений, к модели с тремя независимыми поколениями фермионов.

Действительно, используя лагранжиан (46), можно вычислять вероятности переходов в представлении взаимодействия с помощью обычной диаграммной техники как между массовыми состояниями, так и с участием состояний, которые являются суперпозицией массовых состояний. Однако при равенстве матриц $\mathbb{V}$, связанных с верхними и нижними мультиплетам, необходимость рассмотрения суперпозиций массовых состояний отпадает. Как хорошо видно из структуры лагранжиана взаимодействия, в этом случае вероятности переходов между такими состояниями сводятся к сумме вероятностей переходов между массовыми состояниями. Более того, полные вероятности переходов с участием массовых состояний численно равны вне зависимости от выбора набора операторов, которые эти состояния характеризуют. Это вполне очевидно, так как любое массовое состояние задается волновой функцией, которая является собственной для оператора, определяемого массовой матрицей.

Если же матрицы $\mathbb{V}$ различны, то в членах, описывающих заряженные токи, автоматически возникает явление смешивания поколений. Коэффициенты смешивания задаются для кварков аналогом матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава

$$\mathbb{U}^{\text{CKM}} = \mathbb{V}^{(u)\dagger} \mathbb{V}^{(d)}, \quad (61)$$

а для лептонов – аналогом матрицы Понтекорво–Маки–Накагава–Саката

$$\mathbb{U}^{\text{PMNS}} = \mathbb{V}^{(e)\dagger} \mathbb{V}^{(\nu)}. \quad (62)$$

При наличии смешивания вероятности переходов для суперпозиций массовых состояний не сводятся к сумме вероятностей переходов между массовыми состояниями. Необходимо подчеркнуть, что полные вероятности переходов для таких состояний могут быть разными при одном и том же выборе унитарной матрицы $\mathbb{U}$, но при различных полных наборах операторов, задающих массовое состояние. Это связано с тем, что операторы (42) для таких состояний будут различаться. Как хорошо известно, именно этот вариант подтверждается экспериментом. Для кварков наблюдается смешивание поколений, а перекачивание энергии из одного флейвонного состояния в другое проявляется как явление осцилляций нейтрино.

Как уже отмечалось, флейворные состояния определены неоднозначно, их свойства связаны с типом массовых состояний, суперпозицией которых они являются. И ответ на вопрос, в каком состоянии образуются нейтрино, мы можем получить, только вычислив соответствующие вероятности процессов. Как показано в работе [30] на примере распада пиона, флейворное состояние, представляющее собой суперпозицию массовых состояний с одинаковыми каноническими импульсами, очень близко к состоянию, которое формируется в процессах распадов. Поэтому феноменологическая теория осцилляций нейтрино, основанная на идеях Понтекорво (см., например, [31]), является очень хорошим (при выполнении условия $m_\nu^2/\mathcal{E}_\nu^2 \ll 1$) квазиклассическим приближением квантово-полевой теории.

Очевидно, что в рассмотренной модели вероятности рождения заряженных фермионов в осциллирующих состояниях, вообще говоря, могут быть отличны от нуля. Однако ясно, что экспериментальная регистрация такого рода состояний, по крайней мере при достигнутых энергиях, не представляется возможной. Для заряженных фермионов из-за большой разности масс длины осцилляций при реальных энергиях значительно меньше линейных размеров возможных источников частиц. Поэтому возникает декогеренция, вследствие которой могут наблюдаться только массовые состояния.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена модификация модели электрослабых взаимодействий, в которой фермионы с одинаковыми электрослабыми квантовыми числами объединены в мультиплеты и рассматриваются как различные состояния одной частицы. То есть при описании электрослабых взаимодействий используются только четыре фундаментальных фермиона. В этой модели не только смешивание, но и осцилляции частиц возникают как прямые следствия общих принципов квантовой теории поля.

В рамках развитого подхода можно рассчитывать в приближении теории возмущений вероятности процессов произвольного порядка, в частности вклады, обусловленные радиационными поправками, используя обычную диаграммную технику. Для данной теории остаются справедливыми все основные выводы, следующие из Стандартной модели электрослабых взаимодействий, при этом удается включить в общую схему явление осцилляций.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность А. Б. Арбузову, А. В. Болсинову, А. В. Борисову, И. П. Волобуеву, Д. В. Гальцову, А. Д. Долгову, В. Ч. Жуковскому, А. В. Картавцеву, Е. М. Мурчиковой, А. А. Полосину и А. Е. Шабалу за плодотворные дискуссии.

Список литературы

- [1] F. Englert, R. Brout, “Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons”, *Phys. Rev. Lett.*, **13**:9 (1964), 321–323; P. W. Higgs, “Broken symmetries and the masses of gauge bosons”, *Phys. Rev. Lett.*, **13**:16 (1964), 508–509; G. S. Guralnik, C. R. Hagen, T. W. B. Kibble, “Global conservation laws and massless particles”, *Phys. Rev. Lett.*, **13**:20 (1964), 585–587.
- [2] S. L. Glashow, “Partial-symmetries of weak interactions”, *Nucl. Phys.*, **22**:4 (1961), 579–588; S. Weinberg, “A model of lepton”, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:21 (1967), 1264–1266; A. Salam, “Weak and electromagnetic interactions”, *Elementary Particle Theory: Relativistic Groups and Analyticity*, Proceedings of the 8th Nobel Symposium (Lerum, Sweden, May 19–25, 1968), ed. N. Svartholm, Wiley, New York; Almquist and Wiksell, Stockholm, 1968, 367–377.
- [3] N. Cabibbo, “Unitary symmetry and leptonic decays”, *Phys. Rev. Lett.*, **10**:12 (1963), 531–533.
- [4] M. Kobayashi, T. Maskawa, “ CP -violation in the renormalizable theory of weak interaction”, *Prog. Theor. Phys.*, **49**:2 (1973), 652–657.
- [5] K. A. Olive, K. Agashe, C. Amsler et al. (Particle Data Group), “The review of particle physics”, *Chin. Phys. C*, **38**:9 (2014), 090001, 1676 pp.
- [6] Б. Понтекорво, “Мезоний и антимезоний”, *ЖЭТФ*, **33**:2 (1957), 549–551.
- [7] Z. Maki, M. Nakagawa, S. Sakata, “Remark on the unified model of elementary particles”, *Prog. Theor. Phys.*, **28**:5 (1962), 870–880.
- [8] S. M. Bilenky, *Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos*, Lecture Notes in Physics, **817**, Springer, Berlin–Heidelberg, 2010.
- [9] B. Kayser, “On the quantum mechanics of neutrino oscillation”, *Phys. Rev. D*, **24**:1 (1981), 110–116.
- [10] C. Giunti, C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007.
- [11] W. Grimus, P. Stockinger, “Real oscillations of virtual neutrinos”, *Phys. Rev. D*, **54**:5 (1996), 3414–3419, arXiv: hep-ph/9603430; K. Kiers, N. Weiss, “Neutrino oscillations in a model with a source and detector”, *Phys. Rev. D*, **57**:5 (1998), 3091–3105, arXiv: hep-ph/9710289; W. Grimus, P. Stockinger, S. Mohanty, “Field-theoretical approach to coherence in neutrino oscillations”, *Phys. Rev. D*, **59**:1 (1999), 013011, 10 pp., arXiv: hep-ph/9807442.
- [12] V. A. Naumov, D. S. Shkirmanov, “Covariant asymmetric wave packet for a field-theoretical description of neutrino oscillations”, *Modern Phys. Lett. A*, **30**:24 (2015), 1550110, 17 pp., arXiv: 1409.4669.
- [13] M. Beuthe, “Oscillations of neutrinos and mesons in quantum field theory”, *Phys. Rep.*, **375**:2–3 (2003), 105–218, arXiv: hep-ph/0109119.

- [14] Е. Х. Ахмедов, А. Ю. Смирнов, “Paradoxes of neutrino oscillations”, *ЯФ*, **72**:8 (2009), 1417–1435, arXiv:0905.1903.
- [15] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1973.
- [16] C. Giunti, C. W. Kim, U. W. Lee, “Remarks on the weak states of neutrinos”, *Phys. Rev. D*, **45**:7 (1992), 2414–2420; C. Giunti, “Fock states of flavor neutrinos are unphysical”, *Eur. Phys. J. C*, **39**:3 (2005), 377–382, arXiv: hep-ph/0312256.
- [17] M. Blasone, G. Vitiello, “Quantum field theory of fermion mixing”, *Ann. Phys.*, **244**:2 (1995), 283–311; Erratum, **249**:1 (1996), 363–364, arXiv: hep-ph/9501263; M. Blasone, P. A. Henning, G. Vitiello, “The exact formula for neutrino oscillations”, *Phys. Lett. B*, **451**:1–2 (1999), 140–145, arXiv: hep-th/9803157; M. Blasone, G. Vitiello, “Remarks on the neutrino oscillation formula”, *Phys. Rev. D*, **60**:11 (1999), 111302, 5 pp., arXiv: hep-ph/9907382.
- [18] K. Fujii, C. Habe, T. Yabuki, “Note on the field theory of neutrino mixing”, *Phys. Rev. D*, **59**:11 (1999), 113003, 15 pp., arXiv: hep-ph/9807266; Erratum, **60**:9 (1999), 099903; K. Fujii, C. Habe, T. Yabuki, “Remarks on flavor-neutrino propagators and oscillation formulas”, *Phys. Rev. D*, **64**:1 (2001), 013011, 13 pp., arXiv: hep-ph/0102001.
- [19] C. М. Хо, “On neutrino flavor states”, *JHEP*, **12** (2012), 022, 10 pp., arXiv:1209.3453.
- [20] E. P. Wigner, “On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group”, *Ann. of Math.* (2), **40**:1 (1939), 149–204.
- [21] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [22] L. Michel, “Relations between internal symmetry and relativistic invariance”, *Phys. Rev.*, **137**:2B (1965), B405–B408; S. Coleman, “Trouble with relativistic SU(6)”, *Phys. Rev.*, **138**:5B (1965), B1262–B1267; S. Weinberg, “Comments on relativistic supermultiplet theories”, *Phys. Rev.*, **139**:3B (1965), B597–B601.
- [23] R. Jost, “Eine Bemerkung zu einem ‘Letter’ von L. O’Raifeartaigh und einer Entgegnung von M. Flato und D. Sternheimer”, *Helv. Phys. Acta*, **39**:4 (1966), 369–375; L. O’Raifeartaigh, “Mass differences and Lie algebras of finite order”, *Phys. Rev. Lett.*, **14**:14 (1965), 575–577; “Mass-splitting theorem for non-unitary group representations”, *Phys. Rev.*, **161**:5 (1967), 1571–1575.
- [24] А. Барут, Р. Рончка, *Теория представлений групп и ее приложения*, Мир, М., 1980.
- [25] A. Chakrabarti, “Exact solution of the Dirac–Pauli equation for a class of fields: Precession of polarization”, *Nuovo Cimento A*, **56**:3 (1968), 604–624.
- [26] А. Е. Лобанов, “Динамическое представление операторов для дираковской частицы в плосковолновом поле”, *ТМФ*, **182**:1 (2015), 112–123.
- [27] E. V. Arbuzova, A. E. Lobanov, E. M. Murchikova, “Pure quantum states of a neutrino with rotating spin in dense magnetized matter”, *Phys. Rev. D*, **81**:4 (2010), 045001, 16 pp., arXiv:0903.3358.
- [28] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. IV: *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1989.
- [29] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [30] A. E. Lobanov, *Particle quantum states with indefinite mass and neutrino oscillations*, arXiv:1507.01256.
- [31] S. M. Bilenky, B. Pontecorvo, “Lepton mixing and neutrino oscillations”, *Phys. Rep.*, **41**:4 (1978), 225–261.

Поступила в редакцию 16.05.2016,
после доработки 4.07.2016