Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Хун-Ся У, Цзин-Синь Лю, Чунь-Ся Ли, Квазидетерминантные решения расширенной некоммутативной иерархии Кадомцева–Петвиашвили, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 1, 51–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:26:24

© 2017 г. Хун-Ся У^{*†}, Цзин-Синь Лю^{*}, Чунь-Ся Ли[‡]

КВАЗИДЕТЕРМИНАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ РАСШИРЕННОЙ НЕКОМУТАТИВНОЙ ИЕРАРХИИ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ

Построено преобразование Дарбу для расширенной некоммутативной иерархии Кадомцева–Петвиашвили, не являющееся автопреобразованием, и, как следствие, получено выраженное через квазивронскиан решение, а также построено выраженное через квазивронскиан решение для некоммутативной иерархии Кадомцева–Петвиашвили с самосогласованными источниками. Для доказательства того, что найденные квазидетерминантные решения действительно являются решениями уравнения некоммутативной иерархии Кадомцева–Петвиашвили с самосогласованными источниками, использован метод прямой проверки.

Ключевые слова: расширенная некоммутативная иерархия Кадомцева–Петвиашвили, преобразование Дарбу, выраженное через квазивронскиан решение, прямая проверка.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9236>

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, некоммутативная калибровочная теория имеет важные приложения в теории D -бран. Ранее было показано, что некоммутативное расширение соответствует наличию фонового магнитного поля, а некоммутативные решения в некоторых ситуациях есть не что иное, как сами D -браны малой размерности [1]–[18].

Работа выполнена при финансовой поддержке National Natural Science Foundation of China (гранты № 11201178 и № 11271266), Fujian National Science Foundation (грант № 2012J01013), Beijing National Science Foundation (проект № 1162003), Fujian Higher College Special Project of Scientific Research (грант № JK2012025) и Fujian Provincial Visiting Scholar Program.

^{*}Department of Mathematics, Jimei University, Xiamen, China.
E-mail: wuhongxia796@163.com, 1197422498@qq.com

[†]School of Mathematical and Statistical Sciences, The University of Texas Rio Grande Valley, Edinburg, Texas, USA

[‡]School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing, China.
E-mail: trisha_li2001@163.com

В связи с этим обобщение классических интегрируемых систем на их некоммутативные аналоги привлекает большое внимание многих исследователей [1]. Ранее были выявлены некоторые свойства некоммутативных систем, подобные свойствам интегрируемости, такие как наличие многосолитонных решений [2]–[4], гамильтоновых структур [5], преобразований Беклунда [6], бесконечного набора законов сохранения [7], рекуррентных операторов [8], редукций [9] и т. д. Вообще говоря, верным является тот факт, что решения интегрируемых некоммутативных систем можно выразить через квазидетерминанты [10]. В работе [10] авторы использовали детерминанты, чтобы проинтегрировать неабелево уравнение поля Тоды для корневых систем типов A , B , C . В работе [11] представлен подробный анализ максимально неабелевых систем Тоды на основе классической полупростой группы Ли.

В 2007 г. Гилсон и Ниммо применили преобразование Дарбу (ПД), а также бинарное ПД к исследованию некоммутативного уравнения Кадомцева–Петвиашвили (нкКП) и некоммутативного модифицированного уравнения Кадомцева–Петвиашвили (нкмКП) [12], [13]. Были получены два вида квазидетерминантных решений: выраженные через квазивронскиан и через квазиопределитель Грама. Эти квазидетерминантные решения были непосредственно проверены с помощью формулы для производной квазидетерминантов. Также были найдены матричные решения уравнений нкКП и нкмКП [14]. Отметим, что авторы не конкретизировали природу некоммутативности, они предполагали лишь некоммутативность потенциальных функций и их производных. По этой причине полученные в работах [12], [13] результаты остаются справедливыми и для некоммутативных интегрируемых систем, возникающих из звездочного произведения, матриц и кватернионов. Позднее подобный подход был использован при исследовании некоторых других интегрируемых некоммутативных систем, таких как некоммутативное уравнение Деви–Стюартсона [15], суперсимметричное уравнение КдФ [16], некоммутативная решетка Тоды [17], некоммутативное неизоспектральное уравнение КП [18] и др.

В 2010 г. было получено обобщение иерархии нкКП посредством введения квадрата собственной функции в некоммутирующее пространство-время [19]. Было показано, что коммутативность потоков нкКП и расширенной иерархии нкКП порождает иерархию нкКП с самосогласованными источниками, которая включает в себя важное уравнение нкКПСИ. Однако решения уравнения нкКПСИ все еще остаются неисследованными. В настоящей работе мы сосредотачиваемся на проблеме решения расширенной иерархии нкКП. Мы уверены в том, что наши результаты заполняют указанный выше пробел и являются важным дополнением к некоммутативной теории Сато.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 кратко рассматривается построение расширенной иерархии уравнений КП и нкКПСИ. В разделе 3 мы напомним определение и некоторые важные свойства квазидетерминантов. В разделе 4 с помощью псевдодифференциальных операторов построены ПД, не являющиеся автопреобразованиями, для расширенной иерархии нкКП и показано, что полученное решение выражается через квазидетерминанты. В разделе 5 представлено выраженное через квазивронскиан решение для нкКПСИ, которое проверено непосредственно с помощью формулы для производной квазидетерминанта. Раздел 6 посвящается кратким выводам.

2. РАСШИРЕННАЯ ИЕРАРХИЯ УРАВНЕНИЯ НККП И УРАВНЕНИЕ НККП С САМОСОГЛАСОВАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

В данном разделе мы кратко рассматриваем метод построения расширенной иерархии уравнения нкКП и уравнения нкКПСИ в духе теории Гельфанда–Дикого.

Псевдодифференциальный оператор задается формулой

$$L = \partial + u_1 \partial^{-1} + u_2 \partial^{-2} + \dots, \quad (2.1a)$$

где знак ∂ означает $\partial/\partial x$, а u_i ($i = 1, 2, \dots$) – функции от $t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$, причем $t_1 = x$. Для вывода расширенной иерархии уравнения нкКП и уравнения нкКПСИ мы предполагаем, что функции u_i ($i = 1, 2, \dots$) и их производные не коммутируют.

По аналогии с хорошо известной иерархией уравнения КП представим иерархию уравнения нкКП формально в виде

$$L_{t_n} = [B_n, L], \quad (2.1b)$$

где $B_n = (L^n)_{\geq 0}$ – проекции степеней оператора на дифференциальную часть. Иерархию уравнения нкКП можно расширить следующим образом [19]:

$$L_{t_n} = [B_n, L], \quad (2.2a)$$

$$L_{\tau_s} = \left[B_s + \sum_{i=1}^N q_i \partial^{-1} r_i, L \right], \quad (2.2b)$$

где u_i , q_i и r_i зависят от двух наборов действительных переменных $t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ и $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots)$, а функции q_i , r_i удовлетворяют уравнениям

$$q_{i,t_n} = B_n(q_i), \quad (2.2b)$$

$$r_{i,t_n} = -B_n^*(r_i), \quad (2.2g)$$

в которых B_n^* представляет собой оператор, сопряженный к B_n . Для двух заданных функций a и b от переменных t и τ сопряженное отображение a^* определяется формулой

$$a^*(b) = ba. \quad (2.3a)$$

Из (2.3a) следует, что

$$a^* \partial^m(b) = b^{(m)} a \quad \text{при всех } m \in \mathbb{Z}, \quad (2.3b)$$

где $b^{(m)}$ означает производную функции b по x порядка m .

С учетом условий (2.2b) и (2.2g) коммутативность уравнений (2.2a) и (2.2b) приводит к соотношению [19]

$$B_{n,\tau_s} - B_{s,t_n} + [B_n, B_s] + \left[B_n, \sum_{i=1}^N q_i \partial^{-1} r_i \right]_{\geq 0} = 0. \quad (2.4)$$

Фактически система (2.4) вместе с уравнениями (2.2b) и (2.2g) есть не что иное, как иерархия уравнения нкКП с самосогласованными источниками (иерархия уравнения

нкКПСИ). Соответствующее системе (2.4) представление Лакса имеет вид

$$\phi_{t_n} = B_n(\phi), \quad (2.5a)$$

$$\phi_{\tau_s} = \left(B_s + \sum_{i=1}^N q_i \partial^{-1} r_i \right) (\phi). \quad (2.5b)$$

Рассмотрим конкретный случай $n = 2$ и $s = 3$. Исключая u_2 и полагая $t_2 = y$, $u_1 = v_x/2$, $\tau_3 = -4t$, получаем из иерархии уравнения нкКПСИ N -е уравнение нкКПСИ

$$(v_t + v_{xxx} + 3v_x v_x)_x + 3v_{yy} - 3[v_x, v_y] - 8 \left(\sum_{i=1}^N q_i r_i \right)_x = 0, \quad (2.6a)$$

$$q_{i,y} = q_{i,xx} + v_x q_i, \quad r_{i,y} = -r_{i,xx} - v_x r_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.6b)$$

для которого пара Лакса записывается как

$$\phi_y = (\partial^2 + v_x)(\phi), \quad \phi_t = - \left[4\partial^3 + 6v_x \partial + 3v_{xx} + 3v_y + 4 \sum_{i=1}^N q_i \partial^{-1} r_i \right] (\phi). \quad (2.7)$$

3. КВАЗИДЕТЕРМИНАНТ

В этом разделе мы кратко напомним определение и некоторые основные свойства квазидетерминантов [20].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Предположим, что A является $(n \times n)$ -матрицей над некоммутативным кольцом R , каждому элементу $a_{i,j}$ матрицы A соответствует квазидетерминант $|A|_{i,j}$, заданный формулой

$$|A|_{i,j} = a_{i,j} - r_i^j (A^{i,j})^{-1} c_j^i, \quad A^{-1} = (|A|_{j,i})_{i,j=1,\dots,n}^{-1}. \quad (3.1)$$

Здесь r_i^j представляет собой i -ю строку матрицы A с удаленным j -м элементом, c_j^i есть j -й столбец с удаленным i -м элементом, а $A^{i,j}$ – подматрица, полученная удалением i -й строки и j -го столбца из матрицы A .

Можно также обозначать квазидетерминанты, помещая в рамку элемент, по которому производится разложение, как показано ниже:

$$|A|_{i,j} = \left| \begin{array}{cc} A^{i,j} & c_j^i \\ r_i^j & \boxed{a_{ij}} \end{array} \right|. \quad (3.2)$$

В данной работе мы используем только квазидетерминанты, полученные разложением по последнему элементу последнего столбца:

$$\left| \begin{array}{c} A \\ C \end{array} \begin{array}{c} B \\ \boxed{d} \end{array} \right| = d - CA^{-1}B, \quad (3.3)$$

где $d \in R$, A – квадратная матрица над кольцом R произвольной размерности, B , C – соответственно векторы в виде столбца и строки согласованной длины.

Свойство инвариантности по отношению к построчным операциям. Можно показать, что квазидетерминанты, как и детерминанты квадратной матрицы, обладают свойством инвариантности, которое задается соотношением [12], [20]

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} E & 0 \\ F & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix} \right|_{n \times n} &= \left| \begin{matrix} EA & EB \\ FA + gc & \boxed{FB + gd} \end{matrix} \right|_{n \times n} \\ &= g(d - CA^{-1}B) = g \left| \begin{matrix} A & B \\ C & \boxed{d} \end{matrix} \right|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из свойства инвариантности (3.4) легко сделать следующий вывод:

$$\left| \begin{matrix} A & B \\ A^k & \boxed{B^k} \end{matrix} \right| = 0, \quad (3.5)$$

где A^k, B^k означают соответственно k -ю строку квадратной матрицы A и вектора B .

Формулы для производных [12]. Пусть штрих означает производную по переменной, тогда производную квазидетерминанта можно представить в виде

$$\left| \begin{matrix} A & B \\ C & \boxed{d} \end{matrix} \right|' = d' - C'A^{-1}B + CA^{-1}A'A^{-1}B - CA^{-1}B'.$$

Ее также можно представить в виде

$$\left| \begin{matrix} A & B \\ C & \boxed{d} \end{matrix} \right|' = \left| \begin{matrix} A & B \\ C' & \boxed{d'} \end{matrix} \right| + \sum_{k=1}^n \left| \begin{matrix} A & e_k \\ C & \boxed{0} \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} A & B \\ (A^k)' & \boxed{(B^k)'} \end{matrix} \right| \quad (3.6a)$$

или

$$\left| \begin{matrix} A & B \\ C & \boxed{d} \end{matrix} \right|' = \left| \begin{matrix} A & B' \\ C & \boxed{d'} \end{matrix} \right| + \sum_{k=1}^n \left| \begin{matrix} A & (A_k)' \\ C & \boxed{(C_k)'} \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} A & B \\ e_k^T & \boxed{0} \end{matrix} \right|, \quad (3.6b)$$

где A^k, B^k введены в формуле (3.5), e_k – вектор-столбец порядка N , в котором k -я строка равна единице, а остальные строки равны нулю, и A_k, C_k означают соответственно k -й столбец квадратной матрицы A и вектора C .

4. ПД, НЕ ЯВЛЯЮЩЕЕСЯ АВТОПРЕОБРАЗОВАНИЕМ, ДЛЯ РАСШИРЕННОЙ ИЕРАРХИИ НККП И РЕШЕНИЯ, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ КВАЗИВРОНСКИАН

В этом разделе с помощью псевдодифференциального оператора построено ПД, не являющееся автопреобразованием, для расширенной иерархии НККП. Кроме того, показано, что полученные решения можно выразить через квазидетерминанты.

ТЕОРЕМА 1. Рассмотрим решение L, q_i, r_i ($i = 1, \dots, N$) системы (2.2). Пусть f и g – две независимые собственные функции системы (2.5), $b(\tau_s)$ – функция от τ_s такая, что $b'(\tau_s) = \beta(\tau_s)\eta(\tau_s)$, где $\beta(\tau_s), \eta(\tau_s)$ – функции от τ_s , коммутирующие соответственно с θ, g и со связанными с ними производными. Введем обозначение

ния $\theta = f + b(\tau_s)g$, $G_1 = \theta \partial \theta^{-1}$ и $\Omega(r_i, \theta) = \partial^{-1}(r_i \theta)$. Тогда ПД (не являющееся автопреобразованием), заданное формулами

$$\bar{L} = G_1 L G_1^{-1}, \quad (4.1a)$$

$$\bar{q}_i = G_1(q_i) = \begin{vmatrix} \theta & q_i \\ \theta^{(1)} & \boxed{q_i^{(1)}} \end{vmatrix}, \quad (4.1б)$$

$$\bar{r}_i = (G_1^{-1})^*(r_i) = \begin{vmatrix} \theta & 1 \\ \Omega(r_i, \theta) & \boxed{0} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.1в)$$

$$\bar{q}_{N+1} = \beta(\tau_s) G_1(g) = \beta(\tau_s) \begin{vmatrix} \theta & g \\ \theta^{(1)} & \boxed{g^{(1)}} \end{vmatrix}, \quad (4.1г)$$

$$\bar{r}_{N+1} = -\eta(\tau_s) \theta^{-1} = \eta(\tau_s) \begin{vmatrix} \theta & 1 \\ 1 & \boxed{0} \end{vmatrix}, \quad (4.1д)$$

порождает решение $\bar{L}$, $\bar{q}_i$, $\bar{r}_i$ ($i = 1, \dots, N, N+1$) системы (2.2) с заменой N на $N+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подробное доказательство приводится в приложении А.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим подробнее соотношение (4.1в). С помощью формул (2.3) получаем равенства

$$\bar{r}_i = (\theta \partial^{-1} \theta^{-1})^*(r_i) = -(\theta^{-1})^* \partial^{-1} \theta^*(r_i) = -(\theta^{-1})^*(\Omega(r_i, \theta)) = -\Omega(r_i, \theta) \theta^{-1}.$$

Таким способом можно явно выразить $\bar{q}_i$ и $\bar{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N, N+1$) через квазидетерминанты.

После m итераций ПД (не являющегося автопреобразованием), приведенного в теореме 1, мы приходим к следующему выводу, справедливому для расширенной иерархии нкКП.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что L , q_i , r_i ($i = 1, \dots, N$) – решение системы (2.2), f_j , g_j ($j = 1, \dots, m$) – $2m$ независимых собственных функций системы (2.5) и $\theta_j = f_j + b_j(\tau_s)g_j$, где $b_j(\tau_s)$ – такая функция от τ_s , что $b_j(\tau_s) = \beta_j(\tau_s)\eta_j(\tau_s)$. Тогда m итераций ПД (не являющегося автопреобразованием) для расширенной иерархии уравнения нкКП имеют вид

$$L[m] = T_m L T_m^{-1}, \quad (4.2a)$$

$$q_i[m] = T_m(q_i) = \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_m & q_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(m-1)} & \dots & \theta_m^{(m-1)} & q_i^{(m-1)} \\ \theta_1^{(m)} & \dots & \theta_m^{(m)} & \boxed{q_i^{(m)}} \end{vmatrix}, \quad (4.2б)$$

$$r_i[m] = (T_m^{-1})^*(r_i) = \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_m & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(m-1)} & \dots & \theta_m^{(m-1)} & 0 \\ \theta_1^{(m)} & \dots & \theta_m^{(m)} & 1 \\ \Omega(r_i, \theta_1) & \dots & \Omega(r_i, \theta_m) & \boxed{0} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.2в)$$

$$q_{N+j}[m] = \beta_j(\tau_s) T_m(g_j) = \beta_j(\tau_s) \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_m & g_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(m-1)} & \dots & \theta_m^{(m-1)} & g_j^{(m-1)} \\ \theta_1^{(m)} & \dots & \theta_m^{(m)} & \boxed{g_j^{(m)}} \end{vmatrix}, \quad (4.2\Gamma)$$

$$r_{N+j}[m] = \eta_j(\tau_s) \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_{j-1} & \theta_j & \dots & \theta_m & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(m-2)} & \dots & \theta_{j-1}^{(m-2)} & \theta_j^{(m-2)} & \dots & \theta_m^{(m-2)} & 0 \\ \theta_1^{(m-1)} & \dots & \theta_{j-1}^{(m-1)} & \theta_j^{(m-1)} & \dots & \theta_m^{(m-1)} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \boxed{0} \end{vmatrix}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.2\Delta)$$

где

$$T_m = G_m G_{m-1} \dots G_1,$$

$$G_k = \theta_k[k-1] \partial \theta_k^{-1}[k-1] = \partial - \alpha_k[k-1],$$

$$\alpha_k[k-1] = (\theta_k[k-1])_x (\theta_k[k-1])^{-1},$$

$$\theta_k[k-1] = T_{k-1}(\theta_k) = \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_{k-1} & \theta_k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-2)} & \dots & \theta_{k-1}^{(k-2)} & \theta_k^{(k-2)} \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_{k-1}^{(k-1)} & \boxed{\theta_k^{(k-1)}} \end{vmatrix},$$

индекс (k) используется для обозначения производной порядка k по x , а $\beta_j(\tau_s)$ и $\eta_j(\tau_s)$ суть функции от τ_s , коммутирующие с θ_j и соответствующими им производными. Очевидно, что уравнения (4.2а)–(4.2д) дают нам решения $L[m]$, $q_i[m]$, $r_i[m]$ ($i = 1, \dots, N+m$) системы (2.2) с заменой N на $N+m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ниже мы доказываем методом математической индукции, что $q_i[m]$, $r_i[m]$ и $q_{N+j}[m]$ выражаются через детерминанты. Инвариантность решений относительно ПД доказана в приложении Б.

В работе [12] было показано, что $q_i[m]$ и $q_{N+j}[m]$ можно выразить через квазидетерминанты типа квазивронскианов, поэтому нам нужно доказать лишь возможность выражения $r_i[m]$ через квазидетерминанты. Из теоремы 1 следует, что (4.2в) верно для $m = 1$. Предположим, что (4.2в) справедливо при $m = k$, т. е. имеет место равенство

$$r_i[k] \triangleq (T_k^{-1})^*(r_i) = \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_k & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-2)} & \dots & \theta_k^{(k-2)} & 0 \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_k^{(k-1)} & 1 \\ \Omega(r_i, \theta_1) & \dots & \Omega(r_i, \theta_k) & \boxed{0} \end{vmatrix}. \quad (4.3a)$$

Далее, покажем по индукции, что

$$r_i[k+1] \triangleq (T_{k+1}^{-1})^*(r_i) = \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_{k+1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_{k+1}^{(k-1)} & 0 \\ \theta_1^{(k)} & \dots & \theta_{k+1}^{(k)} & 1 \\ \Omega(r_i, \theta_1) & \dots & \Omega(r_i, \theta_{k+1}) & \boxed{0} \end{vmatrix}. \quad (4.36)$$

Для удобства обозначим квазидетерминанты в выражениях (4.3а) и (4.36) соответственно как A и B . При указанных предположениях

$$r_i[k+1] = (T_{k+1}^{-1})^*(r_i) = (G_{k+1}^{-1})^*[(T_k^{-1})^*(r_i)] = (G_{k+1}^{-1})^*(r_i[k]) = (G_{k+1}^{-1})^*(A).$$

Следовательно, чтобы доказать (4.36), нужно доказать только соотношение

$$G_{k+1}^*(B) = A. \quad (4.4)$$

Учитывая равенство

$$\theta_{k+1}[k] = \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_k & \theta_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_k^{(k-1)} & \theta_{k+1}^{(k-1)} \\ \theta_1^{(k)} & \dots & \theta_k^{(k)} & \boxed{\theta_{k+1}^{(k)}} \end{vmatrix}$$

и свойства квазидетерминантов, получаем, что

$$B\theta_{k+1}[k] = - \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_k & \theta_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_k^{(k-1)} & \theta_{k+1}^{(k-1)} \\ \Omega(r_i, \theta_1) & \dots & \Omega(r_i, \theta_k) & \boxed{\Omega(r_i, \theta_{k+1})} \end{vmatrix}.$$

В силу (3.6) справедливо выражение

$$\begin{aligned} (B\theta_{k+1}[k])_x = & - \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_k & \theta_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_k^{(k-1)} & \theta_{k+1}^{(k-1)} \\ [\Omega(r_i, \theta_1)]_x & \dots & [\Omega(r_i, \theta_k)]_x & \boxed{[\Omega(r_i, \theta_{k+1})]_x} \end{vmatrix} - \\ & - \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_k & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(i-1)} & \dots & \theta_k^{(i-1)} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_k^{(k-1)} & 0 \\ \Omega(r_i, \theta_1) & \dots & \Omega(r_i, \theta_k) & \boxed{0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_k & \theta_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_k^{(k-1)} & \theta_{k+1}^{(k-1)} \\ \theta_1^{(i)} & \dots & \theta_k^{(i)} & \boxed{\theta_{k+1}^{(i)}} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Запишем следующее тождество, основанное на свойстве инвариантности (3.5):

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_k & \theta_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_k^{(k-1)} & \theta_{k+1}^{(k-1)} \\ \theta_1^{(i)} & \dots & \theta_k^{(i)} & \boxed{\theta_{k+1}^{(i)}} \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, k-1,$$

в силу которого первый член в правой стороне уравнения (4.5) принимает вид

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_k & \theta_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_k^{(k-1)} & \theta_{k+1}^{(k-1)} \\ [\Omega(r_i, \theta_1)]_x & \dots & [\Omega(r_i, \theta_k)]_x & \boxed{[\Omega(r_i, \theta_{k+1})]_x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_k & \theta_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_k^{(k-1)} & \theta_{k+1}^{(k-1)} \\ r_i \theta_1 & \dots & r_i \theta_k & \boxed{r_i \theta_{k+1}} \end{vmatrix} \\ = r_i \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_k & \theta_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_k^{(k-1)} & \theta_{k+1}^{(k-1)} \\ \theta_1 & \dots & \theta_k & \boxed{\theta_{k+1}} \end{vmatrix} = 0,$$

а второй член в правой стороне уравнения (4.5) записывается как

$$- \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_k & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(i-1)} & \dots & \theta_k^{(i-1)} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_k^{(k-1)} & 0 \\ \Omega(r_i, \theta_1) & \dots & \Omega(r_i, \theta_k) & \boxed{0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_k & \theta_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k-1)} & \dots & \theta_k^{(k-1)} & \theta_{k+1}^{(k-1)} \\ \theta_1^{(k)} & \dots & \theta_k^{(k)} & \boxed{\theta_{k+1}^{(k)}} \end{vmatrix} = -A\theta_{k+1}[k].$$

Поэтому верна формула

$$(B\theta_{k+1}[k])_x = -A\theta_{k+1}[k],$$

откуда следует выражение

$$\begin{aligned} G_{k+1}^*(B) &= -(\theta_{k+1}^{-1}[k])^* \partial(\theta_{k+1}[k])^*(B) = -(\theta_{k+1}^{-1}[k])^* \partial(B\theta_{k+1}[k]) = \\ &= -(B\theta_{k+1}[k])_x \theta_{k+1}^{-1}[k] = A\theta_{k+1}[k] \theta_{k+1}^{-1}[k] = A. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (4.4) доказано.

5. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НККПСИ, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ КВАЗИВРОНСКИАН, И ИХ ПРЯМАЯ ПРОВЕРКА

В этом разделе мы получаем выраженное через квазивронскиан решение для N -го уравнения нкКПСИ (2.6) и проверяем его прямой подстановкой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что $\theta_i = f_i + b_i(\tau_3)g_i$, $b'_i(\tau_3) = \beta_i(\tau_3)\eta_i(\tau_3)$, а f_i и g_i удовлетворяют уравнению (2.7) при $v = 0$, $N = 0$. Тогда выраженное через вронскиан решение для N -го уравнения нкКПСИ (2.6) имеет вид*

$$v = -2 \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_N & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(N-1)} & \dots & \theta_N^{(N-1)} & 1 \\ \theta_1^{(N)} & \dots & \theta_N^{(N)} & \boxed{0} \end{vmatrix}, \quad (5.1a)$$

$$q_i = \beta_i(\tau_3) \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_n & g_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(N-1)} & \dots & \theta_N^{(N-1)} & g_i^{(N-1)} \\ \theta_1^{(N)} & \dots & \theta_N^{(N)} & \boxed{g_i^{(N)}} \end{vmatrix}, \quad (5.16)$$

$$r_i = \eta_i(\tau_3) \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_{i-1} & \theta_i & \dots & \theta_N & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(N-2)} & \dots & \theta_{i-1}^{(N-2)} & \theta_i^{(N-2)} & \dots & \theta_N^{(N-2)} & 0 \\ \theta_1^{(N-1)} & \dots & \theta_{i-1}^{(N-1)} & \theta_i^{(N-1)} & \dots & \theta_N^{(N-1)} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \boxed{0} \end{vmatrix}. \quad (5.1b)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Обозначим для простоты $\Theta^{(n)} = (\theta_1^{(n)}, \dots, \theta_N^{(n)})$ и выберем $\hat{\Theta}$ в виде вронскиана размера $N \times N$ от функций $\theta_1, \dots, \theta_N$, e_i – вектор-столбец порядка N с единицей на i -й строке и нулями на всех остальных. Кроме того, введем обозначение

$$Q(i, j) = \begin{vmatrix} \hat{\Theta} & e_{N-j} \\ \Theta^{(N+i)} & \boxed{0} \end{vmatrix}, \quad \hat{g}_i = (g_i, \dots, g_i^{(N-1)})^T.$$

В этих обозначениях имеем

$$v = -2Q(0, 0), \quad (5.2a)$$

$$q_i = \beta_i(\tau_3) \begin{vmatrix} \hat{\Theta} & \hat{g}_i \\ \Theta^{(N)} & \boxed{g_i^{(N)}} \end{vmatrix} \triangleq \beta_i(\tau_3) R_i(N), \quad (5.2b)$$

$$r_i = \eta_i(\tau_3) \begin{vmatrix} \hat{\Theta} & e_N \\ e_i^T & \boxed{0} \end{vmatrix} \triangleq \eta_i(\tau_3) W(N-1, N). \quad (5.2b)$$

Далее мы показываем посредством прямой подстановки, что функции v , q_i , r_i ($i = 1, \dots, N$), заданные формулой (5.1) или (5.2), являются решениями N -го уравнения нкКПСИ (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Во-первых, проверим, что функции v , q_i и r_i ($i = 1, \dots, N$) вида (5.1) удовлетворяют уравнению (2.6a). Замечая, что f_i и g_i удовлетворяют соответственно уравнениям $f_{i,\tau_3} = f_i^{(3)}$, $g_{i,\tau_3} = g_i^{(3)}$ и справедливы равенства $\theta_i^{(N)} = f_i^{(N)} + b_i(\tau_3)g_i^{(N)}$, получаем выражения

$$\theta_{i,\tau_3}^{(N)} = (f_i^{(N)} + b_i(\tau_3)g_i^{(N)})_{\tau_3} = f_i^{(N+3)} + b_i(\tau_3)g_i^{(N+3)} + b'_i(\tau_3)g_i^{(N)} = \theta_i^{(N+3)} + b'_i(\tau_3)g_i^{(N)}.$$

Пусть $H_i = (b'_1(\tau_3)g_1^{(i)}, \dots, b'_N(\tau_3)g_N^{(i)})$ и $\hat{H} = (H_1, H_2, \dots, H_{N-1})^T$, тогда записываем соотношения

$$\begin{aligned} \Theta_{\tau_3}^{(N)} &= (\theta_{1,\tau_3}^{(N)}, \dots, \theta_{N,\tau_3}^{(N)}) = (\theta_1^{(N+3)} + b'_1(\tau_3)g_1^{(N)}, \dots, \theta_N^{(N+3)} + b'_N(\tau_3)g_N^{(N)}) = \\ &= \Theta^{(N+3)} + (b'_1(\tau_3)g_1^{(N)}, \dots, b'_N(\tau_3)g_N^{(N)}) = \Theta^{(N+3)} + H_N. \end{aligned}$$

Согласно уравнениям (3.6)

$$\begin{aligned} v_t &= 8Q(0,0)_{\tau_3} = 8 \left(\left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ \Theta_{\tau_3}^{(N)} & 0 \end{array} \right| + \sum_{i=1}^N \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_i \\ \Theta^{(N)} & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ \Theta_{\tau_3}^{(i-1)} & 0 \end{array} \right| \right) = \\ &= 8 \left(\left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ \Theta^{(N+3)} + H_N & 0 \end{array} \right| + \sum_{i=1}^N \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_i \\ \Theta^{(N)} & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ \Theta^{(i+2)} + H_{i-1} & 0 \end{array} \right| \right) = \\ &= 8 \left(\left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ \Theta^{(N+3)} & 0 \end{array} \right| + \sum_{i=1}^N \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_i \\ \Theta^{(N)} & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ \Theta^{(i+2)} & 0 \end{array} \right| \right) = \\ &+ 8 \left(\left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ H_N & 0 \end{array} \right| + \sum_{i=1}^N \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_i \\ \Theta^{(N)} & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ H_{i-1} & 0 \end{array} \right| \right) = \\ &= 8[Q(3,0) - Q(0,3) + Q(0,0)Q(2,0) + Q(0,1)Q(1,0) + Q(0,2)Q(0,0)] + \\ &+ 8 \left(\left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ H_N & 0 \end{array} \right| + \sum_{i=1}^N \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_i \\ \Theta^{(N)} & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ H_{i-1} & 0 \end{array} \right| \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Отметим, что в работе [12] показано, что функция $v = -2Q(0,0)$ удовлетворяет уравнению нКП, если $b_i(\tau_3)$ в θ_i считаются постоянными b_i . Подставляя (5.2) и (5.3) в уравнение (2.6a), получаем выражение

$$\begin{aligned} (v_t + v_{xxx} + 3v_x v_x)_x + 3v_{yy} - 3[v_x, v_y] - 8 \left(\sum_{i=1}^N q_i r_i \right)_x &= \\ &= 8 \left(\left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ H_N & 0 \end{array} \right| + \sum_{i=1}^N \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_i \\ \Theta^{(N)} & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ H_{i-1} & 0 \end{array} \right| - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^N \beta_i(\tau_3) \eta_i(\tau_3) \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & \hat{g}_i \\ \Theta^{(N)} & g_i^{(N)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ e_i^T & 0 \end{array} \right| \right)_x = \\ &= 8 \left(\left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ H_N & 0 \end{array} \right| + \sum_{i=1}^N \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_i \\ \Theta^{(N)} & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ H_{i-1} & 0 \end{array} \right| - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^N b'_i(\tau_3) \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & \hat{g}_i \\ \Theta^{(N)} & g_i^{(N)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \hat{\Theta} & e_N \\ e_i^T & 0 \end{array} \right| \right)_x. \end{aligned} \quad (5.4)$$

По определению квазидетерминантов

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N b'_i(\tau_3) \left| \begin{array}{c} \hat{\Theta} \\ \Theta^{(N)} \end{array} \begin{array}{c} \hat{g}_i \\ g_i^{(N)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \hat{\Theta} \\ e_i^T \end{array} \begin{array}{c} e_N \\ 0 \end{array} \right| &= - \sum_{i=1}^N (b'_i(\tau_3) g_i^{(N)} - \Theta^{(N)} \hat{\Theta}^{-1} b'_i(\tau_3) \hat{g}_i) e_i^T \hat{\Theta}^{-1} e_N = \\ &= - \sum_{i=1}^N b'_i(\tau_3) g_i^{(N)} e_i^T \hat{\Theta}^{-1} e_N + \Theta^{(N)} \hat{\Theta}^{-1} \left(\sum_{i=1}^N b'_i(\tau_3) \hat{g}_i e_i^T \right) \hat{\Theta}^{-1} e_N. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Замечая, что

$$\sum_{i=1}^N b'_i(\tau_3) g_i^{(N)} e_i^T = \sum_{i=1}^N (0, \dots, b'_i(\tau_3) g_i^{(N)}, \dots, 0) = H_N$$

и $\sum_{i=1}^N b'_i(\tau_3) \hat{g}_i e_i^T = \hat{H} = \sum_{i=1}^N e_i H_{i-1}$, из уравнения (5.5) немедленно получаем соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N b'_i(\tau_3) \left| \begin{array}{c} \hat{\Theta} \\ \Theta^{(N)} \end{array} \begin{array}{c} \hat{g}_i \\ g_i^{(N)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \hat{\Theta} \\ e_i^T \end{array} \begin{array}{c} e_N \\ 0 \end{array} \right| &= -H_N \hat{\Theta}^{-1} e_N + \Theta^{(N)} \hat{\Theta}^{-1} \hat{H} \hat{\Theta}^{-1} e_N = \\ &= -H_N \hat{\Theta}^{-1} e_N + \sum_{i=1}^N \Theta^{(N)} \hat{\Theta}^{-1} e_i H_{i-1} \hat{\Theta}^{-1} e_N = \\ &= \left| \begin{array}{c} \hat{\Theta} \\ H_N \end{array} \begin{array}{c} e_N \\ 0 \end{array} \right| + \sum_{i=1}^N \left| \begin{array}{c} \hat{\Theta} \\ \Theta^{(N)} \end{array} \begin{array}{c} e_i \\ 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \hat{\Theta} \\ H_{i-1} \end{array} \begin{array}{c} e_N \\ 0 \end{array} \right|. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подстановка (5.6) в уравнение (5.4) приводит к уравнению

$$(v_t + v_{xxx} + 3v_x v_x)_x + 3v_{yy} - 3[v_x, v_y] - 8 \left(\sum_{i=1}^N q_i r_i \right)_x = 0.$$

2. Во-вторых, покажем, что функции v , q_i , r_i ($i = 1, \dots, N$) вида (5.2) удовлетворяют первому из уравнений (2.66), т. е. уравнению $q_{i,y} = q_{i,xx} + v_x q_i$.

В силу формулы (3.6) для производной квазидетерминантов записываем равенства

$$\begin{aligned} q_{i,x} &= \beta_i(\tau_3) (R_i(N))_x = \beta_i(\tau_3) \left[R(N+1) + \sum_{i=1}^k Q(0, N-k) R(k) \right] = \\ &= \beta_i(\tau_3) [R(N+1) + Q(0,0) R(N)], \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} q_{i,y} &= \beta_i(\tau_3) (R_i(N))_y = \beta_i(\tau_3) \left[R(N+2) + \sum_{i=1}^k Q(0, N-k) R(k+1) \right] = \\ &= \beta_i(\tau_3) [R(N+2) + Q(0,1) R(N) + Q(0,0) R(N+1)], \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} q_{i,xx} &= \beta_i(\tau_3) (R_i(N))_{xx} = \beta_i(\tau_3) [R(N+1) + Q(0,0) R(N)]_x = \\ &= \beta_i(\tau_3) [R(N+1)]_x + \beta_i(\tau_3) [Q(0,0)]_x R(N) + \beta_i(\tau_3) Q(0,0) [R(N)]_x. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} [R(N+1)]_x &= R(N+2) + Q(1,0)R(N), \\ [Q(0,0)]_x &= Q(1,0) - Q(0,1) + Q(0,0)Q(0,2), \\ [R_i(N)]_x &= R(N+1) + Q(0,0)R(N), \end{aligned} \quad (5.10)$$

из (5.9) получаем равенство

$$\begin{aligned} q_{i,xx} &= \beta_i(\tau_3)[R(N+2) + Q(1,0)R(N) + (Q(1,0) - Q(0,1) + \\ &+ Q(0,0)Q(0,0))R(N) + Q(0,0)(R(N+1) + Q(0,0))R(N)]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Из рассмотренных выше выражений следует уравнение

$$q_{i,y} - q_{i,xx} - v_x q_i = 0.$$

3. Наконец, нужно проверить, что функции v , q_i , r_i ($i = 1, \dots, N$) вида (5.2) удовлетворяют второму из уравнений (2.66), т.е. уравнению $r_{i,y} = -r_{i,xx} - v_x r_i$.

После подробных вычислений приходим к формулам

$$r_{i,x} = \eta_i(\tau_3)[W(N-1, N)]_x = \eta_i(\tau_3)[-W(N-1, N-1) + W(N-1, N)Q(0,0)], \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} r_{i,y} &= \eta_i(\tau_3)[W(N-1, N)]_y = \\ &= \eta_i(\tau_3)[-W(N-1, N-2) + W(N-1, N-1)Q(0,0) + W(N-1, N)Q(1,0)], \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} r_{i,xx} &= \eta_i(\tau_3)[-W(N-1, N-1) + W(N-1, N)Q(0,0)]_x = \\ &= \eta_i(\tau_3)\{[-W(N-1, N-1)]_x + [W(N-1, N)]_x Q(0,0) + W(N-1, N)[Q(0,0)]_x\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

и

$$[W(N-1, N-1)]_x = -W(N-1, N-2) + W(N-1, N)Q(0,1). \quad (5.15)$$

Уравнение (5.14) с помощью подстановки (5.15) сводится к уравнению

$$\begin{aligned} r_{i,xx} &= \eta_i(\tau_3)\{W(N-1, N-2) - W(N-1, N)Q(0,1) - \\ &- [W(N-1, N-1) - W(N-1, N)Q(0,0)]Q(0,0) + \\ &+ W(N-1, N)[Q(1,0) - Q(0,1) + Q(0,0)Q(0,0)]\}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Из выражений (5.12), (5.13) и (5.16) получаем уравнение $r_{i,y} + r_{i,xx} + v_x r_i = 0$, что и требовалось.

6. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе с помощью псевдодифференциального оператора построено преобразование Дарбу для расширенной иерархии уравнений нкКП, не являющееся автопреобразованием. Также проведено подробное доказательство того факта, что решение, полученное посредством итераций преобразований Дарбу, не являющихся автопреобразованиями, можно выразить через квазидетерминанты. В качестве частного случая получено выраженное через квазивронскиан решение для уравнения нкКПСИ. Для проверки таких решений уравнения нкКПСИ использован метод прямой подстановки. В нашей последующей статье будет рассмотрено влияние членов с источниками на некоммутативные интегрируемые системы, а также влияние некоммутативности на интегрируемые системы с самосогласованными источниками.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Доказательство теоремы 1

В статье [21] показано, что

$$\bar{B}_n = G_1 B_n G_1^{-1} - \theta[\theta^{-1} B_n(\theta)]_x \partial^{-1} \theta^{-1} = G_1 B_n G_1^{-1} + G_{1,t_n} G_1^{-1} \quad (\text{A.1a})$$

и

$$\bar{B}_s = G_1 B_s G_1^{-1} - \theta[\theta^{-1} B_s(\theta)]_x \partial^{-1} \theta^{-1}. \quad (\text{A.1б})$$

ШАГ 1. Во-первых, покажем, что уравнению (2.2а) удовлетворяют функции $\bar{B}_n$ и $\bar{L}_n$, т. е. $\bar{L}_{t_n} = [\bar{B}_n, \bar{L}]$. Непосредственные вычисления приводят к формуле

$$\bar{L}_{t_n} - [\bar{B}_n, \bar{L}] = G_1 (L_{t_n} - [B_n, L]) G_1^{-1} - \theta[\theta^{-1} (\theta_{t_n} - B_n(\theta))]_x \partial^{-1} \theta^{-1}.$$

Замечая, что L и θ удовлетворяют уравнениям (2.2а) и (2.5а), получаем, что

$$\bar{L}_{t_n} - [\bar{B}_n, \bar{L}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{L}_{t_n} = [\bar{B}_n, \bar{L}].$$

ШАГ 2. Во-вторых, покажем, что уравнению (2.2в) удовлетворяют функции $\bar{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N, N+1$) и $\bar{B}_n$. При всех $i = 1, 2, \dots, N$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{B}_n(\bar{q}_i) &= (G_1 B_n G_1^{-1} + G_{1,t_n} G_1^{-1})(G_1(q_i)) = G_1(B_n(q_i)) + G_{1,t_n}(q_i) = \\ &= G_1(q_{i,t_n}) + G_{1,t_n}(q_i) = [G_1(q_i)]_{t_n} = \bar{q}_{i,t_n}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Поскольку $\beta(\tau_s)$ коммутирует с θ и ее производными, аналогично доказательству формул (A.2) можно показать, что функция q_{N+1} удовлетворяет условию $\bar{B}_n(\bar{q}_{N+1}) = (\bar{q}_{N+1})_{t_n}$.

ШАГ 3. В-третьих, покажем, что уравнению (2.2г) удовлетворяют функции $\bar{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N, N+1$) и $\bar{B}_n$. При всех $i = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} -\bar{B}_n^*(\bar{r}_i) &= -(G_1 B_n G_1^{-1} + G_{1,t_n} G_1^{-1})^* (G_1^{-1})^* (r_i) = \\ &= -(G_1^{-1})^* B_n^*(r_i) - (G_1^{-1})^* G_{1,t_n}^* (G_1^{-1})^* (r_i) = \\ &= (G_1^{-1})^* (r_{i,t_n}) + (G_{1,t_n}^{-1})^* (r_i) = [(G_1^{-1})^* (r_i)]_{t_n} = \bar{r}_{i,t_n}. \end{aligned}$$

Так как $\eta(\tau_s)$ коммутирует с θ , g и их производными, при $i = N+1$ имеем

$$\begin{aligned} -\bar{B}_n^*(\bar{r}_{N+1}) &= (G_1 B_n G_1^{-1} + G_{1,t_n} G_1^{-1})^* (\eta_1(\tau_s) \theta^{-1}) = \\ &= \eta_1(\tau_s) [(G_1 B_n G_1^{-1})^* (\theta^{-1}) + (G_{1,t_n} G_1^{-1})^* (\theta^{-1})]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Посредством прямых вычислений из уравнений (2.3) получаем равенства

$$(G_1 B_n G_1^{-1})^* (\theta^{-1}) = -(\theta^{-1})^* \partial^{-1}(0) = -\Omega(0, \theta^{-1}), \quad (\text{A.4a})$$

$$(G_{1,t_n} G_1^{-1})^* (\theta^{-1}) = \theta^{-1} \theta_{t_n} \theta^{-1} + (\theta^{-1})^* \partial^{-1}(0) = \theta^{-1} \theta_{t_n} \theta^{-1} + \Omega(0, \theta^{-1}). \quad (\text{A.4б})$$

Подстановка выражений (A.4) в (A.3) приводит к формуле

$$-\bar{B}_n^*(\bar{r}_{N+1}) = \eta_1(\tau_s) \theta^{-1} \theta_{t_n} \theta^{-1} = [-\eta_1(\tau_s) \theta^{-1}]_{t_n} = (\bar{r}_{N+1})_{t_n}.$$

ШАГ 4. Наконец, покажем, что $\bar{L}$, $\bar{q}_i$, $\bar{r}_i$ ($i = 1, \dots, N, N+1$) удовлетворяют уравнению (2.26) с заменой N на $N+1$. Прямые вычисления дают выражение

$$\begin{aligned} \bar{L}_{\tau_s} - \left[\bar{B}_s + \sum_{i=1}^{N+1} \bar{q}_i \partial^{-1} \bar{r}_i, \bar{L} \right] &= \bar{L}_{\tau_s} - \left[\bar{B}_s + \sum_{i=1}^N \bar{q}_i \partial^{-1} \bar{r}_i, \bar{L} \right] - [\bar{q}_{N+1} \partial^{-1} \bar{r}_{N+1}, \bar{L}] = \\ &= G_1(L_{\tau_s} - [B_s, L])G_1^{-1} + [\theta_x \theta^{-1}(\theta_{\tau_s} - B_s(\theta)) \partial^{-1} \theta^{-1} - (\theta_{\tau_s} - B_s(\theta))_x \partial^{-1} \theta^{-1}, \bar{L}] - \\ &\quad - \sum_{i=1}^N [\bar{q}_i \partial^{-1} \bar{r}_i, \bar{L}] - [\bar{q}_{N+1} \partial^{-1} \bar{r}_{N+1}, \bar{L}], \end{aligned}$$

и при всех $i = 1, 2, \dots, N$ получаем, что

$$G_1 q_i \partial^{-1} r_i G_1^{-1} = -\theta_x \theta^{-1} q_i \Omega(r_i, \theta) \partial^{-1} \theta^{-1} + (q_i \Omega(r_i, \theta))_x \partial^{-1} \theta^{-1} + \bar{q}_i \partial^{-1} \bar{r}_i.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \bar{L}_{\tau_s} - \left[\bar{B}_s + \sum_{i=1}^{N+1} \bar{q}_i \partial^{-1} \bar{r}_i, \bar{L} \right] &= G_1 \left(L_{\tau_s} - \left[B_s + \sum_{i=1}^N q_i \partial^{-1} r_i, L \right] \right) G_1^{-1} + \\ &+ \left[\theta_x \theta^{-1}(\theta_{\tau_s} - B_s(\theta)) - \sum_{i=1}^N q_i \partial^{-1} r_i(\theta) \partial^{-1} \theta^{-1}, \bar{L} \right] - \\ &- \left[(\theta_{\tau_s} - B_s(\theta)) - \sum_{i=1}^N q_i \partial^{-1} r_i(\theta)_x \partial^{-1} \theta^{-1}, \bar{L} \right] - [\bar{q}_{N+1} \partial^{-1} \bar{r}_{N+1}, \bar{L}]. \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

Поскольку f , g удовлетворяют уравнению (2.56) и соответственно $\theta = f + b(\tau_s)g$, справедливы равенства

$$f_{\tau_s} - B_s(f) - \sum_{i=1}^N q_i \partial^{-1} r_i(f) = 0, \quad g_{\tau_s} - B_s(g) - \sum_{i=1}^N q_i \partial^{-1} r_i(g) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \theta_{\tau_s} - B_s(\theta) - \sum_{i=1}^N q_i \partial^{-1} r_i(\theta) &= b'(\tau_s)g + \left(f_{\tau_s} - B_s(f) - \sum_{i=1}^N q_i \partial^{-1} r_i(f) \right) + \\ &+ \left(g_{\tau_s} - B_s(g) - \sum_{i=1}^N q_i \partial^{-1} r_i(g) \right) = b'(\tau_s)g. \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

Подставляя (A.6) в (A.5) и замечая, что L , q_i , r_i ($i = 1, \dots, N$) удовлетворяют уравнению (2.26), записываем формулу

$$\begin{aligned} \bar{L}_{\tau_s} - \left[\bar{B}_s + \sum_{i=1}^{N+1} \bar{q}_i \partial^{-1} \bar{r}_i, \bar{L} \right] &= \\ &= [\theta_x \theta^{-1} b'(\tau_s)g \partial^{-1} \theta^{-1} - (b'(\tau_s)g)_x \partial^{-1} \theta^{-1} - \bar{q}_{N+1} \partial^{-1} \bar{r}_{N+1}, \bar{L}] = \\ &= [(b'(\tau_s)(\theta_x \theta^{-1} g - g_x) + \beta(\tau_s)\eta(\tau_s)G_1(g)) \partial^{-1} \theta^{-1}, \bar{L}] = \\ &= [(\beta(\tau_s)\eta(\tau_s) - b'(\tau_s))G_1(g) \partial^{-1} \theta^{-1}, \bar{L}]. \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

Поскольку $b'_1(\tau_s) = \beta_1(\tau_s)\eta_1(\tau_s)$, непосредственно из (A.7) находим, что

$$\bar{L}_{\tau_s} - \left[\bar{B}_s + \sum_{i=1}^{N+1} \bar{q}_i \partial^{-1} \bar{r}_i, \bar{L} \right] = 0.$$

Теорема 1 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Доказательство теоремы 2

Теперь докажем часть теоремы 2, т.е. инвариантность решений относительно ПД, методом математической индукции. Очевидно, из теоремы 1 следует, что $L[m]$, $q_i[m]$, $r_i[m]$ ($i = 1, \dots, N + m$) удовлетворяли уравнениям (2.2) с заменой N на $N + m$ в случае $m = 1$. Потребуем, чтобы при $m = k$ функции $L[k]$, $q_i[k]$, $r_i[k]$ ($i = 1, \dots, N, \dots, N + k$) удовлетворяют уравнениям (2.2) с заменой N на $N + k$. Докажем справедливость этого утверждения также и в случае $m = k + 1$.

Прямое вычисление приводит к следующим рекуррентным соотношениям:

$$L[k + 1] = T_{k+1} L T_{k+1}^{-1} = G_{k+1} L[k] G_{k+1}^{-1}, \quad (\text{Б.1a})$$

$$B_n[k + 1] = (G_{k+1} B_n[k] G_{k+1}^{-1})_{\geq 0} = G_{k+1} B_n[k] G_{k+1}^{-1} + (G_{k+1})_{t_n} G_{k+1}^{-1}, \quad (\text{Б.1б})$$

$$B_k[k + 1] = G_{k+1} B_k[k] G_{k+1}^{-1} - \theta_{k+1}[k] [(\theta_{k+1}[k])^{-1} B_k[k] (\theta_{k+1}[k])_x \partial^{-1} \theta_{k+1}^{-1}[k]], \quad (\text{Б.1в})$$

$$q_i[k + 1] = G_{k+1}(q_i[k]), \quad i = 1, \dots, N + k + 1, \quad (\text{Б.1г})$$

$$r_i[k + 1] = (G_{k+1}^{-1})^*(r_i[k]), \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{Б.1д})$$

Кроме того, при $i = N + 1, \dots, N + k + 1$ можно аналогично показать, что $r_{N+j}[k + 1] = (G_{k+1}^{-1})^*(r_{N+j}[k])$. Используя тот же метод, что и в теореме 1, докажем, что

$$L[k + 1], \quad q_i[k + 1], \quad r_i[k + 1] \quad (i = 1, \dots, N, \dots, N + k, N + k + 1)$$

удовлетворяют уравнениям (2.2a), (2.2в), (2.2г).

Далее покажем, что $L[k + 1]$, $q_i[k + 1]$, $r_i[k + 1]$ ($i = 1, \dots, N, \dots, N + k, N + k + 1$) удовлетворят уравнению (2.2б) с заменой N на $N + k + 1$, т.е.

$$(L[k + 1])_{\tau_k} = \left[B_s[k + 1] + \sum_{i=1}^{N+k+1} q_i[k + 1] \partial^{-1} r_i[k + 1], L[k + 1] \right].$$

Громоздкие прямые вычисления приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} & (L[k + 1])_{\tau_k} - \left[B_s[k + 1] + \sum_{i=1}^{N+k+1} q_i[k + 1] \partial^{-1} r_i[k + 1], L[k + 1] \right] = \\ & = G_{k+1} \left((L[k])_{\tau_s} - \left[B_s[k] + \sum_{i=1}^{N+k} q_i[k] \partial^{-1} r_i[k], L[k] \right] \right) G_{k+1}^{-1} + \\ & + \left[(\theta_{k+1}[k])_x \theta_{k+1}^{-1}[k] \left((\theta_{k+1}[k])_{\tau_s} - B_s[k] (\theta_{k+1}[k]) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{N+k} q_i[k] \partial^{-1} r_i[k] (\theta_{k+1}[k]) \Big) \partial^{-1} \theta_{k+1}^{-1}[k], L[k+1] \Big] - \\
& - \left[\left((\theta_{k+1}[k])_{\tau_s} - B_s[k] (\theta_{k+1}[k]) - \right. \right. \\
& - \left. \sum_{i=1}^{N+k} q_i[k] \partial^{-1} r_i[k] (\theta_{k+1}[k]) \right)_x \partial^{-1} \theta_{k+1}^{-1}[k], L[k+1] \Big] - \\
& - [q_{N+k+1}[k+1] \partial^{-1} r_{N+k+1}[k+1], L[k+1]]
\end{aligned} \tag{Б.2a}$$

и

$$\begin{aligned}
& (\theta_{k+1}[k])_{\tau_s} - B_s[k] (\theta_{k+1}[k]) - \sum_{i=1}^{N+k} q_i[k] \partial^{-1} r_i[k] (\theta_{k+1}[k]) = \\
& = (T_k(f_{k+1}))_{\tau_s} - B_s[k] (T_k(f_{k+1})) - \sum_{i=1}^{N+k} q_i[k] \partial^{-1} r_i[k] (T_k(f_{k+1})) + \\
& + b_{k+1}(\tau_s) \left[(T_k(g_{k+1}))_{\tau_s} - B_s[k] (T_k(g_{k+1})) - \sum_{i=1}^{N+k} q_i[k] \partial^{-1} r_i[k] (T_k(g_{k+1})) \right] + \\
& + b'_{k+1}(\tau_s) T_k(g_{k+1}).
\end{aligned} \tag{Б.2б}$$

Можно легко показать, что если функции f_{k+1} , g_{k+1} являются решениями уравнений (2.5) при замене B_s , q_i , r_i на $B_s[k]$, $q_i[k]$, $r_i[k]$, то $T_k(f_{k+1})$ и $T_k(g_{k+1})$ также являются решениями уравнений (2.5). Следовательно, из (Б.2) получаем, что

$$(\theta_{k+1}[k])_{\tau_s} - B_s[k] (\theta_{k+1}[k]) - \sum_{i=1}^{N+k} q_i[k] \partial^{-1} r_i[k] (\theta_{k+1}[k]) = b'_{k+1}(\tau_s) (T_k(g_{k+1})). \tag{Б.3}$$

Исходя из предположения, что $L[k]$, $q_i[k]$, $r_i[k]$ ($i = 1, \dots, N, \dots, N+k$) удовлетворяют уравнению (2.2) с заменой N на $N+k$, и подставляя (Б.3) в (Б.2a), записываем формулу

$$\begin{aligned}
& (L[k+1])_{\tau_k} - \left[B_s[k+1] + \sum_{i=1}^{N+k+1} q_i[k+1] \partial^{-1} r_i[k+1], L[k+1] \right] = \\
& = [b'_{k+1}(\tau_s) ((\theta_{k+1}[k])_x \theta_{k+1}^{-1}[k] T_k(g_{k+1}) - (T_k(g_{k+1}))_x) \partial^{-1} \theta_{k+1}^{-1}[k] - \\
& - q_{N+k+1}[k+1] \partial^{-1} r_{N+k+1}[k+1], L[k+1]] = \\
& = [-b'_{k+1}(\tau_s) G_{k+1}(T_k(g_{k+1})) \partial^{-1} \theta_{k+1}^{-1}[k] - \\
& - \beta_{k+1}[\tau_s] T_{k+1}(g_{k+1}) \partial^{-1} r_{N+k+1}[k+1], L[k+1]] = \\
& = [-b'_{k+1}(\tau_s) T_{k+1}(g_{k+1}) \partial^{-1} \theta_{k+1}^{-1}[k] - \beta_{k+1}[\tau_s] T_{k+1}(g_{k+1}) \partial^{-1} r_{N+k+1}[k+1], L[k+1]].
\end{aligned} \tag{Б.4}$$

Далее, покажем справедливость следующего равенства:

$$r_{N+k+1}[k+1] = -\eta_{k+1}(\tau_s) \theta_{k+1}^{-1}[k]. \tag{Б.5}$$

Замечая, что

$$r_{N+k+1}[k+1] = \eta_{k+1}(\tau_s) \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_{k+1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \theta_1^{(k)} & \dots & \theta_{k+1}^{(k)} & 1 \\ 0 & \dots & 1 & \boxed{0} \end{vmatrix},$$

и используя определение квазидетерминанта (3.1), приходим к равенству

$$r_{N+k+1}[k+1] = -\eta_{k+1}(\tau_s) e_{k+1}^T \cdot \Theta^{-1} \cdot e_{k+1},$$

где

$$\Theta^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \boxed{\theta_1} & \dots & \theta_{k+1} \end{vmatrix}^{-1} & \dots & \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_{k+1} \end{vmatrix}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} \theta_1^{(k)} & \dots & \theta_{k+1}^{(k)} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} \boxed{\theta^{(k)}} & \dots & \theta_{k+1}^{(k)} \end{vmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \boxed{\theta_{k+1}} \end{vmatrix}^{-1} & \dots & \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_{k+1} \end{vmatrix}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} \theta_1^{(k)} & \dots & \theta_{k+1}^{(k)} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} \theta_1^{(k)} & \dots & \boxed{\theta_{k+1}^{(k)}} \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Поэтому мы видим, что

$$r_{N+k+1}[k+1] = -\eta_{k+1}(\tau_s) \begin{vmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^{(k)} & \dots & \boxed{\theta_{k+1}^{(k)}} \end{vmatrix}^{-1} = -\eta_{k+1}(\tau_s) \theta_{k+1}^{-1}[k],$$

а это есть не что иное, как равенство (Б.5).

Подставляя (Б.5) в (Б.4), получаем, наконец, что

$$\begin{aligned} L[k+1]_{\tau_s} - \left[B_s[k+1] + \sum_{i=1}^{N+k+1} q_i[k+1] \partial^{-1} r_i[k+1], L[k+1] \right] = \\ = [(\beta_{k+1}[\tau_s] \eta_{k+1}[\tau_s] - b'_{k+1}(\tau_s)) T_{k+1}(g_{k+1}) \partial^{-1} \theta_{k+1}^{-1}[k], L[k+1]] = 0. \end{aligned}$$

Это равенство завершает доказательство сформулированной в теореме 2 инвариантности относительно ПД.

Список литературы

- [1] М. Hamanaka, *Noncommutative solitons and D-branes*, [arXiv: hep-th/0303256](#).
- [2] L. D. Paniak, *Exact noncommutative KP and KdV multi-solitons*, [arXiv: hep-th/0105185](#).
- [3] М. Hamanaka, “Notes on exact multi-soliton solutions of noncommutative integrable systems”, *JHEP*, **02** (2007), 094, 17 pp.
- [4] N. Wang, M. Wadati, “Exact multi-line soliton solutions of noncommutative KP equation”, *J. Phys. Soc. Japan*, **72**:8 (2003), 1881–1888.
- [5] B. Kupershmidt, *KP or mKP. Noncommutative mathematics of Lagrangian, Hamiltonian, and Integrable Systems*, AMS, Providence, RI, 2000.

- [6] Z. Zheng, J. S. He, Y. Cheng, “Bäcklund transformation of the noncommutative Gelfand–Dickey hierarchy”, *JHEP*, **02** (2004), 069, 11 pp.
- [7] M. Hamanaka, “Commuting flows and conservation laws for noncommutative Lax hierarchies”, *J. Math. Phys.*, **46**:5 (2005), 052701, 13 pp.
- [8] J. S. He, J. Y. Tu, X. D. Li, L. H. Wang, “Explicit flow equations and recursive operator of the ncKP hierarchy”, *Nonlinearity*, **24**:10 (2011), 2875–2890.
- [9] M. Hamanaka, “On reductions of noncommutative anti-self-dual Yang–Mills equations”, *Phys. Lett. B*, **625**:3–4 (2003), 324–332.
- [10] P. Etingof, I. Gelfand, V. Retakh, “Factorization of differential operators, quasideterminants, and nonabelian Toda field equations”, *Math. Res. Lett.*, **4**:3 (1997), 413–425.
- [11] A. V. Razumov, M. V. Saveliev, “Maximally non-abelian Toda systems”, *Nucl. Phys. B*, **494**:3 (1997), 657–686.
- [12] C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, “On a direct approach to quasideterminant solutions of a non-commutative KP equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:14 (2007), 3839–3850.
- [13] C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, C. M. Sooman, “On a direct approach to quasideterminant solutions of a noncommutative modified KP equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:8 (2008), 085202, 10 pp.
- [14] К. Р. Гилсон, Д. К. Ниммо, К. М. Суман, “Матричные решения некоммутативного уравнения КП и некоммутативного уравнения мКП”, *ТМФ*, **159**:3 (2009), 448–458.
- [15] C. R. Gilson, S. R. Macfarlane, “Dromion solutions of noncommutative Davey–Stewartson equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:23 (2009), 235202, 20 pp.
- [16] C. X. Li, J. J. C. Nimmo, “Darboux transformations for a twist derivation and quasideterminant solutions to the super KdV equation”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **466**:2120 (2009), 2471–2493.
- [17] C. X. Li, J. J. L. Nimmo, K. M. Tamizhmani, “On solutions to the non-Abelian Hirota–Miwa equation and its continuum limits”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **465**:2105 (2008), 1441–1451.
- [18] X.-M. Zhu, D.-J. Zhang, C.-X. Li, “Quasideterminant solutions of a noncommutative nonisospectral Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Commun. Theor. Phys.*, **55**:5 (2011), 753–759.
- [19] W.-X. Ma, “An extended noncommutative KP hierarchy”, *J. Math. Phys.*, **51**:7 (2010), 073505, 19 pp.
- [20] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh, R. L. Wilson, “Quasideterminants”, *Adv. Math.*, **193**:1 (2005), 56–141.
- [21] W. Oevel, W. Schief, *Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations* (Exeter, UK, July 14–19, 1992), NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, **413**, ed. P. A. Clarkson, Kluwer, Dordrecht, 1993.

Поступила в редакцию 24.05.2016,
после доработки 30.07.2016