Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Бобров, С. А. Тригер, О квантовых эффектах в поперечной диэлектрической проницаемости максвелловской плазмы, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 3, 523–535

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:18:34

© 2017 г.

В. Б. Бобров^{*†}, С. А. Тригер^{*}

О КВАНТОВЫХ ЭФФЕКТАХ В ПОПЕРЕЧНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ПЛАЗМЫ

Получено явное аналитическое выражение для поперечной диэлектрической проницаемости максвелловской плазмы, учитывающее квантовые эффекты, обусловленные как пространственной и частотной дисперсией, так и наличием собственного магнитного момента у частиц плазмы.

Ключевые слова: максвелловская плазма, поперечная диэлектрическая проницаемость, квантовые эффекты.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9238>

1. ВВЕДЕНИЕ

Продольная $\varepsilon^\ell(q, \omega)$ и поперечная $\varepsilon^{\text{tr}}(q, \omega)$ составляющие диэлектрической проницаемости (ДП) полностью определяют линейные электромагнитные свойства однородной и изотропной плазмы [1]. Для описания пространственной (зависимости от волнового вектора q) и частотной (зависимости от частоты ω) дисперсии функций $\varepsilon^\ell(q, \omega)$ и $\varepsilon^{\text{tr}}(q, \omega)$ в слабонеидеальной плазме обычно используются известные выражения для так называемой бесстолкновительной плазмы, в которой взаимодействие между заряженными частицами ограничивается учетом самосогласованного электромагнитного поля [1]. В этом случае зависимость ДП от термодинамических параметров нерелятивистской плазмы определяется через функции распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна для идеального газа частиц соответствующего сорта с учетом условия квазинейтральности $\sum_a z_a e n_a = 0$ для всей плазмы, где n_a – средняя плотность числа частиц сорта a , которые характеризуются зарядом $z_a e$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-50-00124).

^{*}Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия.
E-mail: vic5907@mail.ru, satron@mail.ru

[†]Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”, Москва, Россия

В применении к газовой полностью ионизованной плазме функции распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна могут быть заменены на функцию распределения Максвелла (максвелловская плазма) в силу малости параметра вырождения [2]

$$n_a \Lambda_a^3 \ll 1, \quad (1)$$

где $\Lambda_a = (2\pi\hbar^2/m_a T)^{1/2}$ – тепловая длина волны де Бройля для частиц сорта a с массой m_a , T – температура равновесной плазмы в энергетических единицах.

При выполнении условия (1) появляется иллюзия, что в этом случае функции $\varepsilon^\ell(q, \omega)$ и $\varepsilon^{\text{tr}}(q, \omega)$ соответствуют ДП классической плазмы (см., например, [3])

$$\varepsilon_{\text{cl}}^\ell(q, \omega) = 1 + \sum_a \frac{\omega_a^2}{q^2 v_a^2} \left(1 + F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} q v_a}\right) \right), \quad \varepsilon_{\text{cl}}^{\text{tr}}(q, \omega) = 1 + \sum_a \frac{\omega_a^2}{\omega^2} F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} q v_a}\right). \quad (2)$$

Здесь $\omega_a = (4\pi z_a^2 e^2 n_a / m_a)^{1/2}$ – плазменная частота, $v_a = (T/m_a)^{1/2}$ – некоторая средняя тепловая скорость для частиц сорта a ,

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2}}{y - x - i0} = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2}}{y - x} + i\sqrt{\pi} x e^{-x^2}, \quad (3)$$

символ P означает, что соответствующий интеграл понимается в смысле главного значения (см. приложение А).

Из общих соображений ясно, что даже при выполнении условия (1) имеются независимые параметры, содержащие постоянную Планка $\hbar$ и связанные с пространственной (γ_q) и частотной (γ_ω) дисперсией ДП:

$$\gamma_q^{(a)} = \frac{\hbar^2 q^2}{2m_a T} = \frac{(q\Lambda_a)^2}{4\pi}, \quad \gamma_\omega = \frac{\hbar\omega}{T}. \quad (4)$$

Другими словами, в отличие от ДП классической плазмы, отвечающей помимо условия (1) пределам $\gamma_q^{(a)} \rightarrow 0$ и $\gamma_\omega \rightarrow 0$, в ДП для максвелловской плазмы необходимо учитывать квантовые эффекты, обусловленные конечными значениями параметров $\gamma_q^{(a)}$ и γ_ω .

Соответствующий результат для продольной ДП максвелловской плазмы имеет вид [4], [5]

$$\begin{aligned} \text{Re } \varepsilon_{\text{mp}}^\ell(q, \omega) = & 1 + \sum_a \frac{\omega_a^2}{2q^2 v_a^2} \left(\frac{\gamma_\omega}{\gamma_q^{(a)}} + 1 \right) {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{q v_a} + \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}} \right)^2\right) - \\ & - \sum_a \frac{\omega_a^2}{2q^2 v_a^2} \left(\frac{\gamma_\omega}{\gamma_q^{(a)}} - 1 \right) {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{q v_a} - \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}} \right)^2\right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Im } \varepsilon_{\text{mp}}^\ell(q, \omega) = & \frac{1}{2} \sum_a \frac{\omega_a^2 m_a^2 \Lambda_a}{\hbar^2 q^3} \times \\ & \times \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{q v_a} - \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}} \right)^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{q v_a} + \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}} \right)^2\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая свойства вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1(\alpha, \beta; x)$ [6], нетрудно убедиться, что из (2)–(6) непосредственно следует (см. приложение Б)

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \varepsilon_{\text{mp}}^{\ell}(q, \omega) = \varepsilon_{\text{cl}}^{\ell}(q, \omega). \quad (7)$$

Для поперечной ДП $\varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega)$ результаты, аналогичные (5), (6), отсутствуют до настоящего времени. Кроме того, в отличие от рассмотрения продольной ДП $\varepsilon_{\text{mp}}^{\ell}(q, \omega)$, при вычислении величины $\varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega)$ необходимо также учитывать еще один квантовый эффект, связанный с собственным магнитным моментом заряженных частиц.

Дело в том, что исходя из правила соответствия между классической и квантовой механикой при определении поперечной ДП бесстолкновительной плазмы до настоящего времени часто используется следующий гамильтониан (см., например, [7]–[9]):

$$\hat{H}_0 = \sum_a \hat{H}_0^{(a)}, \quad \hat{H}_0^{(a)} = \int d^3r \hat{\psi}_a^+(\mathbf{r}) \left\{ \frac{1}{2m_a} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{z_a e}{c} \mathbf{A}^{(\text{ext})} \right)^2 + z_a e \varphi^{(\text{ext})} \right\} \hat{\psi}_a(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Здесь $\hat{\psi}_a^+(\mathbf{r})$ и $\hat{\psi}_a(\mathbf{r})$ – полевые операторы рождения и уничтожения соответственно для частиц сорта a , $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ – оператор импульса, $\mathbf{A}^{(\text{ext})}$ и $\varphi^{(\text{ext})}$ – соответственно векторный и скалярный потенциалы внешнего поля, изменяющиеся во времени и пространстве, c – скорость света. В рассматриваемом нерелятивистском приближении используется кулоновская калибровка для векторного потенциала: $\text{div} \mathbf{A}^{(\text{ext})} = 0$.

Однако применение гамильтониана (8) возможно только при рассмотрении плазменных систем, состоящих из “скалярных” частиц, не имеющих спина (см. подробнее [10], [11] и цитированную там литературу).

Между тем при описании тождественных частиц необходимо учитывать их собственный момент (спин), который не имеет аналога в классической механике. Частицы со спином обладают также определенным собственным магнитным моментом [12]. Соответствующий ему оператор $\hat{\boldsymbol{\mu}}_a$ пропорционален оператору спина $\hat{\mathbf{s}}_a$ и записывается в виде $\hat{\boldsymbol{\mu}}_a = \mu_a \hat{\mathbf{s}}_a / s_a$, где s_a – величина спина для частиц сорта a , а μ_a – характерная для таких частиц постоянная. В частности, собственный магнитный момент электрона, который характеризуется спином $s_e = 1/2$, равен $\mu_e = -\mu_B$, где $\mu_B = |e|\hbar/(2m_e c)$ – магнетон Бора.

Таким образом, гамильтониан для квантовой бесстолкновительной плазмы в нерелятивистском приближении имеет вид $\hat{H} = \sum_a \hat{H}_a$, где

$$\hat{H}_a = \int d^3r \hat{\psi}_a^+(\mathbf{r}) \left\{ \frac{1}{2m_a} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{z_a e}{c} \mathbf{A}^{(\text{ext})} \right)^2 + z_a e \varphi^{(\text{ext})} - \frac{\mu_a}{s_a} \mathbf{H}^{(\text{ext})} \hat{\mathbf{s}}_a \right\} \hat{\psi}_a(\mathbf{r}), \quad (9)$$

$\mathbf{H}^{(\text{ext})} = \text{rot} \mathbf{A}^{(\text{ext})}$ – напряженность внешнего магнитного поля [10]–[12]. При этом гамильтониану $\hat{H}$ соответствует следующий оператор плотности электрического тока [12]:

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \sum_a \hat{\mathbf{j}}_a(\mathbf{r}), \quad \hat{\mathbf{j}}_a(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{j}}_a^{(\text{ext})}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{j}}_a^{(\text{diam})}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{j}}_a^{(\text{para})}(\mathbf{r}), \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{j}}_a^{(\text{ext})}(\mathbf{r}) = -\frac{z_a^2 e^2}{m_a c} \mathbf{A}^{(\text{ext})} \hat{\psi}_a^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}_a(\mathbf{r}), \quad \hat{\mathbf{j}}_a^{(\text{para})}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_a c}{s_a} \text{rot}(\hat{\psi}_a^+(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}}_a \hat{\psi}_a(\mathbf{r})), \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{j}}_a^{(\text{diam})}(\mathbf{r}) = \frac{i z_a e \hbar}{2m_a} [(\nabla \hat{\psi}_a^+(\mathbf{r})) \hat{\psi}_a(\mathbf{r}) - \hat{\psi}_a^+(\mathbf{r}) (\nabla \hat{\psi}_a^+(\mathbf{r}))]. \quad (12)$$

Здесь $\hat{\mathbf{j}}_a^{(\text{ext})}(\mathbf{r})$ – плотность электрического тока, обусловленного внешним электромагнитным полем, $\hat{\mathbf{j}}_a^{(\text{diam})}(\mathbf{r})$ – плотность электрического тока, не связанного с наличием спина и соответствующего гамильтониану (8), $\hat{\mathbf{j}}_a^{(\text{para})}(\mathbf{r})$ – плотность электрического тока для частиц сорта a , обусловленного наличием собственного магнитного момента. Отметим, что учет спина у частиц плазмы приводит к качественным нелинейным эффектам в квантовой плазме (см. подробнее [13]).

В настоящей работе найдено явное аналитическое выражение для поперечной ДП максвелловской плазмы, учитывающее квантовые эффекты, обусловленные как пространственной и частотной дисперсией, так и наличием собственного магнитного момента у частиц плазмы. Это позволяет последовательно учесть диамагнетизм Ландау и парамагнетизм Паули (см. [14] и цитированную там литературу).

2. ПОПЕРЕЧНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ

Последовательное вычисление поперечной ДП для бесстолкновительной плазмы с учетом квантовых эффектов возможно как в рамках метода кинетического уравнения [1], так и на основе теории линейного отклика (см., например, [15]).

Поперечная ДП для бесстолкновительной плазмы при произвольном вырождении имеет вид [16]

$$\varepsilon^{\text{tr}}(q, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{4\pi}{\omega^2} \sum_a \left\{ \Phi_a^{(\text{diam})}(q, \omega) + \Phi_a^{(\text{para})}(q, \omega) \right\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Phi_a^{(\text{diam})}(q, \omega) &= \frac{(2s_a + 1)\hbar^2 z_a^2 e^2}{2m_a^2} \times \\ &\times \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(p^2 - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2}{q^2} \right) \frac{\Delta f_a(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\hbar(\omega + i0) + \Delta \epsilon_a(\mathbf{p}, \mathbf{q})}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Phi_a^{(\text{para})}(q, \omega) = (2s_a + 1)s_a(s_a + 1) \left(\frac{\mu_a c}{s_a} \right)^2 \frac{q^2}{3} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\Delta f_a(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\hbar(\omega + i0) + \Delta \epsilon_a(\mathbf{p}, \mathbf{q})}, \quad (15)$$

$$\Delta f_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv f_a\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{2}\right) - f_a\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right), \quad (16)$$

$$\Delta \epsilon_a(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \epsilon_a\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{2}\right) - \epsilon_a\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right). \quad (17)$$

Здесь $\omega_p = (\sum_a \omega_a^2)^{1/2}$ – плазменная частота, $f_a(p) = \{e^{(\epsilon_a(p) - \zeta_a)/T} \pm 1\}^{-1}$ – функция распределения Ферми–Дирака или Бозе–Эйнштейна в зависимости от значения спина s_a , $\epsilon_a(p) = \hbar^2 p^2 / 2m_a$ – энергетический спектр свободной частицы, ζ_a – химический потенциал для идеальных частиц сорта a , величина которого определяется из условия нормировки

$$n_a(T, \zeta_a) = (2s_a + 1) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_a(p). \quad (18)$$

Отметим, что второе слагаемое в соотношении (13) связано с плотностью электрического тока $\hat{\mathbf{j}}^{(\text{ext})}(\mathbf{r})$ (11), обусловленного наличием внешнего электромагнитного поля. В свою очередь, функции $\Phi_a^{(\text{diam})}(q, \omega)$ (14) и $\Phi_a^{(\text{para})}(q, \omega)$ (15) определяются через корреляционные функции плотностей электрического тока $\hat{\mathbf{j}}_a^{(\text{diam})}(\mathbf{r})$ (12) и $\hat{\mathbf{j}}_a^{(\text{para})}(\mathbf{r})$ (11) соответственно (см. подробнее [16]). Это означает, что при использовании гамильтониана (8), не учитывающего явно наличие собственного магнитного момента у частиц плазмы, в определении поперечной ДП $\varepsilon^{\text{tr}}(q, \omega)$ (13) будет отсутствовать функция $\Phi_a^{(\text{para})}(q, \omega)$.

Из соотношений (8)–(11) вытекают следующие выражения для функций $\Phi^{(\text{diam})}(q, \omega)$ и $\Phi^{(\text{para})}(q, \omega)$:

$$\begin{aligned} \text{Re } \Phi_a^{(\text{diam})}(q, \omega) &= \frac{(2s_a + 1)z_a^2 e^2}{8\pi^2 m_a q} \times \\ &\times \int_0^\infty dp p f_a(p) \left\{ [p^2 - q^2 (\Delta_a^{(-)}(q, \omega))^2] \ln \left| \frac{p + q \Delta_a^{(-)}(q, \omega)}{p - q \Delta_a^{(-)}(q, \omega)} \right| - \right. \\ &\quad \left. - [p^2 - q^2 (\Delta_a^{(+)}(q, \omega))^2] \ln \left| \frac{p + q \Delta_a^{(+)}(q, \omega)}{p - q \Delta_a^{(+)}(q, \omega)} \right| \right\} - \frac{\omega_a^2}{8\pi}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{Im } \Phi_a^{(\text{diam})}(q, \omega) &= \frac{(2s_a + 1)z_a^2 e^2}{8\pi m_a q} \times \\ &\times \left\{ \int_{q \Delta_a^{(+)}(q, \omega)}^\infty dp p f_a(p) [p^2 - q^2 (\Delta_a^{(+)}(q, \omega))^2] - \right. \\ &\quad \left. - \int_{q |\Delta_a^{(-)}(q, \omega)|}^\infty dp p f_a(p) [p^2 - q^2 (\Delta_a^{(-)}(q, \omega))^2] \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{Re } \Phi_a^{(\text{para})}(q, \omega) &= (2s_a + 1)s_a(s_a + 1) \left(\frac{\mu_a c}{s_a} \right)^2 \frac{m_a q}{12\pi^2 \hbar^2} \times \\ &\times \int_0^\infty dp p f_a(p) \left\{ \ln \left| \frac{p + q \Delta_a^{(-)}(q, \omega)}{p - q \Delta_a^{(-)}(q, \omega)} \right| - \ln \left| \frac{p + q \Delta_a^{(+)}(q, \omega)}{p - q \Delta_a^{(+)}(q, \omega)} \right| \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{Im } \Phi_a^{(\text{para})}(q, \omega) = -(2s_a + 1)s_a(s_a + 1) \left(\frac{\mu_a c}{s_a} \right)^2 \frac{m_a q}{12\pi^2 \hbar^2} \int_{q |\Delta_a^{(-)}(q, \omega)|}^{q \Delta_a^{(+)}(q, \omega)} dp p f_a(p), \quad (22)$$

где

$$\Delta_a^{(\pm)}(q, \omega) = \frac{\gamma_\omega / \gamma_q^{(a)} \pm 1}{2}. \quad (23)$$

В линейном приближении по внешнему электромагнитному полю магнитная проницаемость плазмы $\bar{\mu}(q, \omega)$, определяемая через отношение фурье-компоненты напряженности магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \omega)$ в плазме к фурье-компоненте напряженности внешнего магнитного поля $\mathbf{H}^{(\text{ext})}(\mathbf{q}, \omega)$, имеет вид [16] (см. также [17])

$$\bar{\mu}(q, \omega) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{q}, \omega)}{\mathbf{H}^{(\text{ext})}(\mathbf{q}, \omega)} = \frac{c^2 q^2 - \omega^2}{c^2 q^2 - \omega^2 \varepsilon^{\text{tr}}(q, \omega)}. \quad (24)$$

Учитывая соотношения (13), (20), (22), (23), легко проверить справедливость предельных равенств

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im } \Phi_a^{(\text{diam})}(q, \omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im } \Phi_a^{(\text{para})}(q, \omega) = 0. \quad (25)$$

Следовательно, статическая магнитная проницаемость бесстолкновительной плазмы при произвольном вырождении имеет вид

$$\bar{\mu}(q, 0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \bar{\mu}(q, \omega) = \frac{c^2 q^2}{c^2 q^2 + \omega_p^2 + 4\pi \sum_a \{ \Phi_a^{(\text{diam})}(q, 0) + \Phi_a^{(\text{para})}(q, 0) \}}, \quad (26)$$

$$\Phi_a^{(\text{diam})}(q, 0) = \frac{(2s_a + 1)z_a^2 e^2}{4\pi^2 m_a q} \int_0^\infty dp p f_a(p) \left(p^2 - \frac{q^2}{4} \right) \ln \left| \frac{2p - q}{2p + q} \right| - \frac{\omega_a^2}{8\pi}, \quad (27)$$

$$\Phi_a^{(\text{para})}(q, 0) = (2s_a + 1)s_a(s_a + 1) \left(\frac{\mu_a c}{s_a} \right)^2 \frac{m_a q}{6\pi^2 \hbar^2} \int_0^\infty dp p f_a(p) \ln \left| \frac{2p - q}{2p + q} \right| < 0. \quad (28)$$

Таким образом, учет собственного магнитного момента у частиц плазмы приводит при прочих равных условиях к увеличению величины статической магнитной проницаемости бесстолкновительной плазмы.

Функции $\Phi_a^{(\text{diam})}(q, 0)$ (27) и $\Phi_a^{(\text{para})}(q, 0)$ (28) в области малых волновых векторов q можно представить как

$$\Phi_a^{(\text{diam})}(q, 0) \cong -\frac{\omega_a^2}{4\pi} + \frac{(2s_a + 1)z_a^2 e^2 q^2}{24\pi^2 m_a} \int_0^\infty dp f_a(p), \quad (29)$$

$$\Phi_a^{(\text{para})}(q, 0) \cong -(2s_a + 1)s_a(s_a + 1) \left(\frac{\mu_a c}{s_a} \right)^2 \frac{m_a q^2}{6\pi^2 \hbar^2} \int_0^\infty dp f_a(p). \quad (30)$$

Подставляя (29), (30) в (26), находим величину магнитной постоянной $\bar{\mu}_{\text{st}}$ для бесстолкновительной плазмы при произвольном вырождении:

$$\bar{\mu}_{\text{st}} = \lim_{q \rightarrow 0} \bar{\mu}(q, 0) = \{1 - 4\pi(\chi^{(\text{para})}(T, \{\zeta_a\}) - \chi^{(\text{diam})}(T, \{\zeta_a\}))\}^{-1}, \quad (31)$$

где

$$\chi^{(\text{diam})}(T, \{\zeta_a\}) = \sum_a \frac{(2s_a + 1)z_a^2 e^2}{24\pi^2 m_a c^2} \int_0^\infty dp f_a(p), \quad (32)$$

$$\chi^{(\text{para})}(T, \{\zeta_a\}) = \sum_a (2s_a + 1)s_a(s_a + 1) \left(\frac{\mu_a}{s_a} \right)^2 \frac{m_a}{6\pi^2 \hbar^2} \int_0^\infty dp f_a(p). \quad (33)$$

Согласно (31) ответ на вопрос о том, является ли бесстолкновительная плазма диамагнитной ($\bar{\mu}_{\text{st}} < 1$) или парамагнитной ($\bar{\mu}_{\text{st}} > 1$), определяется соотношением между величинами $\chi^{(\text{diam})}(T, \{\zeta_a\})$ (32) и $\chi^{(\text{para})}(T, \{\zeta_a\})$ (33). Если не учитывать собственный магнитный момент у частиц плазмы, то такая плазма, как следует из (31)–(33), будет диамагнитной при любых значениях термодинамических параметров. Таким образом, для корректного описания поперечной ДП бесстолкновительной плазмы необходимо учитывать функцию $\Phi_a^{(\text{para})}(q, \omega)$ (15).

Для однокомпонентной электронной плазмы в компенсирующем положительном фоне (см. подробнее [18], [19]) имеет место неравенство $\chi^{(\text{diam})}(T, \zeta_e) < \chi^{(\text{para})}(T, \zeta_e)$. Другими словами, парамагнетизм Паули превалирует над диамагнетизмом Ландау. В результате бесстолкновительная электронная плазма парамагнитна в слабом магнитном поле при любых значениях термодинамических параметров.

3. ПОПЕРЕЧНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ПЛАЗМЫ

В пределе слабого вырождения (1) различием в функциях распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна можно пренебречь, так что

$$f_a(p) \cong \frac{n_a \Lambda_a^3}{2s_a + 1} e^{-\hbar^2 p^2 / 2m_a T}. \quad (34)$$

С учетом (34) функции $\text{Re } \Phi_a^{(\text{diam})}(q, \omega)$ (19) и $\text{Re } \Phi_a^{(\text{para})}(q, \omega)$ (21) для максвелловской плазмы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \text{Re } \Phi_a^{(\text{diam})}(q, \omega) = & -\frac{\omega_a^2}{8\pi} + \frac{\omega_a^2}{2\pi q \Lambda_a} \int_0^\infty dx x e^{-x^2} \times \\ & \times \left\{ [x^2 - (\lambda_a^{(-)}(q, \omega))^2] \ln \left| \frac{x + \lambda_a^{(-)}(q, \omega)}{x - \lambda_a^{(-)}(q, \omega)} \right| - \right. \\ & \left. - [x^2 - (\lambda_a^{(+)}(q, \omega))^2] \ln \left| \frac{x + \lambda_a^{(+)}(q, \omega)}{x - \lambda_a^{(+)}(q, \omega)} \right| \right\}, \\ \text{Re } \Psi_a^{(\text{para})}(q, \omega) = & s_a(s_a + 1) \left(\frac{\mu_a m_a c}{\hbar z_a e s_a} \right)^2 \omega_a^2 \frac{q \Lambda_a}{12\pi^2} \int_0^\infty dx x e^{-x^2} \times \\ & \times \left\{ \ln \left| \frac{x + \lambda_a^{(-)}(q, \omega)}{x - \lambda_a^{(-)}(q, \omega)} \right| - \ln \left| \frac{x + \lambda_a^{(+)}(q, \omega)}{x - \lambda_a^{(+)}(q, \omega)} \right| \right\}, \\ \lambda_a^{(\pm)}(q, \omega) = & (\gamma_q^{(a)})^{1/2} \Delta_a^{(\pm)}(q, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega}{qv_a} \pm \frac{q \Lambda_a}{\sqrt{8\pi}} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Интегрированием по частям нетрудно получить

$$\begin{aligned} \text{P} \int_0^\infty dx x e^{-x^2} \ln \left| \frac{x + \beta}{x - \beta} \right| &= -\frac{1}{2} \text{P} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{e^{-x^2}}{x - \beta}, \\ \text{P} \int_0^\infty dx x e^{-x^2} (x^2 - \beta^2) \ln \left| \frac{x + \beta}{x - \beta} \right| &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta - \frac{1}{2} \text{P} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{e^{-x^2}}{x - \beta}. \end{aligned} \quad (36)$$

При этом (см. приложение А)

$$\text{P} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{e^{-x^2}}{x - \beta} = -2\sqrt{\pi} \beta {}_1F_1 \left(1, \frac{3}{2}; -\beta^2 \right). \quad (37)$$

Таким образом, с учетом (13), (35)–(37) действительная часть поперечной ДП максвелловской плазмы имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega) = & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \sum_a \frac{\omega_a^2}{2\omega^2} \left\{ \left[\frac{2m_a\omega}{\hbar q^2} + s_a(s_a + 1) \left(\frac{\mu_a m_a c}{\hbar z_a e s_a} \right)^2 \frac{(q\Lambda_a)^2}{6\pi} \right] \times \right. \\ & \times \left[{}_1F_1 \left(1, \frac{3}{2}; -(\lambda_a^{(-)}(q, \omega))^2 \right) - {}_1F_1 \left(1, \frac{3}{2}; -(\lambda_a^{(+)}(q, \omega))^2 \right) \right] \Big\} + \\ & + \sum_a \frac{\omega_a^2}{2\omega^2} \left\{ \left[1 + s_a(s_a + 1) \left(\frac{\mu_a m_a c}{\hbar z_a e s_a} \right)^2 \frac{(q\Lambda_a)^2}{6\pi} \right] \times \right. \\ & \times \left[{}_1F_1 \left(1, \frac{3}{2}; -(\lambda_a^{(-)}(q, \omega))^2 \right) + {}_1F_1 \left(1, \frac{3}{2}; -(\lambda_a^{(+)}(q, \omega))^2 \right) \right] \Big\}. \quad (38) \end{aligned}$$

В классическом пределе ($\hbar \rightarrow 0$) функция $\operatorname{Re} \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega)$ совпадает с действительной частью поперечной ДП классической плазмы (2), (3) (см. приложение В)

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \operatorname{Re} \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega) = \operatorname{Re} \varepsilon_{\text{cl}}^{\text{tr}}(q, \omega). \quad (39)$$

В свою очередь, согласно (20), (22), (34)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Phi_a^{(\text{diam})}(q, \omega) = & \frac{\omega_a^2}{8} (\pi \gamma_q^{(a)})^{-1/2} \times \\ & \times \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{qv_a} + \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}} \right)^2 \right) - \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{qv_a} - \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}} \right)^2 \right) \right\}, \\ \operatorname{Im} \Phi_a^{(\text{para})}(q, \omega) = & s_a(s_a + 1) \left(\frac{\mu_a m_a c}{\hbar z_a e s_a} \right)^2 \frac{\omega_a^2}{12\pi} \left(\frac{\gamma_q^{(a)}}{\pi} \right)^{1/2} \times \\ & \times \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{qv_a} + \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}} \right)^2 \right) - \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{qv_a} - \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}} \right)^2 \right) \right\}. \quad (40) \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (13) мнимая часть поперечной ДП для максвелловской плазмы равна

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega) = & \frac{\sqrt{\pi}}{2\omega^2} \sum_a \omega_a^2 \left\{ (\gamma_q^{(a)})^{-1/2} + \frac{2s_a(s_a + 1)}{3\pi} \left(\frac{\mu_a m_a c}{\hbar z_a e s_a} \right)^2 (\gamma_q^{(a)})^{1/2} \right\} \times \\ & \times \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{qv_a} - \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}} \right)^2 \right) - \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{qv_a} + \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}} \right)^2 \right) \right\}. \quad (41) \end{aligned}$$

С учетом (4) справедливо предельное соотношение (см. приложение Б)

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \operatorname{Im} \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega) = \operatorname{Im} \varepsilon_{\text{cl}}^{\text{tr}}(q, \omega), \quad (42)$$

где функция $\operatorname{Im} \varepsilon_{\text{cl}}^{\text{tr}}(q, \omega)$ для классической плазмы определяется равенствами (2), (3).

Как и следовало ожидать, различие между функциями $\text{Im } \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega)$ и $\text{Im } \varepsilon_{\text{cl}}^{\text{tr}}(q, \omega)$ становится все более существенным по мере возрастания значений волновых векторов q и частот ω :

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} q \text{Im } \varepsilon_{\text{cl}}^{\text{tr}}(q, \omega) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_a \frac{\omega_a^2}{\omega v_a} \neq \lim_{q \rightarrow \infty} q \text{Im } \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega) = 0, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\text{Im } \varepsilon_{\text{cl}}^{\text{tr}}(q, \omega)}{\text{Im } \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega)} &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

При этом в статическом пределе $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^2 \text{Im } \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^2 \text{Im } \varepsilon_{\text{cl}}^{\text{tr}}(q, \omega) = 0. \quad (44)$$

Вместе с тем, согласно (2), (3), (38) действительная часть поперечной ДП $\text{Re } \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega)$ в пределе $\omega \rightarrow 0$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^2 \text{Re } \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega) &= -\omega_p^2 + \sum_a \omega_a^2 \left[1 + s_a(s_a + 1) \left(\frac{\mu_a m_a c}{\hbar z_a e s_a} \right)^2 \frac{(q \Lambda_a)^2}{6\pi} \right] \times \\ &\times {}_1F_1 \left(1, \frac{3}{2}; -\frac{\gamma_q^{(a)}}{4} \right) \neq \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^2 \text{Re } \varepsilon_{\text{cl}}^{\text{tr}}(q, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Справедливость последнего равенства в (45) непосредственно следует из (2), (3), (37) и определения вырожденной гипергеометрической функции [6]

$${}_1F_1(\alpha, \beta; z) = 1 + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Согласно (24), (26), (44), (45) статическая магнитная проницаемость $\bar{\mu}_{\text{mp}}(q, 0)$ для максвелловской плазмы имеет вид

$$\bar{\mu}_{\text{mp}}(q, 0) = \left\{ 1 - \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^2 \frac{\text{Re } \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega)}{c^2 q^2} \right\}^{-1}, \quad (46)$$

в отличие от статической магнитной проницаемости $\bar{\mu}_{\text{cl}}(q, 0)$ для классической плазмы, которая равна единице при любых значениях волновых векторов: $\bar{\mu}_{\text{cl}}(q, 0) = 1$ (см. подробнее [16]).

Величина магнитной постоянной $\mu_{\text{st}}^{(\text{mp})} = \lim_{q \rightarrow 0} \bar{\mu}_{\text{mp}}(q, 0)$ для максвелловской плазмы (см. (31)) будет больше или меньше единицы в зависимости от соотношения между величинами $\chi^{(\text{diam})}$ (32) и $\chi^{(\text{para})}$ (33), которые для максвелловской плазмы (34) равны

$$\begin{aligned} \chi_{\text{mp}}^{(\text{diam})}(T, \{n_a\}) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{48\pi^2} \sum_a n_a \Lambda_a^3 \frac{z_a^2 e^2}{\hbar c} \cdot \frac{v_a}{c}, \\ \chi_{\text{mp}}^{(\text{para})}(T, \{n_a\}) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{12\pi^2} \sum_a s_a(s_a + 1) \left(\frac{\mu_a m_a c}{\hbar z_a e s_a} \right)^2 n_a \Lambda_a^3 \frac{z_a^2 e^2}{\hbar c} \cdot \frac{v_a}{c}. \end{aligned} \quad (47)$$

Как и следовало ожидать, значения величин $\chi_{\text{mp}}^{(\text{diam})}(T, \{n_a\})$ и $\chi_{\text{mp}}^{(\text{para})}(T, \{n_a\})$ чрезвычайно малы в силу (1), а также условий $e^2/\hbar c \ll 1$ и $v_a/c \ll 1$. Однако ситуация может измениться в неидеальной плазме.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как следует из проведенного рассмотрения, поперечная ДП $\varepsilon_{\text{тр}}^{\text{tr}}(q, \omega)$ (38), (41) для максвелловской плазмы характеризуется наличием квантовых эффектов, обусловленных как учетом собственного магнитного момента у частиц плазмы, так и последовательным описанием пространственной и частотной дисперсии.

Полученные результаты могут иметь существенное значение для определения электромагнитных характеристик, величина которых зависит от поперечной ДП плазмы в области больших волновых векторов. К числу таких свойств относятся поверхностный импеданс полугораниченной плазмы [20], а также характеристики равновесного излучения в плазме [21]–[26]. Кроме того, квантовые эффекты могут быть существенны при вынужденном черенковском излучении [27].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Для вычисления функции $\text{Re } F(x)$ (3) при $x > 0$ проинтегрируем по частям в определении (3):

$$\text{Re } F(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \text{P} \int_0^\infty dy y e^{-y^2} \ln \left| \frac{y-x}{y+x} \right|. \quad (48)$$

Учтем далее равенства [6]

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right| &= -2 \int_0^\infty dz \frac{\sin(\alpha z) \sin(\beta z)}{z}, \\ \int_0^\infty dy y \sin(\beta y) e^{-\alpha y^2} &= \frac{\beta}{4\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\beta^2/4\alpha}, \\ \int_0^\infty dz \sin(\beta z) e^{-\alpha z^2} &= \frac{\beta}{2\alpha} {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \end{aligned} \quad (49)$$

которые имеют место при $\alpha > 0$, $\beta > 0$, причем в первом из этих соотношений $\alpha \neq \beta$. Используя (49), из (48) находим

$$\text{Re } F(x) = -2x^2 {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -x^2\right). \quad (50)$$

Дальнейшие преобразования в (50) связаны со следующими соотношениями для вырожденной гипергеометрической функции:

$$\begin{aligned} {}_1F_1(\alpha, \beta; z) &= e^z {}_1F_1(\beta - \alpha, \beta; -z), \\ {}_1F_1(\alpha, \beta; z) &= \frac{\Gamma(\beta) z^{1-\beta}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta - \alpha)} \int_0^z dt t^{\alpha-1} (z-t)^{\beta-\alpha-1} e^t, \end{aligned} \quad (51)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ [6]. С учетом этих соотношений формула (48) принимает вид

$$\text{Re } F(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^x dy e^{y^2}, \quad (52)$$

что соответствует результатам [1].

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Переход к классическому пределу ($\hbar \rightarrow 0$) для продольной ДП максвелловской плазмы $\varepsilon_{\text{мп}}^{\ell}(q, \omega)$ означает, в частности, справедливость условия $q\Lambda_a \rightarrow 0$. Поэтому имеем

$${}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a} \pm \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}}\right)^2\right) \cong {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) \mp \mp \frac{2\omega}{3qv_a} {}_1F_1\left(2, \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}}, \quad (53)$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a} \pm \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}}\right)^2\right) \cong \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) \mp \mp \frac{\omega}{qv_a} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) \frac{q\Lambda_a}{\sqrt{8\pi}}, \quad (54)$$

где учтено [6], что

$$\frac{d {}_1F_1(\alpha, \beta; z)}{dz} = \frac{\alpha}{\beta} {}_1F_1(\alpha + 1, \beta + 1; z). \quad (55)$$

Из (5), (53) следует

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re } \varepsilon_{\text{мп}}^{\ell}(q, \omega) &= 1 + \sum_a \frac{\omega_a^2}{q^2 v_a^2} {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) - \\ &- \frac{2}{3} \sum_a \frac{\omega_a^2}{q^2 v_a^2} \left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2 {}_1F_1\left(2, \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (56)$$

Принимая во внимание следующие соотношения для вырожденной гипергеометрической функции [6]:

$$\begin{aligned} \frac{z}{\beta} {}_1F_1(\alpha + 1, \beta + 1; z) &= {}_1F_1(\alpha + 1, \beta; z) - {}_1F_1(\alpha, \beta; z), \\ a {}_1F_1(\alpha + 1, \beta; z) &= (z + 2\alpha - \beta) {}_1F_1(\alpha, \beta; z) + (\beta - \alpha) {}_1F_1(\alpha - 1, \beta; z), \end{aligned} \quad (57)$$

получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re } \varepsilon_{\text{мп}}^{\ell}(q, \omega) &= \\ &= 1 + \sum_a \frac{\omega_a^2}{q^2 v_a^2} \left\{ 2 {}_1F_1\left(2, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) - {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) \right\} = \\ &= 1 + \sum_a \frac{\omega_a^2}{q^2 v_a^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2 {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) \right\}. \end{aligned} \quad (58)$$

Подставляя (54) в (6), находим

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \text{Im } \varepsilon_{\text{мп}}^{\ell}(q, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_a \frac{\omega_a^2}{q^2 v_a^2} \cdot \frac{\omega}{qv_a} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right). \quad (59)$$

С учетом (2), (3), (48) из (58), (59) непосредственно следует справедливость утверждения (7).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Как следует из (38), (41), переход в функции $\text{Re } \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega)$ к классическому пределу ($\hbar \rightarrow 0$) эквивалентен условию $q\Lambda_a \rightarrow 0$. В этом случае (см. приложение Б)

$$\begin{aligned}
 \lim_{\hbar \rightarrow 0} {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -(\lambda_a^{(\pm)}(q, \omega))^2\right) &= {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right), \\
 \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{2m_a\omega}{\hbar q^2} \left[{}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -(\lambda_a^{(-)}(q, \omega))^2\right) - {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -(\lambda_a^{(+)}(q, \omega))^2\right) \right] &= \\
 &= \frac{4}{3}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2 {}_1F_1\left(2, \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right), \\
 -\frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2 {}_1F_1\left(2, \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) &= \\
 &= {}_1F_1\left(2, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) - {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) = \\
 &= -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2 + 1\right) {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) + \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{60}$$

Используя (50), (60), находим

$$\begin{aligned}
 \lim_{\hbar \rightarrow 0} \text{Re } \varepsilon_{\text{mp}}^{\ell}(q, \omega) &= 1 - \sum_a \frac{\omega_a^2}{q^2 v_a^2} {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{qv_a}\right)^2\right) = \\
 &= 1 + \sum_a \frac{\omega_a^2}{\omega^2} \text{Re } F\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}qv_a}\right),
 \end{aligned} \tag{61}$$

где функция $F(x)$ определяется соотношением (3) (см. приложение А).

В результате мы приходим к выводу, что выражения (38), (41) для поперечной ДП максвелловской плазмы удовлетворяют предельному соотношению

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \varepsilon_{\text{mp}}^{\text{tr}}(q, \omega) = \varepsilon_{\text{cl}}^{\text{tr}}(q, \omega). \tag{62}$$

Благодарности. Авторы благодарны А. А. Рухадзе за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] В. П. Силин, А. А. Рухадзе, *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, Госатомиздат, М., 1961.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 5: *Статистическая физика. Часть 1*, Наука, М., 1976.
- [3] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 10: *Физическая кинетика*, Наука, М., 1979.
- [4] Ю. Л. Климонтович, В. Д. Крефт, “Псевдопотенциал для слабонеидеальной плазмы с учетом поляризации среды”, *ТВТ*, **12:2** (1974), 239–247.
- [5] В.-Д. Крефт, Д. Кремп, В. Эбелинг, Г. Рёпке, *Квантовая статистика систем заряженных частиц*, Мир, М., 1988.
- [6] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, М., 1963.

- [7] Л. С. Кузьменков, С. Г. Максимов, “О функциях распределения в квантовой механике и функциях Вигнера”, *ТМФ*, **131**:2 (2002), 231–243.
- [8] M. Dressel, G. Grüner, *Electrodynamics of Solids. Optical Properties of Electrons in Matter*, Cambridge. Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [9] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, “Поперечная электрическая проводимость в квантовой столкновительной плазме”, *Физика плазмы*, **38**:11 (2012), 977–986.
- [10] С. В. Владимиров, Ю. О. Тыщцкий, “Об описании бесстолкновительной квантовой плазмы”, *УФН*, **181**:12 (2011), 1313–1328.
- [11] Ю. В. Бобылев, М. В. Кузелев, “Диэлектрические проницаемости квантовой плазмы. Часть I”, *Физика плазмы*, **40**:5 (2014), 417–428.
- [12] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1974.
- [13] П. К. Шукла, Б. Элиассон, “Нелинейные аспекты квантовой физики плазмы”, *УФН*, **180**:1 (2010), 55–82.
- [14] Э. Г. Батыев, “Парамагнетизм Паули и диамагнетизм Ландау”, *УФН*, **179**:12 (2009), 1333–1334.
- [15] А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, М., 1977.
- [16] V. B. Bobrov, “To the theory of the linear magnetic permeability of a medium”, *Physica A*, **187**:3–4 (1992), 603–624.
- [17] Д. А. Киржниц, “Общие свойства электромагнитных функций отклика”, *УФН*, **152**:3 (1987), 399–422.
- [18] В. Д. Горобченко, Е. Г. Максимов, “Диэлектрическая проницаемость взаимодействующего электронного газа”, *УФН*, **130**:1 (1980), 65–111.
- [19] S. Ichimaru, “Strongly coupled plasmas: high-density classical plasmas and degenerate electron liquids”, *Rev. Modern Phys.*, **54**:4 (1982), 1017–1059.
- [20] А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы*, Высшая школа, М., 1978.
- [21] В. Б. Бобров, И. М. Соколов, С. А. Тригер, “О спектральном распределении энергии равновесного излучения в веществе”, *Письма в ЖЭТФ*, **101**:5 (2015), 326–329.
- [22] В. Б. Бобров, С. А. Тригер, “Высокочастотное спектральное распределение энергии равновесного излучения в плазме”, *ТМФ*, **187**:1 (2016), 104–113.
- [23] A. L. Khomkin, A. S. Shumikhin, S. A. Trigger, “To the radiation of ultra-relativistic plasma”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **653** (2015), 012024, 5 pp.
- [24] М. Б. Агранат, С. И. Ашитков, А. В. Овчинников, Д. С. Ситников, А. А. Юркевич, О. В. Чефонов, Л. Т. Перельман, С. И. Анисимов, В. Е. Фортов, “Тепловое излучение горячих электронов металла”, *Письма в ЖЭТФ*, **101**:9 (2015), 671–676.
- [25] Л. Г. Дьячков, “Плавный переход от спектральных линий к континууму в плотной плазме водорода”, *ТВТ*, **54**:1 (2016), 7–12.
- [26] В. Б. Бобров, С. А. Тригер, О. Ф. Петров, “О соотношении между микроканоническим и каноническим распределениями Гиббса”, *ТВТ*, **55**:1 (2017), 154–157.
- [27] М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, “Нерелятивистская квантовая теория вынужденных черенковского излучения и комптоновского рассеяния в плазме”, *УФН*, **181**:4 (2011), 393–398.