Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. А. Лунев, О. В. Павловский, Сингулярные решения уравнений Янга–Миллса
и модель мешков, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 2, 163–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf924>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 07:49:18

СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА И МОДЕЛЬ МЕШКОВ

Предложена модель конфайнмента кварков, основанная на сингулярных решениях классических уравнений Янга–Миллса. В рамках данной модели вычислены массы адронных состояний, в которых кварки находятся в основном состоянии. Наши результаты соответствуют экспериментальным значениям с точностью 3–5 % для всех адронных масс, исключая только массы легких псевдоскалярных мезонов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель мешков была одной из первых попыток понять физику адронов в терминах кварков. В своей простейшей форме она была сформулирована в конце шестидесятых годов [1] и стала широко известной после работ [2, 3] в середине семидесятых годов. С тех пор было предложено много модификаций модели мешков [4–8]. Известно, что модель мешков дает вполне удовлетворительное описание масс, магнитных моментов и многих других параметров адронов [9–16]. Несмотря на это модель мешков до сих пор не слишком популярна и причина этого вполне ясна. В отличие от стандартной модели, претендующей на описание адронной физики исходя из неких фундаментальных принципов, модель мешков основана на чисто феноменологическом предположении, что кварки заключены внутри некой сферы. Однако абсолютно не ясно, как такое предположение может быть выведено из квантовой хромодинамики (КХД), и, следовательно, модель мешков обычно рассматривается только как достаточно грубая феноменологическая модель.

В предлагаемой статье мы попытаемся показать, что существует способ вывода некой мешковой модели из КХД.

Нашим основополагающим предположением является то, что кварки в нулевом приближении движутся в некоем эффективном потенциале полей Янга–Миллса, который, в свою очередь, является решением классических уравнений Янга–Миллса с сингулярностью на сфере. Такие потенциалы были открыты в середине семидесятых годов [17–19]. Несколько позже сингулярные решения уравнений Янга–Миллса были переоткрыты благодаря аналогии между этими решениями и шварцшильдовскими решениями в общей теории относительности [20–22]. Упомянутая аналогия

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: pavlovsky@srdlan.npi.msu.su

между теорией Янга–Миллса и общей теорией относительности, предложенная в [23–25], использовалась в последующих статьях (см. [26] и цитируемую в ней литературу). Впоследствии аналогичные решения были найдены для уравнений Янга–Миллса–Хиггса [27]. Решения с сингулярностью на торе и на цилиндре были исследованы в [28–30].

Наша модель очевидным образом может быть выведена из КХД путем квантования вблизи сингулярного классического решения и понимается как нулевое приближение. Последующие приближения в принципе могут быть проведены систематическим способом. Однако в этой статье мы ограничимся только нулевым приближением. А именно, мы будем исследовать движение кварков в таких полях и вычислим спектр масс основных адронных состояний. Мы покажем, что наша модель дает вполне удовлетворительное описание всех основных адронных состояний, исключая легкие псевдоскалярные мезоны. Расхождение между нашими результатами и экспериментальными данными для масс легких псевдоскалярных мезонов неудивительно. Действительно, хорошо известно, что многие свойства легких псевдоскалярных мезонов связаны со спонтанным нарушением киральной симметрии. Однако это явление в нашей модели не принималось во внимание. Поэтому не стоит надеяться описывать массу легких мезонов в рамках предлагаемой простейшей версии нашей модели. Эта проблема требует дальнейшего рассмотрения.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 обсуждаются сферически-симметричные решения уравнений Янга–Миллса с сингулярностью на сфере. В разделе 3 исследуется движение частицы Дирака в таком поле. В разделе 4 вычисляется спектр масс основных состояний адронов путем квантования вблизи классического решения. В последнем разделе обсуждаются полученные результаты.

2. РЕШЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ НА СФЕРЕ

Рассмотрим четырехмерную $SU(2)$ -теорию Янга–Миллса. Подставим хорошо известный анзац Ву–Янга [31]

$$A_0^a = 0, \quad A_i^a = \varepsilon_{a ij} \frac{x^j}{r^2} (1 - H(r)) \quad (1)$$

в уравнения Янга–Миллса и получим

$$r^2 H(r)'' = H(r) (H(r)^2 - 1). \quad (2)$$

Как показано в [17–19] имеют место два типа решений уравнений Ву–Янга, сингулярных на сфере и регулярных при $r = 0$ (см. рисунок, где $R = 1$).

Легко вычислить асимптотики первого:

$$H_1(r) \sim \frac{\sqrt{2}}{1 - r/R}, \quad r \rightarrow R - 0; \quad H_1(r) \sim 1 + c_1 \left(\frac{r}{R}\right)^2, \quad r \rightarrow 0, \quad (3)$$

и второго решения:

$$H_2(r) \sim \frac{\sqrt{2}}{1 - r/R}, \quad r \rightarrow R - 0; \quad H_2(r) \sim -1 + c_2 \left(\frac{r}{R}\right)^2, \quad r \rightarrow 0, \quad (4)$$

где $R > 0$ – произвольная константа, $c_1 \simeq 3.038$ и $c_2 \simeq 28.29$.

Чтобы получить наилучшее соответствие между результатами нашей модели и экспериментальными значениями, мы в дальнейшем будем иметь дело только с решениями, имеющими асимптотику (4). Можно построить два различных типа решений $SU(3)$ -уравнений Янга–Миллса, которые соответствуют двум неэквивалентным вложениям алгебры $SU(2)$ в алгебру $SU(3)$. А именно, с точностью до унитарной эквивалентности решение первого типа определяется как

$$A = \frac{1}{2}A^1\lambda^1 + \frac{1}{2}A^2\lambda^2 + \frac{1}{2}A^3\lambda^3, \quad (5)$$

а второго типа –

$$A = \frac{1}{2}A^1\lambda^2 + \frac{1}{2}A^2\lambda^5 + \frac{1}{2}A^3\lambda^7, \quad (6)$$

где λ^α , $\alpha = 1, 2, \dots, 8$, – матрицы Гелл-Мана и A^a , $a = 1, 2, 3$, определяется из формулы (1).

3. КВАРКИ В ПОЛЕ ЯНГА–МИЛЛСА С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ НА СФЕРЕ

Рассмотрим уравнение Дирака

$$\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^j\nabla_j\right)\Psi = m\Psi \quad (7)$$

для кварка в потенциале (5) и (6). В случае (5) кварк не может быть заключен в сфере радиуса $r = R$, потому что третья компонента кваркового поля тогда будет удовлетворять свободному уравнению Дирака. Таким образом, мы ограничимся рассмотрением только случая (6).

Из-за наличия сферической симметрии у потенциала (6) гамильтониан частицы Дирака коммутирует с оператором полного углового момента

$$J^a = \frac{i}{4} \varepsilon^{abc} [\gamma^b, \gamma^c] + I^a + l^a,$$

где $(I^a) \equiv (\lambda^2, \lambda^5, \lambda^7)$ – оператор цветного изоспина, а l^a – орбитальный угловой момент,

$$l_i = -i\varepsilon_{ijk} x_j \partial_k.$$

Решения, обладающие определенными значениями полного углового момента и значением энергии E , могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{r} \left(\begin{aligned} & B_1^+(r) \nabla_j^\Omega \Omega_{JM}^{J+1/2} + D_1^+(r) n_j \Omega_{JM}^{J+1/2} + C_1^-(r) l_j \Omega_{JM}^{J-1/2} \\ & i \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} (B_1^-(r) \nabla_j^\Omega \Omega_{JM}^{J-1/2} + D_1^-(r) n_j \Omega_{JM}^{J-1/2} + C_1^+(r) l_j \Omega_{JM}^{J+1/2}) \end{aligned} \right) e^{-iEt} + \\ & + \frac{1}{r} \left(\begin{aligned} & i B_2^-(r) \nabla_j^\Omega \Omega_{JM}^{J-1/2} + i D_2^-(r) n_j \Omega_{JM}^{J-1/2} + i C_2^+(r) l_j \Omega_{JM}^{J+1/2} \\ & \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} (B_2^+(r) \nabla_j^\Omega \Omega_{JM}^{J+1/2} + D_2^+(r) n_j \Omega_{JM}^{J+1/2} + C_2^-(r) l_j \Omega_{JM}^{J-1/2}) \end{aligned} \right) e^{-iEt}, \quad (8) \end{aligned}$$

здесь $\Omega_{JM}^{J\pm 1/2}$ – сферический спинор:

$$\Omega_{JM}^{J+1/2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{J-M+1}{2(J+1)}} Y_{J+1/2, M-1/2} \\ \sqrt{\frac{J+M+1}{2(J+1)}} Y_{J+1/2, M+1/2} \end{pmatrix}, \quad \Omega_{JM}^{J-1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{J+M}{2(J+1)}} Y_{J-1/2, M-1/2} \\ \sqrt{\frac{J-M}{2(J+1)}} Y_{J-1/2, M+1/2} \end{pmatrix},$$

и

$$\nabla_i^\Omega = r \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial r}, \quad n_i = \frac{x_i}{r},$$

где $J = 1/2, 3/2, \dots$. Подставив (8) в (7), получим

$$\begin{aligned} B_1^{+'} = & \frac{1}{J + \frac{1}{2}} \left(-\left(J - \frac{1}{2}\right) \left(J + \frac{3}{2}\right) \frac{1}{r} B_1^+ + \frac{H(r)}{r} D_1^+ - \left(J - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{r} C_1^- - \right. \\ & \left. - \mathcal{E} \left(C_1^+ - \left(J - \frac{1}{2}\right) B_1^- \right) \right) \quad (\text{для всех } J), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1^{-\prime} &= \frac{1}{J + \frac{1}{2}} \left(\left(J - \frac{1}{2} \right) \left(J + \frac{3}{2} \right) \frac{1}{r} B_1^- - \frac{H(r)}{r} D_1^- - \left(J + \frac{3}{2} \right) \frac{1}{r} C_1^+ - \right. \\
 &\quad \left. - \mathcal{E} \left(C_1^- + \left(J + \frac{3}{2} \right) B_1^+ \right) \right) \quad (\text{для } J > \frac{1}{2}), \\
 D_1^{+\prime} &= - \left(J + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} D_1^+ + \left(J + \frac{3}{2} \right) \frac{H(r)}{r} B_1^+ - \left(J - \frac{1}{2} \right) \frac{H(r)}{r} C_1^- + \\
 &\quad + \mathcal{E} D_1^- \quad (\text{для всех } J), \\
 D_1^{-\prime} &= \left(J + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} D_1^- + \left(J + \frac{3}{2} \right) \frac{H(r)}{r} C_1^+ - \left(J - \frac{1}{2} \right) \frac{H(r)}{r} B_1^- - \\
 &\quad - \mathcal{E} D_1^+ \quad (\text{для всех } J), \\
 C_1^{-\prime} &= \frac{1}{J + \frac{1}{2}} \left(\left(J - \frac{1}{2} \right) \left(J + \frac{3}{2} \right) \frac{1}{r} C_1^- - \frac{H(r)}{r} D_1^+ - \left(J + \frac{3}{2} \right) \frac{1}{r} B_1^+ + \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{E} \left(B_1^- + \left(J + \frac{3}{2} \right) C_1^+ \right) \right) \quad (\text{для } J > \frac{1}{2}), \\
 C_1^{+\prime} &= \frac{1}{J + \frac{1}{2}} \left(- \left(J - \frac{1}{2} \right) \left(J + \frac{3}{2} \right) \frac{1}{r} C_1^+ + \frac{H(r)}{r} D_1^- - \left(J - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{r} B_1^- + \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{E} \left(B_1^+ - \left(J - \frac{1}{2} \right) C_1^- \right) \right) \quad (\text{для всех } J),
 \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathcal{E} = \sqrt{E^2 - m^2}$, и в точности такая же система уравнений может быть получена для функций $B_2^\pm$, $C_2^\pm$, $D_2^\pm$. Поэтому начальные уравнения Дирака распадаются на две идентичные подсистемы, что приводит к вырождению всех уровней энергии.

Это неудивительно. Действительно, уравнение Дирака во внешнем хромомангнитном поле со свойством $(\vec{A}(-x) = -\vec{A}(x))$ инвариантно относительно преобразований по четности. Хорошо известно [32], что эта симметрия приводит к $N = 1$ суперсимметрии уравнения Дирака, которая, в свою очередь, обеспечивает двукратное вырождение энергетических уровней. Поэтому все энергетические уровни будут вырождены по четности и как следствие все адроны должны быть вырождены по четности. Это тонкий момент нашей теории, и в дальнейшем мы будем полагать, что кварки находятся в состояниях с определенной четностью.

Эти состояния связаны с решениями уравнения Дирака (7), для которого либо $B_1^\pm = C_1^\pm = D_1^\pm = 0$, либо $B_2^\pm = C_2^\pm = D_2^\pm = 0$. Для определенности выберем второй случай.

Вначале рассмотрим наиболее важный для нашей модели выбор $J = 1/2$. Хорошо известно [33], что при этом подстановка (8) содержит только четыре функции: $B_1^+(r)$, $D_1^+(r)$, $C_1^+(r)$ и $D_1^-(r)$. Уравнения на эти функции легко получить из системы (9). В этом случае “выживают” только первое, третье, четвертое и шестое уравнения в системе (9), причем $B_1^-(r)$ и $C_1^-(r)$ в этих уравнениях надо положить равными нулю. В результате мы получим четыре линейных однородных уравнения первого порядка с переменными коэффициентами на четыре независимые функции. К тому же эти четыре

уравнения первого порядка на функции $B_1^+(r)$, $D_1^+(r)$, $C_1^+(r)$ и $D_1^-(r)$ могут быть сведены к *одному* уравнению второго порядка. А именно, сделав линейную замену

$$\begin{aligned} x_+ &= D_1^+ + \sqrt{2}B_1^+, & x_- &= D_1^+ - \sqrt{2}B_1^+, \\ y_+ &= D_1^- + \sqrt{2}C_1^+, & y_- &= D_1^- - \sqrt{2}C_1^+, \end{aligned}$$

получим систему уравнений на новые переменные:

$$\begin{aligned} x'_+ &= -\frac{1}{2r}(x_+ + x_-) + \frac{\sqrt{2}H(r)}{r}x_+ + \mathcal{E}y_-, \\ x'_- &= -\frac{1}{2r}(x_+ + x_-) - \frac{\sqrt{2}H(r)}{r}x_- + \mathcal{E}y_+, \\ y'_+ &= \frac{1}{2r}(y_+ + y_-) + \frac{\sqrt{2}H(r)}{r}y_+ - \mathcal{E}x_-, \\ y'_- &= \frac{1}{2r}(y_+ + y_-) - \frac{\sqrt{2}H(r)}{r}y_- - \mathcal{E}x_+. \end{aligned}$$

Теперь сделав вторую почти очевидную линейную замену

$$\begin{aligned} z_1 &= y_+, & z_2 &= \frac{1}{2r}(y_+ + y_-) + \frac{\sqrt{2}H(r)}{r}y_+ - \mathcal{E}x_-, \\ z_3 &= y_-, & z_4 &= \frac{1}{2r}(y_+ + y_-) - \frac{\sqrt{2}H(r)}{r}y_- - \mathcal{E}x_+, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2, \\ z_2' &= \left(\frac{2H(r)^2}{r^2} + \frac{\sqrt{2}H(r)'}{r} - \mathcal{E}^2 \right) z_1, \\ z_3' &= z_4, \\ z_4' &= \left(\frac{2H(r)^2}{r^2} - \frac{\sqrt{2}H(r)'}{r} - \mathcal{E}^2 \right) z_3. \end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, уравнения на z_1 , z_2 и z_3 , z_4 разделились. Более того, они могут быть сведены к двум уравнениям второго порядка на z_1 и z_3 или, что то же самое, на y_+ и y_- :

$$y_+'' + \left(\mathcal{E}^2 - \frac{2H(r)^2}{r^2} - \frac{\sqrt{2}H(r)'}{r} \right) y_+ = 0, \quad (10)$$

$$y_-'' + \left(\mathcal{E}^2 - \frac{2H(r)^2}{r^2} + \frac{\sqrt{2}H(r)'}{r} \right) y_- = 0. \quad (11)$$

Теперь обратимся к вопросу о граничных условиях на решения этих дифференциальных уравнений. Требование того, чтобы спинор Ψ (8) был нормирован, приводит очевидным образом к условию квадратичной интегрируемости функций $y_+(r)$ и $y_-(r)$ на

Таблица 1

Для (10)	Для (11)
7.800	1.997
10.920	7.288
14.074	10.885

отрезке $(0, R)$. Можно показать, что только *одно* решение уравнения (10) имеет квадратично-интегрируемую асимптотику при $r \rightarrow R - 0$. То же можно показать и для уравнения (11). Эти решения автоматически удовлетворяют граничным условиям

$$y_{\pm}(R) = 0. \quad (12)$$

Подобную задачу можно решить численно. В результате такого исследования мы получим спектры $\mathcal{E}$ для (10), (11). Наинизшие уровни энергии $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n/R$ уравнений (10), (11) с функцией $H(r)$, определенной из уравнений (2), (4), даны в табл. 1. Энергетические уровни могут быть выражены через числа $\mathcal{E}_n$ следующим образом:

$$E_n(R) = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_n^2}{R^2} + m^2}. \quad (13)$$

Как видно, в результате такого исследования мы получаем спектры $\mathcal{E}$ для уравнений (10) и (11). Уравнение (10) дополним до системы уравнений

$$\begin{aligned} y_- &\equiv 0, \\ y_+'' + \left(\mathcal{E}^2 - \frac{2H(r)^2}{r^2} - \frac{\sqrt{2}H(r)'}{r} \right) y_+ &= 0, \\ x_+ &= -\frac{1}{2r\mathcal{E}} y_+, \\ x_- &= \frac{1}{\mathcal{E}} \left(y_+' - \left(\frac{1}{2r} + \frac{\sqrt{2}H(r)'}{r} \right) y_+ \right), \end{aligned}$$

а уравнение (11) – до системы уравнений

$$\begin{aligned} y_+ &\equiv 0, \\ y_-'' + \left(\mathcal{E}^2 - \frac{2H(r)^2}{r^2} + \frac{\sqrt{2}H(r)'}{r} \right) y_- &= 0, \\ x_- &= -\frac{1}{2r\mathcal{E}} y_-, \\ x_+ &= \frac{1}{\mathcal{E}} \left(y_-' - \left(\frac{1}{2r} - \frac{\sqrt{2}H(r)'}{r} \right) y_- \right). \end{aligned}$$

Суммируем теперь сведения о наиболее физически важном случае, когда кварк имеет наинизший полный спин $J = 1/2$. Как было показано, при определенной энергии имеется только *одно* квадратично-интегрируемое решение, что означает запертие кварка внутри сферы радиуса R . Действительно, уравнения, описывающие проникновение кварка сквозь потенциальный барьер в $r = R$, должны иметь две линейно независимые

квадратично-интегрируемые асимптотики при $r \rightarrow R - 0$, которые связаны с двумя возможными направлениями движения кварка (вовнутрь и наружу сферы). Тот факт, что, для того чтобы запереть кварк внутри сферы в наиболее важном с физической точки зрения случае $J = 1/2$, нам не понадобилось никаких дополнительных характерных для модели мешков феноменологических условий [2], кажется весьма важной привлекательной особенностью обсуждаемой модели. Действительно, оказалось возможным обойтись условием нормируемости вектора состояния.

Рассмотрим случай $J \geq 3/2$. Можно показать, что имеются четыре линейно независимые квадратично-интегрируемые асимптотики решений уравнений (9) при $r \rightarrow R - 0$. Две из них исчезают при $r = R$, в то время как две другие асимптотики для некоторых компонент обращаются в константы:

$$\begin{pmatrix} B_1^+ \\ B_1^- \\ D_1^+ \\ D_1^- \\ C_1^- \\ C_1^+ \end{pmatrix} \xrightarrow{r \rightarrow R} A_1 \begin{pmatrix} J - \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J + \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} B_1^+ \\ B_1^- \\ D_1^+ \\ D_1^- \\ C_1^- \\ C_1^+ \end{pmatrix} \xrightarrow{r \rightarrow R} A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ J + \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + O\left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad (15)$$

где A_1, A_2 – константы.

Это означает, что кварки с $J \geq 3/2$ не удерживаются внутри сферы радиуса $r = R$ только условием нормировки. В частности, нормальная компонента тока $j_\nu = \bar{\psi}\gamma_\nu\psi$ на поверхности $r = R$ не исчезает:

$$n_\nu j^\nu|_{r=R} \sim A_1 A_2. \quad (16)$$

В этой ситуации обеспечить конфайнмент кварка с $J \geq 3/2$ можно только, используя дополнительные, типичные для других мешковых моделей, введенные “от руки” граничные условия на границе сферы радиуса $r = R$:

$$n_\nu j^\nu|_{r=R} = 0. \quad (17)$$

Очевидно, что уравнение (17) приведет к условию $A_1 A_2 = 0$ и, следовательно, либо $A_1 = 0$, либо $A_2 = 0$. Другими словами, мы можем исключить либо асимптотику (14), либо (15). Выберем условие $A_1 = 0$.

Результаты вычислений нижних собственных значений $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n/R$ системы уравнений (9) с граничным условием $A_1 = 0$ представлены в табл. 2.

Таблица 2

$J = 3/2$	$J = 5/2$
4.165	5.151
6.977	8.518
7.949	8.863

4. СПЕКТР МАСС АДРОНОВ

Рассмотрим функцию распределения

$$Z = \text{tr } e^{-iHT},$$

где H – гамильтониан КХД. Функция распределения может быть представлена через функциональный интеграл как

$$Z = \int DA D\bar{\Psi} D\Psi \exp \left\{ i \int_0^T dt \int d^3x (L_{\text{YM}}(A) + L_{\text{ферм}}(\bar{\Psi}, \Psi, A)) \right\}. \quad (18)$$

Предположим, что основной вклад в (18) вносят траектории, находящиеся вблизи классического решения A_{cl} уравнений Янга–Миллса, определенных уравнениями (2), (4) и (6). Используя метод стационарной фазы, в нулевом приближении получим

$$Z = \int_{\text{нулевые моды}} \exp \{ -iE_{\text{YM}}(R)T \} \prod_q \det \left[\gamma^0 \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma} \vec{\nabla}(A_{\text{cl}}) - m_q \right) \right]_{\text{АПГУ}}, \quad (19)$$

где АПГУ – “антипериодические граничные условия” и $E_{\text{YM}}(R)$ – классическая энергия полей A_{cl} . Детерминант в (19) может быть вычислен с помощью положительных собственных значений $E_s(R, m_q)$ (определенных из уравнения (13)) гамильтониана

$$i\gamma^0 \vec{\gamma} \vec{\nabla}(A_{\text{cl}}) - \gamma^0 m_q,$$

которые уже вычислены в разделе 3 (см, например, [34]). Подставим результат в (19) и получим

$$Z = \sum_{1 \leq k_s \leq n_s} \int_{\text{нулевые моды}} \exp \left\{ -i \left(E_{\text{YM}}(R) + \sum_q \sum_s k_s E_s(R, m_q) \right) T \right\}, \quad (20)$$

где $n_s = 4(2J + 1)$ – кратность вырождения уровней E_s . (Напомним, что вырождение E_s за счет J равно $2(2J + 1)$, фактор 2 связан с существованием антикварка.)

В силу того что мы рассматриваем сферически-симметричные конфигурации, нетривиальное интегрирование в (20) сведется к интегрированию по R . Теперь, снова используя метод стационарной фазы, получим

$$Z \sim \sum_{1 \leq k_s \leq n_s} \exp \left\{ -i \left(E_{\text{YM}}(R_0) + \sum_q \sum_s k_s E_s(R_0, m_q) \right) T \right\}, \quad (21)$$

Таблица 3

Параметры	Масса кварков, МэВ
m_u	89.92
m_s	359.1
m_c	1432
m_b	4893

где R_0 определяется из уравнения

$$\left. \frac{\partial}{\partial R} \left[E_{\text{YM}}(R) + \sum_q \sum_s k_s E_s(R, m_q) \right] \right|_{R=R_0} = 0. \quad (22)$$

Таким образом, масса адронного состояния определяется формулой

$$M^{\text{теор}} = E_{\text{YM}}(R_0) + \sum_{\text{кварки}} E(R_0, m_q). \quad (23)$$

Собственная энергия “мешка” $E_{\text{YM}}(R)$ расходится благодаря сингулярности A_{cl} в $r = R$. Однако оказывается возможным регуляризовать величину $E_{\text{YM}}(R)$ [35]. После проведения процедуры перенормировки эта величина вносит в массовую формулу (23) конечный полиномиальный вклад

$$E_{\text{YM}}(R) = BR^3, \quad (24)$$

где B – некая размерная константа. Хорошо известной проблемой, возникающей при описании адронных состояний исходя из КХД, является отсутствие в масштабно-инвариантной теории Янга–Миллса характерной размерной величины. Однако в нашей модели такая проблема снимается. Константа B – неопределенный параметр нашей модели, диктует характерные масштабы масс адронов и выбирается из соображений наилучшей согласованности предсказаний нашей модели и эксперимента.

Параметры B , $m_u = m_d$, m_s , m_c и m_b определяются из минимизации величины

$$\Delta(B, m_u, m_s, m_c, m_b) = \sum_h [(M_h^{\text{эксп}} - M_h^{\text{теор}})/M_h^{\text{эксп}}]^2,$$

где $M_h^{\text{эксп}}$ – экспериментальная масса адрона [36], $M_h^{\text{теор}}$ определяется уравнением (23). Результаты вычисления адронных масс, связанных с основным состоянием кварка, представлены в табл. 3 и 4. Параметр B равен 3.338×10^8 (МэВ)⁴.

Для определения константы B и масс кварков мы использовали массы $p(n)$, Ξ , Λ_c , Λ_b^0 , $D_c^\pm$, $D_{sc}^\pm$, B и η_c , т.к. они определены экспериментально с наибольшей точностью.

В табл. 4 массы адронов определяются формулами (22)–(24); $1S_u - 1S_u - 1S_s$ понимается как конфигурация, в которой имеются два u -кварка и один s -кварк в основном состоянии с $J = 1/2$ и т. д.; $1P_u$ и $1P_s$ – основные состояния u - и s -кварков с $J = 3/2$. Заметим, что конфигурации $1S_u - 1S_u - 1S_u$ и $1S_s - 1S_s - 1S_s$ запрещены принципом Паули, поэтому конфигурации $1S_u - 1S_u - 1P_u$ и $1S_s - 1S_s - 1P_s$ являются настоящими основными состояниями для Δ^{++} и Ω^- . Значение спина в обоих случаях по этой причине равно $3/2$.

Таблица 4

Частица	Кварковая конфигурация	Спин	Масса, МэВ	
			эксп.	теор.
$p(n)$	$1S_u - 1S_u - 1S_d$	1/2	940	957
Λ	$1S_u - 1S_u - 1S_s$	1/2	1116	1137
Σ		1/2	1.189	
Ξ	$1S_u - 1S_s - 1S_s$	1/2	1320	1311
Λ_c	$1S_u - 1S_u - 1S_c$	1/2	2285	2156
Σ_c		1/2	2455	
Λ_b	$1S_u - 1S_u - 1S_b$	1/2	5641	5601
Ξ_c	$1S_u - 1S_s - 1S_c$	1/2	2465	2326
$D_c^\pm$	$1S_u - 1S_c$	0	1869	1874
D_s	$1S_s - 1S_c$	0	1968	2029
B	$1S_u - 1S_b$	0	5278	5313
η_c	$1S_c - 1S_c$	0	2979	3011
ρ	$1S_u - 1S_u$	1	769	701
K^*	$1S_u - 1S_s$	1	892	869
ϕ	$1S_s - 1S_s$	1	1019	1032
Υ	$1S_b - 1S_b$	1	9460	9856
Δ^{++}	$1S_u - 1S_u - 1P_u$	3/2	1232	1191
Ω^-	$1S_s - 1S_s - 1P_s$	3/2	1672	1671
Ω_c^0	$1S_s - 1S_s - 1S_c$	1/2	2700(?)	2491

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наша модель дает достаточно хорошее описание масс основных состояний адронов, исключая только легкие псевдоскалярные мезоны. Как мы уже упоминали во введении, описание легких псевдоскалярных мезонов не может быть получено без учета нарушения киральной симметрии, которая оказалась за рамками наших исследований.

Точность 3–7 % является максимально возможной точностью для всех составных кварковых моделей, в которых не учтено взаимодействие между кварками. В таких моделях, например, Λ - и Σ -частицы должны иметь одинаковую массу. На самом деле разница в массе у этих двух частиц составляет приблизительно 7%. Таким образом, эти 7%, по всей вероятности, являются максимальными из того, чего можно достичь в любой простейшей составной кварковой модели.

В нашей модели мы столкнулись с некоторыми трудностями. В частности, мы были вынуждены наложить “от руки” граничные условия (8) для кварков с $J \geq 3/2$. Возможно, эти трудности можно преодолеть, если вместо решения (6) рассмотреть более общее решение $SU(3)$ -уравнений Янга–Миллса. На самом деле, в данной работе мы имели дело с $SU(2)$ -КХД с кварками в присоединенном представлении. Однако калибровочная группа $SU(3)$ гораздо шире, чем группа $SU(2)$. Вполне вероятно, что многие возникшие трудности связаны именно с этим обстоятельством.

В ближайшем будущем планируется исследовать сингулярные решения $SU(3)$ -уравнений Янга–Миллса, которые не могут быть сведены ни к каким решениям $SU(2)$ -уравнений Янга–Миллса, а также – теорию возмущений в окрестности таких сингулярных

решений. Результаты, полученные в данной статье, показывают, что существует хороший шанс получить удовлетворительное описание спектра масс и других характеристик в рамках данного подхода.

Авторы благодарны Д. Синглтону за полезные комментарии.

Список литературы

- [1] *P. N. Bogoliubov*. Ann. Inst. Henri Poincaré. 1967. V. 8. P. 163.
- [2] *A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, V. F. Weisskopf*. Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 3471.
- [3] *A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, V. F. Weisskopf*. Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2599.
- [4] *W. A. Bardeen, M. S. Chanowitz, S. D. Drell, M. Weinstein, T.-M. Yan*. Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 1094.
- [5] *P. Hasenfratz, J. Kuti*. Phys. Rep. C. 1978. V. 40. P. 75.
- [6] *J. Baacke, G. Kasperidus*. Z. Phys. C. 1980. V. 5. P. 259.
- [7] *П. Н. Боголюбов, А. Е. Дорохов*. ЭЧАЯ. 1987. Т. 18. С. 917.
- [8] *А. Е. Дорохов, Ю. А. Зубов, Н. И. Кочелев*. ЭЧАЯ. 1992. Т. 23. С. 522.
- [9] *T. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson, J. Kiskis*. Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 2060.
- [10] *K. Johnson*. Acta Phys. Pol. B. 1975. V. 6. P. 865.
- [11] *J. F. Donoghue, K. Johnson*. Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 1975.
- [12] *J. Baacke, Yu. Igarashi, G. Kasperidus*. Z. Phys. C. 1981. V. 8. P. 257.
- [13] *J. Baacke, Yu. Igarashi, G. Kasperidus*. Z. Phys. C. 1981. V. 9. P. 203.
- [14] *J. Baacke, Yu. Igarashi, G. Kasperidus*. Z. Phys. C. 1982. V. 13. P. 131.
- [15] *M. Betz, R. Goldflam*. Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 2848.
- [16] *M. Sadzikowski*. Z. Phys. C. 1994. V. 64. P. 427.
- [17] *J. M. Swank, L. J. Swank, T. Dereli*. Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 1096.
- [18] *A. P. Protogenov*. Phys. Lett. B. 1977. V. 67. P. 62.
- [19] *A. P. Protogenov*. Phys. Lett. B. 1979. V. 87. P. 80.
- [20] *Ф. А. Лунев*. ЯФ. 1993. Т. 56. С. 238.
- [21] *Ф. А. Лунев*. ТМФ. 1993. V. 94. P. 66.
- [22] *F. A. Lunev*. Phys. Lett. B. 1993. V. 311. P. 273.
- [23] *F. A. Lunev*. Phys. Lett. B. 1992. V. 295. P. 99.
- [24] *K. Johnson*. The Yang–Mills group state. In: QCD: 20 Years Later. Eds P. M. Zerwas, H. A. Kastrup. Singapore: World Scientific, 1992. P. 795.
- [25] *M. Bauer, D. Z. Freedman, P. E. Haagensen*. Nucl. Phys. B. 1994. V. 428. P. 147.
- [26] *F. A. Lunev*. J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 5351.
- [27] *D. Singleton*. Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 5911.
- [28] *S. Mahajan, P. Valanju*. Phys. Rev. D. 1987. V. 36. P. 1500.
- [29] *S. Mahajan, P. Valanju*. Phys. Rev. D. 1987. V. 36. P. 2543.
- [30] *Yu. N. Obukhov*. Analogue of black string in the Yang–Mills gauge theory. hep-th/9608011.
- [31] *T. T. Wu, C. N. Yang*. Some solutions of the classical isotopic gauge field equations. In: Properties of matter under unusual condition. Eds H. Mark, S. Fernback. New York: Interscience, 1969. P. 349.
- [32] *F. Cooper, A. Khare, U. Sukthme*. Phys. Rep. 1995. V. 251. P. 267.
- [33] *R. Jackiw, C. Rebbi*. Phys. Rev. D. 1976. V. 13. P. 3398.
- [34] *Р. Раджараман*. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
- [35] *O. V. Pavlovsky*. Regularization of self-energy of the quark bag. Talk given on the 10th International Seminar on High Energy Physics “Quarks’98”. М.: INR (in print).
- [36] *Particle data group*. Phys. Rev. D. 1994. V. 50. № 3(1).

Поступила в редакцию 14.IV.1998 г.