Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Шевченко, Тетрадно-калибровочная теория гравитации, *ТМФ*, 2018, том 194, номер 3, 522–546

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 11:12:37

© 2018 г.

Л. П. Шевченко*

ТЕТРАДНО-КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Представлена тетрадно-калибровочная теория гравитации в четырехмерном пространстве-времени Римана–Картана, основанная на локальной группе Лоренца. Использование тетрадного формализма позволяет избежать проблем, связанных с некомпактностью группы, и включить в теорию возможность выбрать произвольным образом в каждой точке пространства-времени локально-инерциальную систему отсчета. Исходными величинами теории являются тетрадные и калибровочные поля, через которые выражаются метрика, связность, кручение и тензор кривизны. Калибровочные поля теории взаимодействуют только с гравитационным полем, описываемым тетрадными полями. Уравнения теории решаются как для системы тел, подобной Солнечной системе, так и в общем случае статического центрально-симметричного поля. Найденная при этом метрика совпадает с метрикой, полученной в тех же приближениях в общей теории относительности. Однако интерпретация гравитации совершенно иная – здесь за гравитацию отвечает кручение пространства-времени, а кривизны нет, так как тензор кривизны является линейной комбинацией тензоров калибровочных полей, которые в случае чистой гравитации отсутствуют. Калибровочные поля теории, определяющие наряду с тетрадными полями структуру пространства-времени, не взаимодействуют непосредственно с обычной материей и интерпретируются как поля, описывающие темную энергию и темную материю.

Ключевые слова: тетрадный формализм, кручение, калибровочные поля, гравитация, темная материя, темная энергия.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9240>

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы строим тетрадно-калибровочную теорию гравитации (ТКТГ) как калибровочную теорию гравитационного и калибровочного полей в четырехмерном пространстве-времени Римана–Картана U_4 [1], и этот подход принципиально отличается от общей теории относительности (ОТО) как используемым математическим аппаратом, так и физической интерпретацией. Метрика определяется, как в работе [2], $d\tau^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$, с сигнатурой $(+, -, -, -)$. Индексы $\mu, \nu, \lambda, \dots$

*Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, Москва, Россия. E-mail: 2012leonid@mail.ru

из середины греческого алфавита используются в качестве координатных индексов произвольной системы отсчета, где есть гравитация (общекоординатные индексы), и пробегает значения 0, 1, 2, 3. Интервал $d\tau$ становится инвариантом при параллельном переносе и, следовательно, полезным понятием в обычной физике пространства-времени при условии, что метрика $g_{\mu\nu}(x)$ ковариантно постоянна (это означает, что тензор неметричности равен нулю [1]). При построении теорий гравитации в общем аффинно-метрическом пространстве тетрадный формализм может включать в себя отличный от нуля тензор неметричности (см. книгу [3], где также имеется обширный список литературы, позволяющий представить историю использования тетрадного формализма и его применение в различных подходах к развитию современной теории гравитации). ТКТГ основывается на локальной группе Лоренца, которая, несмотря на ее некомпактность, не создает, как будет показано далее, трудностей [4] для построения калибровочной теории. В пространстве U_4 несимметричная связность имеет вид

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = G_{\mu\nu}^{\lambda} + S_{\mu\nu}^{\lambda} + S_{\mu\nu}^{\lambda} + S_{\nu\mu}^{\lambda},$$

где $G_{\mu\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\rho}(\partial_{\nu}g_{\mu\rho} + \partial_{\mu}g_{\nu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu})/2$ – чисто метрическое слагаемое (символы Кристоффеля) [2]; антисимметричный по двум первым индексам тензор кручения $S_{\mu\nu}^{\lambda}$ есть не зависящая от метрики часть связности [1], а третье и четвертое слагаемые получаются из тензора кручения посредством поднятия и опускания индексов с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$, ковариантно постоянного в этой связности. Последние три члена связности образуют антисимметричный по двум последним индексам тензор конторсии $K_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv -(S_{\mu\nu}^{\lambda} + S_{\mu\nu}^{\lambda} + S_{\nu\mu}^{\lambda})$ [1].

Структура настоящей статьи такова. В разделе 2 вводятся основные соглашения и обозначения, связанные с группой Лоренца [5], [6], тетрадным формализмом в теории гравитации [7] и калибровочными полями в тетрадном формализме. В разделе 3 строится лагранжиан системы тетрадных и калибровочных полей, обеспечивающий ограниченность снизу энергии малых возмущений, и из принципа минимального действия выводится система уравнений тетрадных и калибровочных полей в присутствии точечных частиц. Процедура постньютоновского разложения применительно к ТКТГ рассматривается в разделе 4. В разделе 5 решаются уравнения ТКТГ в ньютоновском и первом постньютоновском приближениях. В разделе 6 в результате решения уравнений ТКТГ находится метрика статического изотропного гравитационного поля. Краткие выводы и некоторые перспективы ТКТГ приводятся в разделе 7.

2. ОСНОВНЫЕ СОГЛАШЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

2.1. Основные величины и соотношения, связанные с группой Лоренца. Преобразования группы Лоренца в пространстве Минковского определяются соотношением $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, где $\Lambda = (\Lambda_{\alpha\beta})$ – матрица Лоренца, $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ – метрика Минковского с сигнатурой $(+, -, -, -)$.

Введем единое обозначение ${}_4t_a$ для всех шести генераторов группы, где индекс $a = (a', a'')$ пробегает шесть значений (индексы a' и a'' пробегает значения 1, 2, 3): $({}_4t_{a'})^{\alpha}_{\beta} = -i\delta_i^{\alpha}\delta_j^{\beta}\varepsilon_{a'ij}$ – матричные элементы генератора пространственного поворота вокруг оси с номером a' , $\varepsilon_{a'ij}$ – совершенно антисимметричный единичный

псевдотензор третьего ранга ($\varepsilon_{123} = 1$), а величины $({}_4t_{a''})^\alpha_\beta = i(\delta_0^\alpha \delta_{a''}^\beta + \delta_{a''}^\alpha \delta_0^\beta)$ суть матричные элементы генератора буста в направлении пространственной оси с номером a'' . Индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ из начала греческого алфавита используются в качестве индексов локально-инерциальной системы отсчета, где гравитации нет (лоренцевские индексы), и пробегает значения 0, 1, 2, 3. В этих обозначениях коммутационные соотношения для ${}_4t_a$ имеют вид $[{}_4t_a, {}_4t_b] = iC_{ab}^c {}_4t_c$, где отличны от нуля лишь следующие групповые константы: $C_{a'b'}^{c'} = \varepsilon_{c'a'b'}$, $C_{a''b''}^{c'} = -\varepsilon_{c'a''b''}$, $C_{a'b''}^{c''} = \varepsilon_{c''a'b''}$. Мы будем иметь дело с вещественными пространствами, поэтому вместо мнимых матриц ${}_4t_a$ будем использовать вещественные матрицы $\tau_a = -i{}_4t_a$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям $[\tau_a, \tau_b] = C_{ab}^c \tau_c$. Опуская верхний индекс в $({}_4t_a)^\alpha_\beta$ с помощью метрики $\eta_{\alpha\beta}$, находим, что $(\tau_a)_{\alpha\beta} = -(\tau_a)_{\beta\alpha}$. Группа Лоренца связана со своей алгеброй Ли посредством экспоненциального отображения $\Lambda(\theta) = \exp(\tau_a \theta^a)$.

Генераторы ${}_6t_a$ присоединенного представления [5] группы Лоренца чисто мнимые, а их матричные элементы имеют вид $({}_6t_a)^b_c = iC_{ac}^b$. Далее мы будем использовать вещественные величины $\chi_a = -i{}_6t_a$ с матричными элементами $(\chi_a)^b_c = C_{ac}^b$, удовлетворяющие тем же коммутационным соотношениям $[\chi_a, \chi_b] = C_{ab}^c \chi_c$, что и τ_a . Метрика ${}_6\eta = ({}_6\eta_{ab})$ пространства присоединенного представления группы Лоренца выражается через групповые константы:

$$\begin{aligned} {}_6\eta_{ab} &= {}_6\eta^{ab} = -\frac{1}{4} \text{Tr}(\chi_a \chi_b) = \frac{1}{4} C_{ad}^c C_{bc}^d, \\ {}_6\eta_{a'b'} &= \delta_{a'b'}, \quad {}_6\eta_{a''b''} = -\delta_{a''b''}, \quad {}_6\eta_{a'b''} = {}_6\eta_{a''b'} = 0. \end{aligned}$$

Генераторы χ_a удовлетворяют соотношению $\chi_a^T {}_6\eta = -{}_6\eta \chi_a$, откуда следует равенство ${}_6\Lambda^T {}_6\eta {}_6\Lambda = {}_6\eta$, которому удовлетворяет матрица ${}_6\Lambda$ присоединенного представления. В присоединенном представлении имеет место стандартное экспоненциальное отображение между группой Лоренца и ее алгеброй Ли ${}_6\Lambda(\theta) = \exp(\chi_a \theta^a)$. Метрика пространства присоединенного представления также выражается через генераторы τ_a группы Лоренца как ${}_6\eta_{ab} = -\text{Tr}(\tau_a \tau_b)/2 = (\tau_a)^\alpha_\beta (\tau_b)^\beta_\alpha/2$.

2.2. Тетрадный формализм в теории гравитации. Использование тетрадного формализма в теории гравитации неизбежно вследствие необходимости описывать в этой теории спинорные поля. Согласно принципу локальной эквивалентности гравитации и сил инерции в каждой точке пространства-времени можно ввести локально-инерциальную систему отсчета с базисными векторами $e^\alpha(x)$, имеющими в системе отсчета с координатами x^μ компоненты $e^\alpha_\mu(x)$, так что метрику можно представить в виде $g_{\mu\nu}(x) = e^\alpha_\mu(x) e^\beta_\nu(x) \eta_{\alpha\beta}$. С равным основанием $e^\alpha_\mu(x)$ можно рассматривать как компоненты четверки базисных координатных векторов $e_\mu(x)$ относительно базиса $e^\alpha(x)$. Индексы у $e^\alpha_\mu(x)$ можно поднимать и опускать с помощью метрик $\eta_{\alpha\beta}$ и $g_{\mu\nu}(x)$ соответственно, так что каждый из двух индексов может иметь верхнее или нижнее расположение, важно то, что левый индекс – это лоренцевский индекс локально-инерциальной системы отсчета, а правый индекс является общекоординатным.

При построении полевой теории существенным является выбор динамических переменных, описывающих это поле. Так, при выборе метрики в качестве динамической переменной, описывающей гравитацию, принцип наименьшего действия

приводит к ОТО, не являющейся калибровочной теорией. Провозглашаемая ОТО возможность выбрать произвольным образом в каждой точке пространства-времени локально-инерциальную систему отсчета означает по существу наличие симметрии, описываемой локальной группой Лоренца, но эта симметрия остается за пределами математической формулировки ОТО. ОТО признает наличие такой симметрии, но описать ее не может. Причина состоит в неадекватном выборе динамической переменной, не способной учесть указанную симметрию. Действительно, метрика инвариантна относительно локальных преобразований Лоренца.

При выборе тетрады в качестве динамической переменной, описывающей гравитационное поле, при построении лагранжиана приходится использовать производные компонент тетрады, что нарушает ковариантность теории, для восстановления которой требуется ввести калибровочные поля. Следует отметить, что группа Лоренца является некомпактной, но это, однако, не мешает, как показано ниже, построению физически приемлемой калибровочной теории.

2.3. Тетрадный формализм и калибровочные поля. Лагранжианы должны содержать наряду с полями $e^\alpha_\nu(x)$ их производные $\partial_\mu e^\alpha_\nu(x)$ по координатам. При инфинитезимальных локальных преобразованиях Лоренца тетрада $e^\alpha_\nu(x)$ преобразуется по закону $e^\alpha_\nu(x) \rightarrow e'^\alpha_\nu(x) = e^\alpha_\nu(x) + (\tau_a)^\alpha_\beta \theta^a(x) e^\beta_\nu(x)$. При этом закон преобразования производных $\partial_\mu e^\alpha_\nu(x)$ содержит члены с производными $\partial_\mu \theta^a(x)$, препятствующие построению инвариантных лагранжианов. Для избавления от таких производных используется хорошо известный [6] механизм введения калибровочных полей посредством замены $\partial_\mu e^\alpha_\nu(x)$ калибровочной ковариантной производной тетрады

$$[D_\mu(B)e_\nu(x)]^\alpha \equiv [D_\mu(B)]^\alpha_\beta e^\beta_\nu(x) \equiv [\delta^\alpha_\beta \partial_\mu + (\tau_a)^\alpha_\beta B^a_\mu(x)] e^\beta_\nu(x), \quad (1)$$

где $B^a_\mu(x)$ – шесть координатных ковариантных векторных полей (калибровочных полей), преобразующихся при локальных преобразованиях Лоренца по закону

$$B^a_\mu(x) \rightarrow B'^a_\mu(x) = B^a_\mu(x) + C^a_{cb} B^b_\mu(x) \theta^c(x) - \partial_\mu \theta^a(x). \quad (2)$$

Закон преобразования калибровочной ковариантной производной тетрады при инфинитезимальных локальных преобразованиях Лоренца

$$[D_\mu(B)e_\nu(x)]^\alpha \rightarrow [D_\mu(B')e'_\nu(x)]^\alpha = [D_\mu(B)e_\nu(x)]^\alpha + (\tau_a)^\alpha_\beta \theta^a(x) [D_\mu(B)e_\nu(x)]^\beta \quad (3)$$

имеет тот же вид, что и для самой тетрады, как и положено лоренцевскому вектору.

Введем свертку производной $[D_\mu(B)e_\nu(x)]^\alpha$ с $e^\lambda_\alpha(x)$ по лоренцевскому индексу α :

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) \equiv e^\lambda_\alpha(x) [D_\mu(B)e_\nu(x)]^\alpha = e^\lambda_\alpha(x) \partial_\mu e^\alpha_\nu(x) + (\tau_a)^\alpha_\beta e^\lambda_\alpha(x) e^\beta_\nu(x) B^a_\mu(x). \quad (4)$$

Из-за наличия производной первое слагаемое в правой части не является тензорным, вследствие чего величина $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$ ведет себя при замене координат, как связность пространства-времени, и мы будем отождествлять ее со связностью. Ковариантная производная тетрады в этой связности (далее опускаем явное указание на зависимость величин от координат) линейна по калибровочным полям:

$$e^\alpha_{\mu;\lambda} = \partial_\lambda e^\alpha_\mu - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} e^\alpha_\nu = -(\tau_a)^\alpha_\beta e^\beta_\mu B^a_\lambda. \quad (5)$$

Отсюда следует, что $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$, поэтому метрика согласована со связностью (4). Таким образом, четырехмерное пространство-время Римана–Картана U_4 , полностью определяемое связностью $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ и метрикой $g_{\mu\nu}$, может быть описано в терминах тетрадных полей e_μ^α и калибровочных полей B_μ^a . При этом на компоненты полей следует наложить шесть независимых условий, имеющих вид тензорного равенства, чтобы устранить шестипараметрическую избыточность числа независимых компонент полей e_μ^α и B_μ^a по сравнению с числом независимых компонент метрики $g_{\mu\nu}$ и связности $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ (мы имеем 74 компоненты метрики $g_{\mu\nu}$ и связности $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, подчиняющиеся 40 условиям $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$, и 40 компонент e_μ^α и B_μ^a).

Связность (4) можно представить в виде суммы $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda + S_{\mu\nu}^\lambda$, где симметричное по нижним индексам слагаемое $\Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda \equiv (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda)/2$ не является тензорным, а антисимметричное слагаемое

$$S_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) = \frac{1}{2}e_\alpha^\lambda[(\partial_\mu e_\nu^\alpha - \partial_\nu e_\mu^\alpha) + (\tau_a)^\alpha_\beta(e_\nu^\beta B_\mu^a - e_\mu^\beta B_\nu^a)] \quad (6)$$

представляет собой тензор кручения, отличный от нуля даже при $B_\mu^a = 0$.

Определяемый обычным образом [1], [7] через связность (4) тензор кривизны в переменных e_μ^α и B_μ^a имеет вид

$$R_{\nu\lambda\rho}^\mu \equiv \partial_\lambda \Gamma_{\rho\nu}^\mu - \partial_\rho \Gamma_{\lambda\nu}^\mu + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma = (\tau_a)_{\alpha\beta} e^{\alpha\mu} e_\nu^\beta F_{\lambda\rho}^a, \quad (7)$$

где введено следующее обозначение для шести тензоров калибровочных полей:

$$F_{\lambda\rho}^a \equiv \partial_\lambda B_\rho^a - \partial_\rho B_\lambda^a + C_{bc}^a B_\lambda^b B_\rho^c. \quad (8)$$

В отличие от калибровочных полей B_μ^a , координатный тензор $F_{\lambda\rho}^a$ является по индексу a вектором пространства присоединенного представления группы Лоренца, что легко проверить для случая инфинитезимального преобразования. Тензор $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ несимметричен по индексам первой пары и по индексам второй пары, но эти две пары индексов имеют совершенно разную природу: первая связана только с тетрадными полями, а вторая – только с тензором калибровочных полей, так что пространство U_4 может иметь кривизну лишь в присутствии калибровочных полей, тогда как кручение имеется и при их отсутствии. Вследствие различной природы первой и второй пар индексов тензора кручения тензор Риччи $R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$ асимметричен.

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ТЕТРАДНЫХ И КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ В ПРИСУТСТВИИ КЛАССИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

3.1. Инварианты. Построим лагранжиан системы тетрадных и калибровочных полей, используя все инварианты, которые можно образовать из тензоров кручения, кривизны и метрики. Из компонент $S_{\mu\nu}^\lambda$ и $g^{\mu\nu}$ можно построить три линейно независимых скаляра

$$S_1 = g^{\mu\nu} S_{\mu\rho}^\lambda S_{\nu\lambda}^\rho, \quad S_2 = g^{\mu\nu} S_{\mu\rho}^\lambda S_{\nu\lambda}^\rho, \quad S_3 = S_{\lambda}^\nu{}^\lambda S_{\nu\rho}^\rho$$

и два линейно независимых антисимметричных тензора второго ранга

$${}_1S_{\sigma\pi} = S_{\sigma\pi}^\lambda S_{\lambda\rho}^\rho, \quad {}_2S_{\sigma\pi} = (S_{\sigma}^\lambda{}_\pi - S_{\pi}^\lambda{}_\sigma) S_{\lambda\rho}^\rho.$$

Из компонент $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ и $g^{\mu\nu}$ можно построить три линейно независимых скаляра, выражающихся при учете (7) через $F_{\lambda\rho}^a$ и e_{μ}^{α} :

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2} R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho} = {}_6\eta_{ab} g^{\lambda\sigma} g^{\rho\pi} F_{\lambda\rho}^a F_{\sigma\pi}^b, \\ R_2 &= R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\lambda\rho\mu\nu} = (\tau_a)_{\alpha\beta} e^{\alpha\sigma} e^{\beta\pi} (\tau_b)_{\gamma\delta} e^{\gamma\lambda} e^{\delta\rho} F_{\lambda\rho}^a F_{\sigma\pi}^b, \\ R_3 &= R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\lambda\nu\rho} = -(\tau_a)_{\beta\alpha} (\tau_b)_{\delta}^{\alpha} e^{\delta\lambda} g^{\rho\pi} e^{\beta\sigma} F_{\lambda\rho}^a F_{\sigma\pi}^b. \end{aligned}$$

Используя тензор Риччи $R_{\mu\nu} = R_{(\mu\nu)} + R_{[\mu\nu]}$, где $R_{(\mu\nu)}$ – симметричная часть, а $R_{[\mu\nu]}$ – антисимметричная часть тензора $R_{\mu\nu}$, строим еще три скаляра:

$$\begin{aligned} R_4 &= R_{(\mu\nu)} R^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (\tau_a)_{\delta}^{\gamma} (\tau_b)_{\beta}^{\alpha} e_{\alpha}^{\sigma} e_{\gamma}^{\lambda} (\eta^{\beta\delta} g^{\pi\rho} + e^{\delta\pi} e^{\beta\rho}) F_{\lambda\rho}^a F_{\sigma\pi}^b, \\ R_5 &= R_{[\mu\nu]} R^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (\tau_a)_{\delta}^{\gamma} (\tau_b)_{\beta}^{\alpha} e_{\alpha}^{\sigma} e_{\gamma}^{\lambda} (\eta^{\beta\delta} g^{\pi\rho} - e^{\delta\pi} e^{\beta\rho}) F_{\lambda\rho}^a F_{\sigma\pi}^b, \\ R_6 &= R_{\mu}^{\mu} = R_{(\mu\nu)} g^{\mu\nu} = (\tau_a)_{\alpha\beta} e^{\alpha\lambda} e^{\beta\nu} F_{\lambda\nu}^a. \end{aligned}$$

Возведя в квадрат инвариант R_6 , находим последний инвариант $R_7 = R_6^2$. Этими семью инвариантами R_k исчерпываются все инварианты, имеющие порядок по калибровочным полям не выше четырех.

В случае компактной группы симметрии для построения лагранжиана калибровочных полей имеется единственный инвариант, аналогичный R_1 [4], но в этом случае метрика пространства присоединенного представления положительно определена, что не приводит ни к каким проблемам. В случае рассматриваемой нами некомпактной группы симметрии входящая в R_1 метрика ${}_6\eta_{ab}$ пространства присоединенного представления группы не является знакоопределенной, что приводит в конечном итоге к неограниченности снизу энергии малых возмущений калибровочных полей. Это означает по существу, что построенный лишь из одного инварианта R_1 лагранжиан не согласуется с принципом минимальности действия.

Итак, нам осталось составить линейную комбинацию приведенных инвариантов и подобрать при этих инвариантах числовые коэффициенты так, чтобы удовлетворить принципу минимальности действия, т.е. требованию, чтобы энергия малых возмущений калибровочных полей была ограничена снизу.

3.2. Предварительный вид лагранжиана. Прежде всего следует отметить безмассовость тетрадных и калибровочных полей. Невозможно образовать из e_{μ}^{α} массовый член, т.е. член, содержащий компоненты поля без производных, так как единственная свертка, которую можно построить только из компонент e_{μ}^{α} , есть число $e_{\mu}^{\alpha} e_{\alpha}^{\mu} = 4$. Калибровочные поля B_{μ}^a по групповому индексу a не являются векторами пространства присоединенного представления, поэтому только из этих компонент B_{μ}^a невозможно построить квадратичный член, который выполнял бы роль массового члена.

В качестве лагранжиана ТКГГ выбираем линейную комбинацию приведенных выше инвариантов, включив в нее связи:

$$L_{\text{ГЧЛ}}(e, \partial e, B, \partial B, \lambda) \equiv L_{\text{Г}}(e, \partial e, B) + L_{\text{С}}(e, B, \partial B) + \frac{c^3}{2\pi G} \lambda^{\sigma\pi} \Phi_{\sigma\pi}(e, \partial e, B, \partial B), \quad (9)$$

где

$$L_G(e, \partial e, B) \equiv \frac{c^3}{2\pi G} \sum_{k=1}^3 B_k S_k,$$

$$L_C(e, B, \partial B) \equiv -\frac{\hbar}{4} \left(\sum_{k=1}^5 A_k R_k + A_7 R_7 \right) + A_6 \frac{c^3}{2\pi G} R_6.$$

В первом из этих определений B_k – неизвестные числовые коэффициенты, размерный множитель образован из скорости света c и гравитационной постоянной G ; во втором выражении A_k – неизвестные числовые коэффициенты, в качестве размерного множителя использована постоянная Планка $\hbar$, а размерный множитель при R_6 выбран таким же, как в L_G , в соответствии с тем, что размерности R_6 и S_k совпадают (тетрадные поля безразмерны, а калибровочные поля имеют размерность обратной длины). Третье слагаемое лагранжиана (9) является линейной комбинацией левых частей уравнений связей $\Phi_{\sigma\pi} = 0$, где мы берем $\Phi_{\sigma\pi} \equiv \alpha_1 {}_1S_{\sigma\pi} + \alpha_2 {}_2S_{\sigma\pi} + \alpha_3 R_{[\sigma\pi]}$, т. е. линейную комбинацию имеющихся в нашем распоряжении антисимметричных тензоров ${}_kS_{\sigma\pi}$ и $R_{[\sigma\pi]}$; здесь α_k – числовые множители. Входящие в третье слагаемое в (9) множители Лагранжа $\lambda^{\sigma\pi}$ являются компонентами антисимметричного тензора. Множитель 2π в знаменателях присутствует для согласования с ньютоновской теорией.

Видно, что если калибровочные поля отсутствуют, то остаются лишь первое и третье слагаемые в (9), содержащие как сами тетрадные поля, так и их производные по координатам пространства-времени, в итоге лагранжиан описывает только тетрадные поля (под тетрадными полями подразумевается разность $e^\alpha_\mu - \delta^\alpha_\mu$), которые следует отождествить с чистой гравитацией. Таким образом, в ТКТГ ответственным за гравитационное взаимодействие является кручение, а не кривизна, отсутствующая, если отсутствуют калибровочные поля (см. соотношения (7), (8)). Калибровочные поля ТКТГ взаимодействуют только с тетрадными полями, т. е. только с гравитацией. С обычной материей (классические частицы, поля типа электромагнитного и спинорного) непосредственно взаимодействует только гравитация. Это следует из того, что в присутствии гравитации все координатные поля должны быть превращены в скаляры путем свертки с компонентами тетрады, а производные координатно-скалярных полей выражаются через тетрадные поля и их производные [7].

Источником гравитации является тензор энергии-импульса материального объекта [7]. Выберем в качестве такого простейшего материального объекта систему из N свободных классических точечных частиц с массами m_n ($n = \overline{1, N}$), движущихся по траекториям $x_n^\mu(x^0)$. Тензор энергии-импульса такой системы симметричен и имеет вид

$$T^{\mu\nu}(x) = g^{-1/2}(x) \sum_{n=1}^N m_n c^2 \frac{dx_n^\mu(x^0)}{dx^0} \frac{dx_n^\nu(x^0)}{dx^0} \left(\frac{d\tau_n}{dx^0} \right)^{-1} \delta^4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(x^0)). \quad (10)$$

3.3. Нахождение числовых коэффициентов лагранжиана. Чтобы не делать размер статьи неприемлемо большим, мы излагаем методику нахождения числовых коэффициентов лагранжиана предельно кратко.

В соответствии с принципом минимальности действия получаем систему уравнений ТКТГ, состоящую из уравнений тетрадных полей, уравнений калибровочных

полей, уравнений связей и уравнений движения частиц. Для нахождения числовых коэффициентов в выражении для L_G рассмотрим случай свободного слабого гравитационного поля, создаваемого покоящейся точечной массой m . Естественно предположить, что в этом случае тетрада e^α_μ имеет вид $e^\alpha_\mu = \delta^\alpha_\mu + f^\alpha_\mu$, где $|f^\alpha_\mu| \ll 1$. Ограничимся при записи системы уравнений членами первого порядка по малым величинам $|f^\alpha_\mu|$. Тогда уравнения связей обращаются в тождества $0 \equiv 0$, что означает отсутствие в этом приближении множителей Лагранжа. Требование получить ньютоновский результат приводит согласно уравнениям тетрадных полей к ограничениям $f^i_j = -\delta^i_j f^0_0$, $2B_1 + B_2 + B_3 = 0$, $B_3 = -1$, $|f^0_i| \ll |f^0_0|$ и $|f^i_0| \ll |f^0_0|$. Отсутствие калибровочных полей не означает автоматического обращения в тождества остальных уравнений калибровочных полей. Эти уравнения исчезают при выполнении условий $A_6 = -1/4$ и $\alpha_3 = 0$. В результате мы имеем единственное отличное от тождества уравнение, согласно которому $f^0_0(r) = -r_0/r$, где $r_0 = Gm/c^2$, так что $g_{00}(r) = 1 + 2f^0_0(r)$ есть искомое ньютоновское приближение метрики.

Естественно, этот результат получается и при использовании постньютоновского приближения [7], позволяющего найти поправки к ньютоновскому результату следующего порядка малости. При этом оказывается, что $r_0/r \sim \bar{v}^2/c^2$, где $\bar{v}$ – среднее значение скорости частицы, движущейся в гравитационном поле, которое создается покоящимся точечным источником. Таким образом, ньютоновский вклад в метрику является величиной второго порядка малости по параметру $\bar{v}/c$. Следующие поправки к метрике являются величинами третьего и четвертого порядков малости по $\bar{v}/c$. В частности, уравнения для величин третьего порядка малости дают $|f^i_0| \sim \bar{v}^3/c^3$ и $|f^0_i| \sim \bar{v}^3/c^3$, что согласуется с вышеприведенными результатами решения уравнений чистой гравитации в ньютоновском приближении. Кроме того, из уравнений третьего порядка малости следует, что $B_1 = 1/4$ и $B_2 = 1/2$.

Рассмотрение задачи о нахождении статической изотропной метрики [7] в рамках тетрадного формализма в случае чистой гравитации позволяет найти числовые коэффициенты α_1 и α_2 . В рамках этой задачи, только если $\alpha_1 = \alpha_2$, уравнения связей обращаются в тождества $0 \equiv 0$, и это означает отсутствие множителей Лагранжа. Выбираем эти коэффициенты равными единице, что допускается, так как, будучи равными, они играют лишь роль масштабного фактора при множителях Лагранжа. При этом оставшиеся уравнения чистой гравитации приводят к решению, соответствующему решению Шварцшильда для метрики в ОТО. Таким образом, обращение при рассмотрении этих простейших задач к хорошо известному экспериментальному статусу чистой гравитации позволяет найти не только все числовые коэффициенты, непосредственно связанные с тетрадными полями, но и коэффициенты A_6 и α_3 , непосредственно связанные с калибровочными полями.

Экспериментальный статус калибровочных полей ТКГТГ неясен, что не позволяет априори установить все числовые коэффициенты, связанные с калибровочными полями. Однако фундаментальное требование положительности “кинетической энергии” калибровочных полей, т. е. условие, что квадраты линейных комбинаций производных по времени всех компонент калибровочных полей входят с положительным знаком, налагает на эти шесть коэффициентов пять условий, которые позволяют определить некоторые из этих числовых коэффициентов. Для упрощения поиска числовых коэффициентов $A_1, \dots, A_5$ и A_7 рассмотрим случай свободных калибровочных полей, когда $e^\alpha_\mu = \delta^\alpha_\mu$, а метрический тензор совпадает с метрикой Минковского.

Единственной величиной, содержащей производные калибровочных полей, является тензор калибровочных полей (8). Поэтому в первом слагаемом $L_C(e, B, \partial B)$ достаточно ограничиться лишь членами тензоров калибровочных полей, содержащими производные, т. е. учитывать в $L_C(e, B, \partial B)$ лишь $F_{\lambda\rho}^a \approx \partial_\lambda B_\rho^a - \partial_\rho B_\lambda^a$ (см. (8)). Оставим в $L_C(e, B, \partial B)$ лишь совокупность L_{C00} существенных в данном случае членов, квадратичных по производным калибровочных полей по времени. Получим, что $L_{C00} \geq 0$ при выполнении условий $A_4 + A_5 = 0$, $2A_1 + A_3 = 0$, $4A_2 + A_3 + A_4 = 0$, $A_3 \leq 0$, $A_4 + 4A_7 \leq 0$.

Таким образом, неясный экспериментальный статус калибровочных полей не позволяет однозначно определить все числовые коэффициенты. Выберем $A_1 = 1$. Тогда $A_3 = -2$, что гарантирует равенство единице числового коэффициента при старшей производной по времени $\partial_0 \partial_0 B_k^{\prime k}$ в уравнениях калибровочных полей. Здесь подразумевается суммирование по дважды повторяющимся индексам, а также учтено, что индексы a' и a'' пробегают те же три значения 1, 2, 3, что и индексы k, n , поэтому удобно заменить их на k, n , перенеся значки $'$ и $''$ на сами компоненты полей. Например, при $a' = 1$ произведена замена $B_n^{a'} \equiv B_n^1$. Принятое соглашение не может привести к недоразумениям.

При обращении к структуре лагранжиана калибровочных полей видно, что выбор $A_4 = -2$, $A_7 = -1$ обеспечивает равноправный статус всех членов в $L_C(e, B, \partial B)$, квадратичных по тензору калибровочных полей (см. далее). При этом $A_5 = 2$, $A_2 = 1$, а L_{C00} принимает вид

$$L_{C00} = \frac{\hbar}{2} (\partial_0 B_k^{\prime k} \partial_0 B_n^{\prime n} + 3 \partial_0 B_k^{\prime\prime k} \partial_0 B_n^{\prime\prime n}).$$

Дополнительные соображения в пользу указанного выбора A_4 и A_7 состоят в следующем. Калибровочные поля ТКГГ взаимодействуют только с гравитацией, поэтому их можно связать с единственными известными в настоящее время физическими объектами такого рода – темной материей и темной энергией, плотности которых соотносятся, как 1 к 3 [8].

3.4. Окончательный вид лагранжиана. Используя определения инвариантов и учитывая указанные значения числовых коэффициентов, получаем

$$L_G(e, \partial e, B) = \frac{c^3}{2\pi G} g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} S_{\mu\rho}^\lambda S_{\nu\lambda}^\rho + \frac{1}{2} S_{\mu\rho}^\lambda S_{\nu\lambda}^\rho - S_{\mu\lambda}^\lambda S_{\nu\rho}^\rho \right), \quad (11)$$

$$L_C(e, B, \partial B) = -\frac{\hbar}{4} M_{ab}^{\lambda\rho\sigma\pi}(e) F_{\lambda\rho}^a F_{\sigma\pi}^b - \frac{1}{4} \frac{c^3}{2\pi G} (\tau_a)^{\alpha\beta} e_\alpha^\lambda e_\beta^\rho F_{\lambda\rho}^a. \quad (12)$$

Здесь зависящие только от тетрады величины

$$\begin{aligned} M_{ab}^{\lambda\rho\sigma\pi}(e) \equiv & \frac{1}{2} \{ {}_6\eta_{ab}(g^{\rho\pi} g^{\lambda\sigma} - g^{\lambda\pi} g^{\rho\sigma}) + 2(\tau_a)_{\alpha\beta} e^{\alpha\pi} e^{\beta\sigma} (\tau_b)_{\gamma\delta} e^{\gamma\rho} e^{\delta\lambda} + \\ & + (\tau_a)_{\gamma}^{\beta} (\tau_b)_{\delta}^{\gamma} [e^{\delta\rho} (e_{\beta}^{\pi} g^{\lambda\sigma} - e_{\beta}^{\sigma} g^{\lambda\pi}) - e^{\delta\lambda} (e_{\beta}^{\pi} g^{\rho\sigma} - e_{\beta}^{\sigma} g^{\rho\pi})] - \\ & - (\tau_a)_{\beta}^{\alpha} (\tau_b)_{\delta}^{\gamma} (e_{\gamma}^{\pi} e^{\beta\sigma} - e_{\gamma}^{\sigma} e^{\beta\pi}) (e_{\alpha}^{\rho} e^{\delta\lambda} - e_{\alpha}^{\lambda} e^{\delta\rho}) - \\ & - 2(\tau_a)_{\alpha\beta} e^{\alpha\rho} e^{\beta\lambda} (\tau_b)_{\gamma\delta} e^{\gamma\pi} e^{\delta\sigma} \} \end{aligned} \quad (13)$$

обладают симметрией $M_{ab}^{\lambda\rho\sigma\pi} = M_{ba}^{\sigma\pi\lambda\rho}$, обеспечивающей симметрию рассматриваемого члена лагранжиана по двум множителям $F_{\lambda\rho}^a$ и $F_{\sigma\pi}^b$, а также антисимметрией $M_{ab}^{\lambda\rho\sigma\pi} = -M_{ab}^{\rho\lambda\sigma\pi} = -M_{ab}^{\lambda\rho\pi\sigma} = M_{ab}^{\rho\lambda\pi\sigma}$ относительно независимых перестановок координатных индексов первой пары и координатных индексов второй пары,

что согласуется с антисимметрией каждого сомножителя $F_{\lambda\rho}^a$ и $F_{\sigma\pi}^b$. Уравнения связей принимают вид

$$\Phi_{\sigma\pi} \equiv (S_{\sigma\pi}{}^\lambda + S_\sigma{}^\lambda{}_\pi - S_\pi{}^\lambda{}_\sigma) S_{\lambda\rho}{}^\rho = 0. \quad (14)$$

3.5. Уравнения ТКТГ для системы точечных частиц. Вариация действия рассматриваемой системы согласно (9)–(14) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta I_{mGC\lambda}[x_n, e, B, \lambda] = & \sum_{n=1}^N m_n c \int_{P_n}^{Q_n} d\tau_n g_{\lambda\sigma}(x_n) \left[\frac{d^2 x_n^\lambda}{d\tau_n^2} + G_{\mu\nu}^\lambda(x_n) \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \right] \delta x_n^\sigma - \\ & - \frac{1}{c} \int_\Omega d^4 x \sqrt{g(x)} 2T^{\mu\nu}(x) e_{\alpha\nu}(x) \delta e^\alpha{}_\mu(x) + \\ & + \delta \int_\Omega d^4 x \sqrt{g(x)} L_{GC\lambda}(e, \partial e, B, \partial B, \lambda). \end{aligned} \quad (15)$$

Приравнявая к нулю вариацию действия (15) и учитывая независимость вариаций δx_n^ν , $\delta e^\alpha{}_\mu(x)$, $\delta B_\mu^a(x)$, $\delta \lambda^{\sigma\pi}(x)$, получаем в соответствии с принципом наименьшего действия уравнения движения частиц в гравитационном поле:

$$\frac{d^2 x_n^\lambda}{d\tau_n^2} + G_{\mu\nu}^\lambda(x_n) \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} = 0, \quad (16)$$

уравнения связей (14), а также уравнения тетрадных полей

$$\begin{aligned} \partial_\nu Q_\alpha{}^{\mu\nu} + G_{\rho\nu}^\rho Q_\alpha{}^{\mu\nu} - Q_\gamma{}^{\mu\nu} (\tau_a)^\gamma{}_\alpha B_\nu^a + \frac{1}{2} E_a{}^{\mu\rho} e_\alpha{}^\lambda F_{\lambda\rho}^a - Z_\rho{}^\mu e_\alpha{}^\rho - \\ - \partial_\nu V_\alpha{}^{\mu\nu} - G_{\rho\nu}^\rho V_\alpha{}^{\mu\nu} + V_\gamma{}^{\mu\nu} (\tau_a)^\gamma{}_\alpha B_\nu^a + W_\rho{}^\mu e_\alpha{}^\rho + \\ + \frac{2\pi G}{c^3} \hbar M_{ab}{}^{\rho\lambda\pi\mu} e_\alpha{}^\sigma F_{\lambda\rho}^a F_{\sigma\pi}^b + \frac{2\pi G}{c^3} (L_G + L_C) e_\alpha{}^\mu - \frac{4\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} e_{\alpha\nu} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

и калибровочных полей

$$\begin{aligned} \hbar [\partial_\nu (M_{ab}{}^{\mu\nu\sigma\pi} F_{\sigma\pi}^b) + G_{\lambda\nu}^\lambda M_{ab}{}^{\mu\nu\sigma\pi} F_{\sigma\pi}^b + C_{ac}^d B_\nu^c M_{db}{}^{\mu\nu\sigma\pi} F_{\sigma\pi}^b] - \\ - \frac{c^3}{2\pi G} \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\nu E_a{}^{\nu\mu} + G_{\lambda\nu}^\lambda E_a{}^{\nu\mu} + C_{ac}^d B_\nu^c E_d{}^{\nu\mu}) + \left(E_a{}^{\mu\rho} S_{\rho\lambda}{}^\lambda + \frac{1}{2} E_a{}^{\lambda\rho} S_{\lambda\rho}{}^\mu \right) + \right. \\ \left. + \lambda^{\sigma\pi} \left(E_{a\sigma\pi} S_\rho{}^\rho{}_\mu - \frac{1}{2} E_a{}^\mu{}_\nu (S_{\sigma\pi}{}^\nu + 2S_{\sigma\pi}{}^\nu) \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь для лучшего понимания уравнений введены обозначения для зависящих от локальных преобразований тетрады антисимметричных координатных тензоров второго ранга

$$Q_\alpha{}^{\mu\nu}(e, \partial e, B) \equiv \frac{1}{2} (S^{\mu\nu}{}_\rho + S_\rho{}^\nu{}_\mu - S_\rho{}^\mu{}_\nu) e_\alpha{}^\rho + (S_\rho{}^\rho{}_\mu e_\alpha{}^\mu - S_\rho{}^\rho{}_\mu e_\alpha{}^\nu), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} V_\alpha{}^{\mu\nu}(e, \partial e, B, \lambda) \equiv & (\lambda^{\nu\mu} S_\sigma{}^\rho{}_\sigma + \lambda^{\nu\rho} S_\sigma{}^\mu{}_\sigma - \lambda^{\mu\rho} S_\sigma{}^\nu{}_\sigma) e_{\alpha\rho} + \\ & + \frac{1}{2} \lambda^{\sigma\rho} [e_\alpha{}^\mu (S_{\sigma\rho}{}^\nu + 2S_{\sigma\rho}{}^\nu) - e_\alpha{}^\nu (S_{\sigma\rho}{}^\mu + 2S_{\sigma\rho}{}^\mu)], \end{aligned} \quad (20)$$

$$E_a{}^{\mu\nu} \equiv (\tau_a)^{\alpha\beta} e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \quad (21)$$

и не зависящих от локальных преобразований тетрады координатных тензоров

$$Z^\mu_\rho(e, \partial e, B) \equiv (S^{\mu\sigma}_\pi + S^{\mu\pi}_\sigma - S^{\sigma\mu}_\pi) S_{\rho\sigma}^\pi - 2S^{\mu\sigma}_\sigma S_{\rho\pi}^\pi - 2S^{\sigma\pi}_\pi S_{\sigma\rho}^\mu, \quad (22)$$

$$W^\mu_\rho(e, \partial e, B, \lambda) \equiv 2\lambda^{\sigma\mu} S_{\pi\nu}^\nu S_{\sigma\rho}^\pi + \\ + \lambda^{\sigma\pi} [2S^{\mu\nu}_\nu S_{\rho\sigma\pi} + (S_{\sigma\pi}^\nu + 2S_{\sigma\pi}^\nu) S_{\rho\nu}^\mu - (S_{\sigma\pi}^\mu + 2S_{\sigma\pi}^\mu) S_{\rho\nu}^\nu]. \quad (23)$$

Из (19), (20) непосредственно видно, что $Q_\alpha^{\mu\nu}(e, \partial e, B)$ и $V_\alpha^{\mu\nu}(e, \partial e, B, \lambda)$ являются лоренцевскими векторами по индексу α . Используя матрицу ${}_6\Lambda(\theta)$ и коммутационные соотношения для генераторов χ_a присоединенного представления группы Лоренца, убеждаемся, что $E_a^{\mu\nu}$ является по индексу a вектором пространства присоединенного представления. Учитывая определение ковариантной производной и связности (4), находим, что левые части уравнений (17), (18) являются и координатными векторами, и лоренцевскими, а сами уравнения являются тензорными равенствами, т. е. сохраняют свой вид как при произвольных преобразованиях координат, так и при локальных преобразованиях Лоренца (двойная ковариантность).

4. ПОСТНЬЮТОНОВСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТКГ

4.1. Формулировка задачи. Рассмотрим решение уравнений (14), (16)–(23) для системы частиц, которые, подобно Солнцу и планетам, связаны взаимным гравитационным притяжением. Для решения такой задачи в рамках ОТО развит метод постньютоновского разложения, подробно описанный в [7]. Применим этот метод для решения уравнений, предварительно приспособив его для ТКГ.

Пусть $\bar{m}$, $\bar{v}$ и $\bar{r}$ – средние значения масс, скоростей и расстояний между ними. Согласно теореме вириала в ньютоновской механике среднее значение кинетической энергии, равное по порядку величины $\bar{m}\bar{v}^2/2$, примерно равно характерной потенциальной энергии $G\bar{m}^2/\bar{r}$, т. е. по порядку величины $\bar{v}^2 \sim G\bar{m}/\bar{r}$. Так, например, частица, обращающаяся по круговой орбите радиуса r вокруг центрального тела с массой m , имеет скорость v , которая в ньютоновской механике определяется точным соотношением $v^2 = Gm/r$. Постньютоновское приближение можно рассматривать как метод описания движения системы гравитационно взаимодействующих тел, на один порядок более точный по малым параметрам $G\bar{m}/\bar{r}c^2$ и $\bar{v}^2/c^2$, чем ньютоновская механика.

Прежде всего сформулируем стоящую перед нами задачу. Используя уравнения движения частиц в теории гравитации (16), находим компоненты ускорения частиц в гравитационном поле, которые в подробной записи имеют вид [7]

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = -c^2 G_{00}^k - 2c G_{0i}^k \frac{dx^i}{dt} - G_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \\ + \left(c^2 G_{00}^0 + 2c G_{0i}^0 \frac{dx^i}{dt} + G_{ij}^0 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right) \frac{1}{c} \frac{dx^k}{dt}. \quad (24)$$

В ньютоновском приближении все скорости считаются исчезающе малыми, и при вычислении компоненты $g_{00}(\mathbf{x})$ метрического тензора удерживаются лишь члены первого порядка по параметру $v^2/c^2 \sim Gm/rc^2 \equiv r_0/r$, где $r_0 \equiv Gm/c^2$ [7]. При этом согласно (24)

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = -c^2 G_{00}^k(\mathbf{x}) = -\frac{c^2}{2} \partial_k g_{00}(\mathbf{x}). \quad (25)$$

Из соотношения (25) следует, что для определения ускорения в ньютоновском приближении, т. е. ускорения порядка величины v^2/r , необходимо знать символы Кристоффеля с точностью до величин порядка Gm/rc^2 или, что то же самое, порядка v^2/c^2 . Следовательно, целью первого постньютоновского приближения является вычисление производной d^2x^k/dt^2 с точностью до $\bar{v}^4/c^2\bar{r}$. Из уравнений (24) видно, что для этого необходимо знать символы Кристоффеля со следующей точностью: $G_{ij}^0 \sim \bar{v}/c\bar{r}$, $G_{0i}^0 \sim \bar{v}^2/c^2\bar{r}$, $G_{00}^0 \sim \bar{v}^3/c^3\bar{r}$, $G_{ij}^k \sim \bar{v}^2/c^2\bar{r}$, $G_{0i}^k \sim \bar{v}^3/c^3\bar{r}$, $G_{00}^k \sim \bar{v}^4/c^4\bar{r}$.

4.2. Разложение тетрады и метрики по степеням малого параметра.

Будем предполагать, что существует система координат, в которой компоненты тетрады можно представить в виде

$$e^\alpha_\mu \equiv \delta^\alpha_\mu + f^\alpha_\mu, \quad (26)$$

причем поправки f^α_μ можно разложить по степеням $(Gm/rc^2)^{1/2} \sim \bar{v}/c$. В частности, полагаем, что

$$\begin{aligned} f^0_0 &= \overset{2}{f}^0_0 + \overset{4}{f}^0_0 + \dots, & f^i_j &= \overset{2}{f}^i_j + \overset{4}{f}^i_j + \dots, \\ f^0_i &= \overset{3}{f}^0_i + \overset{5}{f}^0_i + \dots, & f^i_0 &= \overset{3}{f}^i_0 + \overset{5}{f}^i_0 + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\overset{N}{f}^\alpha_\mu$ означает член порядка $(\bar{v}/c)^N$ в f^α_μ . При этом для метрического тензора

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} e^\alpha_\mu e^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\mu} f^\mu_\mu + \eta_{\nu\nu} f^\nu_\nu + \eta_{\alpha\beta} f^\alpha_\mu f^\beta_\nu \quad (28)$$

справедливы следующие разложения:

$$g_{00} = 1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + \dots, \quad g_{ij} = -\delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + \overset{4}{g}_{ij} + \dots, \quad g_{0i} = \overset{3}{g}_{0i} + \overset{5}{g}_{0i} + \dots, \quad (29)$$

где

$$\overset{2}{g}_{00} = 2\overset{2}{f}^0_0, \quad \overset{2}{g}_{ij} = -\overset{2}{f}^i_j - \overset{2}{f}^j_i, \quad \overset{3}{g}_{0i} = \overset{3}{g}_{i0} = \overset{3}{f}^0_i - \overset{3}{f}^i_0, \quad (30a)$$

$$\overset{4}{g}_{00} = (\overset{2}{f}^0_0)^2 + 2\overset{4}{f}^0_0, \quad \overset{4}{g}_{ij} = -\overset{2}{f}^k_i \overset{2}{f}^k_j - \overset{4}{f}^i_j - \overset{4}{f}^j_i. \quad (30b)$$

Как и в разложениях (27), здесь $\overset{N}{g}_{\mu\nu}$ означает член порядка $(\bar{v}/c)^N$ в $g_{\mu\nu}$. Зависимость от нечетных степеней $\bar{v}$ в $\overset{0}{f}_i$ и $\overset{i}{f}_0$ и, как следствие, в $\overset{3}{g}_{0i}$ возникает из-за того, что компоненты g_{0i} должны менять знак при обращении времени, т. е. при замене t на $-t$. Обоснование такого разложения будет дано ниже: мы покажем, что оно приводит к самосогласованному решению уравнений гравитационного поля.

Обратная тетрада e^μ_α определяется любым из двух уравнений $e^\alpha_\mu e^\mu_\alpha = \delta^\alpha_\alpha$ или $e^\alpha_\mu e^\mu_\beta = \delta^\alpha_\beta$. Будем полагать аналогично (26), что $e^\mu_\alpha = \delta^\mu_\alpha + f^\mu_\alpha$. Тогда с учетом (26) из первого уравнения, определяющего обратную тетраду, находим соотношения

$$e^\alpha_\mu e^\mu_\alpha - \delta^\alpha_\alpha = (\delta^\alpha_\mu + f^\alpha_\mu)(\delta^\mu_\alpha + f^\mu_\alpha) - \delta^\alpha_\alpha = f^\mu_\mu + f^\mu_\mu + f^\alpha_\mu f^\mu_\alpha = 0 \quad (31)$$

и представляем их в удобном для последующих преобразований виде

$$\begin{aligned} f^0_0 + f^0_0 + f^\alpha_0 f^\alpha_0 &= 0, & f^0_i + f^0_i + f^\alpha_i f^\alpha_0 &= 0, \\ f^i_0 + f^i_0 + f^\alpha_0 f^\alpha_i &= 0, & f^i_j + f^i_j + f^\alpha_j f^\alpha_i &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Предположим, что для обратных тетрад имеют место разложения, аналогичные (27):

$$\begin{aligned} f_0^0 &= \overset{2}{f}_0^0 + \overset{4}{f}_0^0 + \dots, & f_i^j &= \overset{2}{f}_i^j + \overset{4}{f}_i^j + \dots, \\ f_i^0 &= \overset{3}{f}_i^0 + \overset{5}{f}_i^0 + \dots, & f_0^i &= \overset{3}{f}_0^i + \overset{5}{f}_0^i + \dots. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя разложения (27), (33) в (32) и ограничиваясь членами порядка малости не выше $(\bar{v}/c)^4$, получаем

$$\begin{aligned} \overset{2}{f}_0^0 + \overset{2}{f}_0^0 + \overset{2}{f}_0^0 \overset{2}{f}_0^0 + \overset{4}{f}_0^0 + \overset{4}{f}_0^0 &= 0, & \overset{3}{f}_0^i + \overset{3}{f}_i^0 &= 0, \\ \overset{3}{f}_i^0 + \overset{3}{f}_0^i &= 0, & \overset{2}{f}_j^j + \overset{2}{f}_j^i + \overset{2}{f}_j^k \overset{2}{f}_k^i + \overset{4}{f}_j^j + \overset{4}{f}_j^i &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Равенства (34) позволяют выразить обратную тетраду через исходную:

$$\begin{aligned} \overset{2}{f}_0^0 &= -\overset{2}{f}_0^0, & \overset{2}{f}_j^i &= -\overset{2}{f}_i^j, & \overset{3}{f}_i^0 &= -\overset{3}{f}_0^i, & \overset{3}{f}_0^i &= -\overset{3}{f}_i^0, \\ \overset{4}{f}_0^0 &= -\overset{4}{f}_0^0 + (\overset{2}{f}_0^0)^2, & \overset{4}{f}_j^i &= -\overset{4}{f}_i^j + \overset{2}{f}_k^i \overset{2}{f}_j^k. \end{aligned} \quad (35)$$

Найдем разложение обратного метрического тензора, используя аналогичное (28) равенство $g^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu = \eta^{\mu\nu} + \eta^{\mu\mu} f_\mu^\nu + \eta^{\nu\nu} f_\nu^\mu + \eta^{\alpha\beta} f_\alpha^\mu f_\beta^\nu$, в котором следует использовать разложения (35) обратной тетрады. В результате получаем

$$g^{00} = 1 + \overset{2}{g}^{00} + \overset{4}{g}^{00} + \dots, \quad g^{ij} = -\delta^{ij} + \overset{2}{g}^{ij} + \overset{4}{g}^{ij} + \dots, \quad g^{0i} = \overset{3}{g}^{0i} + \overset{5}{g}^{0i} + \dots, \quad (36)$$

где

$$\overset{2}{g}^{00} = -2\overset{2}{f}_0^0, \quad \overset{2}{g}^{ij} = \overset{2}{f}_i^j + \overset{2}{f}_j^i, \quad \overset{3}{g}^{0i} = \overset{3}{g}^{i0} = \overset{3}{f}_i^0 - \overset{3}{f}_0^i, \quad (37a)$$

$$\overset{4}{g}^{00} = -2\overset{4}{f}_0^0 + 3(\overset{2}{f}_0^0)^2, \quad \overset{4}{g}^{ij} = \overset{4}{f}_i^j + \overset{4}{f}_j^i - \overset{2}{f}_k^i \overset{2}{f}_j^k - \overset{2}{f}_k^j \overset{2}{f}_i^k - \overset{2}{f}_k^j \overset{2}{f}_i^k. \quad (37b)$$

4.3. Разложение символов Кристоффеля. При вычислении символов Кристоффеля необходимо учесть, что в качестве масштабов расстояния и времени в рассматриваемой системе выбраны $\bar{r}$ и $\bar{r}/\bar{v}$ соответственно. Поэтому будем считать, что пространственные и временные производные имеют следующий порядок: $\partial_i \sim 1/\bar{r}$, $\partial_t \sim \bar{v}/\bar{r}$, $\partial_0 \sim \bar{v}/c\bar{r}$. Используя разложения (29), (36), находим с требуемой точностью входящие в уравнения (24) символы Кристоффеля G_{00}^k , G_{ij}^k , G_{0i}^0 . При четных степенях компонент скорости имеем

$$G_{00}^k = \overset{2}{G}_{00}^k + \overset{4}{G}_{00}^k, \quad \overset{2}{G}_{00}^k = \frac{1}{2} \partial_k \overset{2}{g}_{00}, \quad \overset{4}{G}_{00}^k = \frac{1}{2} \partial_k \overset{4}{g}_{00} - \partial_0 \overset{3}{g}_{0k} + \frac{1}{2} \overset{2}{g}_{kn} \partial_n \overset{2}{g}_{00}; \quad (38a)$$

$$G_{ij}^k = \overset{2}{G}_{ij}^k = -\frac{1}{2} (\partial_j \overset{2}{g}_{ik} + \partial_i \overset{2}{g}_{jk} - \partial_k \overset{2}{g}_{ij}); \quad G_{0i}^0 = \overset{2}{G}_{0i}^0 = \frac{1}{2} \partial_i \overset{2}{g}_{00}. \quad (38b)$$

При нечетных степенях компонент скорости имеем

$$G_{00}^0 = \overset{3}{G}_{00}^0 = \frac{1}{2} \partial_0 \overset{2}{g}_{00}, \quad G_{0i}^k = \overset{3}{G}_{0i}^k = -\frac{1}{2} (\partial_i \overset{3}{g}_{0k} + \partial_0 \overset{2}{g}_{ik} - \partial_k \overset{3}{g}_{0i}), \quad \overset{1}{G}_{ij}^0 = 0. \quad (39)$$

Из этих формул следует, что для вычисления указанных символов Кристоффеля необходимо знать величины g_{ij} вплоть до членов порядка $(\bar{v}/c)^2$, величины g_{0i} — вплоть до членов порядка $(\bar{v}/c)^3$ и величины g_{00} — вплоть до членов порядка $(\bar{v}/c)^4$.

Согласно (29), (30) это означает, что для метрического тензора необходимо записать следующие разложения:

$$g_{00} = 1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} = 1 + 2\overset{2}{f}_0^0 + (\overset{2}{f}_0^0)^2 + 2\overset{4}{f}_0^0, \quad (40a)$$

$$g_{ij} = -\delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} = -\delta_{ij} - \overset{2}{f}_j^i - \overset{2}{f}_i^j, \quad g_{0i} = \overset{3}{g}_{0i} = \overset{3}{f}_i^0 - \overset{3}{f}_0^i. \quad (40б)$$

Для сравнения укажем, что в ньютоновском приближении необходимо знать величины g_{00} до членов порядка $(\bar{v}/c)^2$ (см. (25)), а g_{0i} и g_{ij} необходимо знать только в нулевом порядке. Это означает, что в формулах (40) мы отбрасываем, т. е. кладем равными нулю, величины $(\overset{2}{f}_0^0)^2$, $\overset{4}{f}_0^0$, $\overset{2}{f}_j^i$, $\overset{3}{f}_i^0$, $\overset{3}{f}_0^i$. Изложенное проясняет смысл ньютоновского приближения и дает его последовательное обоснование.

4.4. Разложение калибровочных полей и множителей Лагранжа. Согласно вышеизложенному калибровочные поля не влияют на движение рассматриваемой системы частиц. Однако они входят не только в уравнения калибровочных полей, но и в уравнения тетрадных полей, что требует распространения метода постньютоновского разложения и на эти поля. Для внутренней согласованности разложения потребуем, чтобы калибровочные поля и множители Лагранжа $\lambda^{\mu\nu}$ разлагались в следующие ряды:

$$B'^m{}_0 = \overset{3}{B}'^m{}_0 + \overset{5}{B}'^m{}_0 + \dots, \quad B'^m{}_j = \overset{2}{B}'^m{}_j + \overset{4}{B}'^m{}_j + \dots, \quad (41)$$

$$B''^m{}_0 = \overset{2}{B}''^m{}_0 + \overset{4}{B}''^m{}_0 + \dots, \quad B''^m{}_j = \overset{3}{B}''^m{}_j + \overset{5}{B}''^m{}_j + \dots;$$

$$\lambda^{0i} = \overset{1}{\lambda}^{0i} + \overset{3}{\lambda}^{0i} + \dots, \quad \lambda^{ij} = \overset{2}{\lambda}^{ij} + \overset{4}{\lambda}^{ij} + \dots. \quad (42)$$

4.5. Разложение тензоров калибровочных полей и тензора кручения. Используя разложения калибровочных полей (41) и явный вид групповых констант, находим разложения тензоров калибровочных полей (8), удерживая члены не выше четвертого порядка малости:

$$F_{0j}^{ri} = \overset{3}{F}_{0j}^{ri} = -\overset{3}{F}_{j0}^{ri} = \partial_0 \overset{2}{B}_j^{ri} - \partial_j \overset{2}{B}_0^{ri}; \quad (43a)$$

$$F_{mj}^{ri} = \overset{2}{F}_{mj}^{ri} + \overset{4}{F}_{mj}^{ri}, \quad (43б)$$

$$\overset{2}{F}_{mj}^{ri} = \partial_m \overset{2}{B}_j^{ri} - \partial_j \overset{2}{B}_m^{ri}, \quad \overset{4}{F}_{mj}^{ri} = \partial_m \overset{4}{B}_j^{ri} - \partial_j \overset{4}{B}_m^{ri} + \varepsilon_{ikn} \overset{2}{B}_m^{rk} \overset{2}{B}_{nj}^{ri}; \quad (43в)$$

$$F_{0j}''^{ri} = \overset{2}{F}_{0j}''^{ri} + \overset{4}{F}_{0j}''^{ri}, \quad (43г)$$

$$\overset{2}{F}_{0j}''^{ri} = -\overset{2}{F}_{j0}''^{ri} = -\partial_j \overset{2}{B}_0^{ri}, \quad \overset{4}{F}_{0j}''^{ri} = -\overset{4}{F}_{j0}''^{ri} = \partial_0 \overset{3}{B}_j^{ri} - \partial_j \overset{4}{B}_0^{ri} - \varepsilon_{ikn} \overset{2}{B}_j^{rk} \overset{2}{B}_0^{ni}; \quad (43д)$$

$$F_{mj}''^{ri} = \overset{3}{F}_{mj}''^{ri} = \partial_m \overset{3}{B}_j^{ri} - \partial_j \overset{3}{B}_m^{ri}. \quad (43е)$$

Используя разложения компонент тетрады (27), калибровочных полей (41) и явный вид генераторов группы Лоренца, находим, удерживая члены не выше четвертого порядка малости, разложения тензоров кручения (6):

$$S_{0i}^0 = \overset{2}{S}_{0i}^0 + \overset{4}{S}_{0i}^0, \quad (44a)$$

где

$$\overset{2}{S}_{0i}{}^0 = -\overset{2}{S}_{i0}{}^0 = \frac{1}{2}(-\partial_i \overset{2}{f}_0^0 + \overset{2}{B}{}^{''i}_0), \quad (44б)$$

$$\overset{4}{S}_{0i}{}^0 = -\overset{4}{S}_{i0}{}^0 = \frac{1}{2}(\overset{2}{f}_0^0 \partial_i \overset{2}{f}_0^0 + \partial_0 \overset{3}{f}_i^0 - \partial_i \overset{4}{f}_0^0 - \overset{2}{f}_0^0 \overset{2}{B}{}^{''i}_0 + \overset{2}{f}_i^j \overset{2}{B}{}^{''j}_0 + \overset{4}{B}{}^{''i}_0); \quad (44в)$$

$$S_{0i}{}^j = -S_{i0}{}^j = \overset{3}{S}_{0i}{}^j = \frac{1}{2}(\partial_0 \overset{2}{f}_i^j - \partial_i \overset{3}{f}_0^j - \overset{3}{B}{}^{''j}_i + \varepsilon_{ijk} \overset{3}{B}{}^{''k}_0), \quad (44г)$$

$$S_{ij}{}^0 = \overset{3}{S}_{ij}{}^0 = \frac{1}{2}(\partial_i \overset{3}{f}_j^0 - \partial_j \overset{3}{f}_i^0 + \overset{3}{B}{}^{''j}_i - \overset{3}{B}{}^{''i}_j) \quad (44д)$$

и

$$S_{ij}{}^k = \overset{2}{S}_{ij}{}^k + \overset{4}{S}_{ij}{}^k, \quad (44е)$$

где

$$\overset{2}{S}_{ij}{}^k = \frac{1}{2}(\partial_i \overset{2}{f}_j^k - \partial_j \overset{2}{f}_i^k + \varepsilon_{njk} \overset{2}{B}{}^{''n}_i - \varepsilon_{nik} \overset{2}{B}{}^{''n}_j), \quad (44ж)$$

$$\begin{aligned} \overset{4}{S}_{ij}{}^k = \frac{1}{2} [& -\overset{2}{f}_n^k (\partial_i \overset{2}{f}_j^n - \partial_j \overset{2}{f}_i^n) + (\partial_i \overset{4}{f}_j^k - \partial_j \overset{4}{f}_i^k) + \overset{2}{f}_n^k (\varepsilon_{min} \overset{2}{B}{}^{''m}_j - \varepsilon_{mjn} \overset{2}{B}{}^{''m}_i) + \\ & + (\varepsilon_{nmk} \overset{2}{f}_j^m \overset{2}{B}{}^{''n}_i - \varepsilon_{nmk} \overset{2}{f}_i^m \overset{2}{B}{}^{''n}_j + \varepsilon_{njk} \overset{4}{B}{}^{''n}_i - \varepsilon_{nik} \overset{4}{B}{}^{''n}_j)]. \end{aligned} \quad (44з)$$

Согласно приведенным разложениям компоненты тензора кручения с четным числом нулевых индексов имеют четные порядки малости (2, 4, ...), а компоненты тензора кручения с нечетным числом нулевых индексов имеют нечетные порядки малости (3, 5, ...). Из формул (44) следует, что выбранные разложения калибровочных полей (41) согласованы с разложениями тетрадных полей. В соответствии с (43), (44) старшие члены разложения тензоров калибровочных полей и тензоров кручения имеют второй порядок малости.

4.6. Разложение тензора энергии-импульса частиц в присутствии гравитации. Тензор энергии-импульса (10) частиц в гравитационном поле, являющийся источником гравитационного поля, также следует представить в виде разложения по малому параметру. В результате простых, но громоздких вычислений находим разложения

$$T^{00}(x) = \overset{0}{T}{}^{00}(x) + \overset{2}{T}{}^{00}(x), \quad (45а)$$

где

$$\overset{0}{T}{}^{00}(x) = \sum_{n=1}^N m_n c^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(x^0)), \quad (45б)$$

$$\overset{2}{T}{}^{00}(x) = \sum_{n=1}^N m_n c^2 \left[-2\overset{2}{f}_0^0(x) - \overset{2}{f}_i^i(x) + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}_n^2}{c^2} \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(x^0)); \quad (45в)$$

$$T^{0k}(x) = \overset{1}{T}{}^{0k}(x) + \overset{3}{T}{}^{0k}(x), \quad (45г)$$

где

$$\overset{1}{T}{}^{0k}(x) = \sum_{n=1}^N m_n c^2 \frac{dx_n^k(x^0)}{dx^0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(x^0)), \quad (45д)$$

$$\overset{3}{T}{}^{0k}(x) = \sum_{n=1}^N m_n c^2 \frac{dx_n^k(x^0)}{dx^0} \left[-2\overset{2}{f}_0^0(x) - \overset{2}{f}_i^i(x) + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}_n^2}{c^2} \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(x^0)) \quad (45е)$$

и

$$T^{kj}(x) = \overset{2}{T}{}^{kj}(x) + \overset{4}{T}{}^{kj}(x), \quad (45ж)$$

где

$$\overset{2}{T}{}^{kj}(x) = \sum_{n=1}^N m_n c^2 \frac{dx_n^k(x^0)}{dx^0} \frac{dx_n^j(x^0)}{dx^0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(x^0)), \quad (45з)$$

$$\overset{4}{T}{}^{kj}(x) = \sum_{n=1}^N m_n c^2 \frac{dx_n^k(x^0)}{dx^0} \frac{dx_n^j(x^0)}{dx^0} \left[-2\overset{2}{f}{}_0^0(x) - \overset{2}{f}{}_i^i(x) + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}_n^2}{c^2} \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(x^0)). \quad (45и)$$

Из уравнений ТКТГ и разложений тензора энергии-импульса следует, что в первом постньютоновском приближении необходимо знать тензор энергии-импульса лишь с точностью до величин второго порядка малости, иначе говоря, на два порядка малости точнее, чем в ньютоновском приближении, т. е. помимо $\overset{0}{T}{}^{00}(x)$ необходимо знать только $\overset{1}{T}{}^{0k}(x)$, $\overset{2}{T}{}^{00}(x)$ и $\overset{2}{T}{}^{kj}(x)$. Таким образом, для нахождения в данном приближении источника гравитационного поля, в роли которого выступает тензор энергии-импульса, необходимо знать компоненты тетрадных полей только в приближениях, предшествующих рассматриваемому приближению. Следовательно, процедура постньютоновского разложения является самосогласованной.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТКТГ В НЬЮТОНОВСКОМ И ПЕРВОМ ПОСТНЬЮТОНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

5.1. Ньютоновское приближение. Если при решении уравнений ТКТГ ограничиться ньютоновским и первым постньютоновским приближениями, то уравнения можно существенно упростить, опустив в них члены, заведомо имеющие порядки малости, превышающие четвертый. В уравнениях (17) такими членами являются $W_\rho^\mu e_\alpha^\rho$, $G_{\rho\nu}^\rho V_\alpha^{\mu\nu}$, $V_\gamma^{\mu\nu}(\tau_a)^\gamma_\alpha B_\nu^a$ и член с $\hbar$, который мал даже без учета малости $\hbar$. В уравнениях (18) следует опустить член с $\hbar$, который мал по сравнению со вторым членом. Дальнейший анализ уравнений возможен лишь при выборе для индексов α и μ значений, соответствующих временной или пространственным координатам, а для групповых индексов a следует выбрать значения, соответствующие поворотам или бустам.

Используя приведенные выше разложения, находим систему уравнений ньютоновского приближения, состоящую только из уравнений тетрадных полей второго порядка малости. Эти уравнения при $\mu = 0$, $\alpha = 0$ имеют вид

$$\frac{1}{2}(-\partial_i \partial_i \overset{2}{f}{}_j^j + \partial_i \partial_j \overset{2}{f}{}_i^j) = \frac{4\pi G}{c^4} \overset{0}{T}{}^{00}, \quad (46)$$

а при $\mu = k$, $\alpha = n$ они имеют вид

$$\begin{aligned} & \partial_i \partial_i (\overset{2}{f}{}_n^k + \overset{2}{f}{}_k^n) - \partial_n \partial_i (\overset{2}{f}{}_i^k + \overset{2}{f}{}_k^i) - \partial_k \partial_i (\overset{2}{f}{}_n^i + \overset{2}{f}{}_i^n) + \\ & + 2\partial_n \partial_k (\overset{2}{f}{}_0^0 + \overset{2}{f}{}_i^i) + 2\delta_n^k (-\partial_i \partial_i \overset{2}{f}{}_0^0 - \partial_i \partial_i \overset{2}{f}{}_j^j + \partial_i \partial_j \overset{2}{f}{}_i^j) = 0; \end{aligned} \quad (47)$$

калибровочные поля и множители Лагранжа в этих уравнениях отсутствуют, что является прямым следствием принятых разложений (41), (42). При

$$\overset{2}{f}{}_j^i = -\delta_j^i \overset{2}{f}{}_0^0 \quad (48)$$

уравнение (47) обращается в тождество $0 \equiv 0$, а уравнение (46) принимает вид

$$\partial_i \partial_i \overset{2}{f}_0^0 = \frac{4\pi G}{c^4} \overset{0}{T}{}^{00}. \quad (49)$$

Решение этого уравнения для тетрадного поля $\overset{2}{f}_0^0(x^0, \mathbf{x})$ записывается как интеграл по всему трехмерному пространству:

$$\overset{2}{f}_0^0(x^0, \mathbf{x}) = -\frac{G}{c^4} \iiint d^3x' \frac{\overset{0}{T}{}^{00}(x^0, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \equiv \frac{\phi(x^0, \mathbf{x})}{c^2}, \quad (50)$$

где $\phi(x^0, \mathbf{x})$ – потенциал Ньютона. Следует отметить, что $\phi(x^0, \mathbf{x})$ определяется формулой (50) для любого источника гравитационного поля. В случае системы точечных масс, используя (456), получаем

$$\overset{2}{f}_0^0(x^0, \mathbf{x}) = -\sum_{n=1}^N \frac{Gm_n}{c^2} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(x^0)|}. \quad (51)$$

В частном случае, когда источником гравитационного поля служит покоящаяся точечная частица с массой m , из (51) следует уравнение

$$\overset{2}{f}_0^0(r) = -\frac{Gm}{c^2} \frac{1}{r} = -\frac{r_0}{r}, \quad (52)$$

где $r \equiv |\mathbf{x}|$ – модуль вектора $\mathbf{x}$, начинающегося в источнике гравитационного поля (точечной частице с массой m) и заканчивающегося в точке наблюдения. Согласно (29), (30a) в ньютоновском приближении

$$g_{00}(x^0, \mathbf{x}) = 1 + 2\overset{2}{f}_0^0(x^0, \mathbf{x}) \quad (53)$$

(отличие в знаке $g_{00}(x^0, \mathbf{x})$ по сравнению с монографией [7] связано с различием используемых сигнатур).

Итак, решение уравнений второго порядка малости, получающихся в рамках стандартного постньютоновского разложения системы уравнений ТКТГ, позволяет не только установить ньютоновский результат, т. е. найти величины $\overset{2}{f}_0^0(x^0, \mathbf{x})$ (50), но и получить необходимые в первом постньютоновском приближении величины $\overset{2}{f}_j^i(x^0, \mathbf{x})$ (48); в результате мы имеем (см. (29), (30a))

$$g_{ij}(x^0, \mathbf{x}) = -\delta_{ij} + 2\overset{2}{f}_0^0(x^0, \mathbf{x})\delta_{ij}. \quad (54)$$

5.2. Решение уравнений третьего порядка малости. Аналогично находим систему уравнений третьего порядка малости, относящихся к первому постньютоновскому приближению. Эта система состоит из уравнений тетрадных полей третьего порядка малости при $\mu = 0$, $\alpha = k$, имеющих вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \partial_i \partial_i (\overset{3}{f}_k^0 - \overset{3}{f}_0^k) - \frac{1}{4} \partial_k \partial_i (\overset{3}{f}_i^0 - \overset{3}{f}_0^i) + \partial_k \partial_0 \overset{2}{f}_0^0 - \\ & - \frac{1}{2} \partial_i [\overset{1}{\lambda}{}^{0i} (\partial_k \overset{2}{f}_0^0 + \overset{2}{B}{}^{nk}_0 - \varepsilon_{kjn} \overset{2}{B}{}'^j{}_n) + \overset{1}{\lambda}{}^{0k} (\partial_i \overset{2}{f}_0^0 + \overset{2}{B}{}^{ni}_0 - \varepsilon_{ijn} \overset{2}{B}{}'^j{}_n)] - \\ & - \partial_k [\overset{1}{\lambda}{}^{0i} (\partial_i \overset{2}{f}_0^0 - \overset{2}{B}{}^{ni}_0)] = -\frac{4\pi G}{c^4} \overset{1}{T}{}^{0k}, \end{aligned} \quad (55)$$

уравнений при $\mu = k$, $\alpha = 0$ вида

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \partial_i \partial_i (\overset{3}{f}_k^0 - \overset{3}{f}_0^k) - \frac{1}{4} \partial_k \partial_i (\overset{3}{f}_i^0 - \overset{3}{f}_0^i) + \partial_k \partial_0 \overset{2}{f}_0^0 - \\ & - \frac{1}{2} \partial_i [\overset{1}{\lambda}^{0i} (\partial_k \overset{2}{f}_0^0 + \overset{2}{B}{}_{0k}'' - \varepsilon_{kjn} \overset{2}{B}'{}_{jn}) - \overset{1}{\lambda}^{0k} (\partial_i \overset{2}{f}_0^0 + \overset{2}{B}{}_{0i}'' - \varepsilon_{ijn} \overset{2}{B}'{}_{jn})] = -\frac{4\pi G}{c^4} \overset{1}{T}{}^{0k} \end{aligned} \quad (56)$$

и уравнений калибровочных полей третьего порядка малости при $\mu = n$, $a'' = k$:

$$\delta_k^n \overset{1}{\lambda}^{0i} (\partial_i \overset{2}{f}_0^0 - \overset{2}{B}{}_{0i}'') + \overset{1}{\lambda}^{0k} (\partial_n \overset{2}{f}_0^0 + \overset{2}{B}{}_{0n}'' - \varepsilon_{nij} \overset{2}{B}'{}_{j}) = 0. \quad (57)$$

Из уравнения (57) следует равенство $\overset{1}{\lambda}^{0k} = 0$, при учете которого уравнения (55) и (56) совпадают и принимают вид

$$\frac{1}{4} \partial_i \partial_i (\overset{3}{f}_k^0 - \overset{3}{f}_0^k) - \frac{1}{4} \partial_k \partial_i (\overset{3}{f}_i^0 - \overset{3}{f}_0^i) + \partial_k \partial_0 \overset{2}{f}_0^0 = -\frac{4\pi G}{c^4} \overset{1}{T}{}^{0k}. \quad (58)$$

Применяя к уравнениям (58) операцию ∂_k , учитывая (49) и опуская числовой множитель $4\pi G/c^4$, выводим соотношение

$$\partial_0 \overset{0}{T}{}^{00} + \partial_k \overset{1}{T}{}^{0k} = 0, \quad (59)$$

которое в случае системы N точечных частиц вытекает непосредственно из (456) и (45д). Введем для левой части равенства (59) обозначение $\partial_\mu T^{0\mu}$ и будем понимать $\partial_\mu T^{0\mu} = 0$ как равенство с точностью до величин первого порядка малости. Получим после интегрирования по области пространства-времени, уходящей по пространственноподобным направлениям в бесконечность и ограниченной двумя гиперповерхностями, ортогональными оси времени, закон сохранения величины

$$P^0 = \frac{1}{c} \iiint d^3x \overset{0}{T}{}^{00} = c \sum_{n=1}^N m_n, \quad (60)$$

т. е. сохранение массы системы N точечных частиц, которые движутся по траекториям $\mathbf{x}_n(x^0)$ с малыми по сравнению со скоростью света скоростями $\mathbf{v}_n(x^0)$, с точностью до величин первого порядка малости по параметру $\bar{v}/c$.

Полагая далее

$$\overset{3}{f}_0^k = -\overset{3}{f}_k^0, \quad (61)$$

представляем уравнения (58) в виде

$$\frac{1}{2} \partial_i \partial_i \overset{3}{f}_k^0 - \partial_k \left(\partial_0 \overset{2}{f}_0^0 - \frac{1}{2} \partial_i \overset{3}{f}_i^0 \right) = -\frac{4\pi G}{c^4} \overset{1}{T}{}^{0k}. \quad (62)$$

Если выполняется условие

$$\partial_0 \overset{2}{f}_0^0 - \frac{1}{2} \partial_i \overset{3}{f}_i^0 = 0, \quad (63)$$

то уравнения (62) упрощаются и принимают вид

$$\partial_i \partial_i \overset{3}{f}_k^0 = -\frac{4\pi G}{c^4} 2\overset{1}{T}{}^{0k}. \quad (64)$$

Исчезающее на бесконечности решение уравнений (64) записывается как

$$\overset{3}{f}_k^0(x^0, \mathbf{x}) = 2 \frac{G}{c^4} \iiint d^3x' \frac{\overset{1}{T}{}^{0k}(x^0, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (65)$$

Используя соотношения (50), (65) и (45б), (45д), убеждаемся в выполнении условия (63). В соответствии с формулами (40б), (61) и (65) компоненты метрики третьего порядка малости (см. [7]) записываются как

$$\overset{3}{g}_{0k}(x^0, \mathbf{x}) = 2\overset{3}{f}_k^0(x^0, \mathbf{x}) = 4 \frac{G}{c^4} \iiint d^3x' \frac{\overset{1}{T}{}^{0k}(x^0, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (66)$$

5.3. Решение уравнений четвертого порядка малости. В системе уравнений четвертого порядка малости имеются уравнения связей (см. (14))

$$\Phi_{ij} \equiv (\overset{2}{S}_{ij}{}^m + \overset{2}{S}_{im}{}^j - \overset{2}{S}_{jm}{}^i) \overset{2}{S}_{m\rho}{}^\rho = 0,$$

обращающиеся в тождества при нулевых калибровочных полях второго порядка малости, т. е. при $\overset{2}{B}{}^n{}_j \equiv \overset{2}{B}{}^{nk}{}_0 \equiv 0$. Оставшиеся уравнения калибровочных полей четвертого порядка малости с учетом равенства $\overset{1}{\lambda}{}^{0i} \equiv 0$ имеют следующий вид: при $\mu = 0$, $a'' = k$

$$\overset{2}{\lambda}{}^{ij}(\overset{2}{S}_{ij}{}^k + \overset{2}{S}_{ik}{}^j - \overset{2}{S}_{jk}{}^i) = 0,$$

а при $\mu = n$, $a' = m$

$$\varepsilon_{mnk} \overset{2}{\lambda}{}^{ij}(\overset{2}{S}_{ij}{}^k + \overset{2}{S}_{ik}{}^j - \overset{2}{S}_{jk}{}^i) - 2\varepsilon_{mij} \overset{2}{\lambda}{}^{ij} \overset{2}{S}_{n\rho}{}^\rho = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\overset{2}{S}_{n\rho}{}^\rho = -(1/2)\partial_n \overset{2}{f}_0^0 \neq 0$, получаем $\overset{2}{\lambda}{}^{ij} = 0$. Используя эти результаты, а также решения уравнений второго и третьего порядков малости, представляем уравнения тетрадных полей четвертого порядка малости в следующем виде: при $\mu = 0$, $\alpha = 0$

$$\frac{1}{2} \partial_i (\partial_i \overset{4}{f}_j^j - \partial_j \overset{4}{f}_i^i) - \overset{2}{f}_0^0 \partial_i \partial_i \overset{2}{f}_0^0 - \frac{1}{2} \partial_i \overset{2}{f}_0^0 \partial_i \overset{2}{f}_0^0 = -\frac{4\pi G}{c^4} \overset{2}{T}{}^{00}, \quad (67)$$

при $\mu = k$, $\alpha = n$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[\partial_i \partial_i (\overset{4}{f}_k^n + \overset{4}{f}_n^k) - \partial_k \partial_i (\overset{4}{f}_i^n + \overset{4}{f}_n^i) - \partial_n \partial_i (\overset{4}{f}_i^k + \overset{4}{f}_k^i) \right] + \frac{1}{2} \partial_n \partial_k \overset{4}{f}_i^i + \frac{1}{2} \partial_n \partial_k \overset{4}{f}_0^0 + \\ & + \delta_n^k \left[\partial_0 \partial_0 \overset{2}{f}_0^0 + \overset{2}{f}_0^0 \partial_i \partial_i \overset{2}{f}_0^0 + \frac{1}{2} \partial_i \overset{2}{f}_0^0 \partial_i \overset{2}{f}_0^0 - \frac{1}{2} \partial_i \overset{4}{f}_0^0 - \frac{1}{2} \partial_i (\partial_i \overset{4}{f}_j^j - \partial_j \overset{4}{f}_i^i) \right] - \\ & - \overset{2}{f}_0^0 \partial_n \partial_k \overset{2}{f}_0^0 - \frac{1}{2} \partial_0 \partial_k \overset{3}{f}_n^0 - \frac{1}{2} \partial_0 \partial_n \overset{3}{f}_k^0 = -\frac{4\pi G}{c^4} \overset{2}{T}{}^{kn}. \end{aligned} \quad (68)$$

Семь уравнений (67) и (68) содержат семь неизвестных величин: $\overset{4}{f}_0^0$ и симметричные компоненты $\overset{4}{f}_j^i$. Вычисляя свертку уравнений (68) по индексам k, n и учитывая (63), находим уравнение

$$\frac{1}{2} \partial_i (\partial_i \overset{4}{f}_j^j - \partial_j \overset{4}{f}_i^i) + \partial_i \partial_i \overset{4}{f}_0^0 - \partial_0 \partial_0 \overset{2}{f}_0^0 - 2\overset{2}{f}_0^0 \partial_i \partial_i \overset{2}{f}_0^0 - \frac{3}{2} \partial_i \overset{2}{f}_0^0 \partial_i \overset{2}{f}_0^0 = \frac{4\pi G}{c^4} \overset{2}{T}{}^{ii},$$

вычитая из которого (67), получаем уравнение для определения $\overset{4}{f}_0^0$:

$$\partial_i \partial_i \overset{4}{f}_0^0 - \overset{2}{f}_0^0 \partial_i \partial_i \overset{2}{f}_0^0 - \partial_i \overset{2}{f}_0^0 \partial_i \overset{2}{f}_0^0 = \frac{4\pi G}{c^4} (\overset{2}{T}^{00} + \overset{2}{T}^{ii}) + \partial_0 \partial_0 \overset{2}{f}_0^0. \quad (69)$$

Учтем тождество $\overset{2}{f}_0^0 \partial_i \partial_i \overset{2}{f}_0^0 + \partial_i \overset{2}{f}_0^0 \partial_i \overset{2}{f}_0^0 \equiv (1/2) \partial_i \partial_i (\overset{2}{f}_0^0)^2$ и введем обозначение

$$\psi \equiv \overset{4}{f}_0^0 - \frac{1}{2} (\overset{2}{f}_0^0)^2. \quad (70)$$

Тогда уравнение (69) окончательно записывается как

$$\partial_i \partial_i \psi = \frac{4\pi G}{c^4} (\overset{2}{T}^{00} + \overset{2}{T}^{ii}) + \partial_0 \partial_0 \overset{2}{f}_0^0. \quad (71)$$

Решение уравнения (71) имеет вид (см. (49), (50))

$$\psi(x^0, \mathbf{x}) = - \iiint d^3 x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left\{ \frac{1}{4\pi} \partial_0 \partial_0 \overset{2}{f}_0^0(x^0, \mathbf{x}') + \frac{G}{c^4} [\overset{2}{T}^{00}(x^0, \mathbf{x}') + \overset{2}{T}^{ii}(x^0, \mathbf{x}')] \right\}. \quad (72)$$

Величина $\overset{4}{f}_0^0$ определяется из (70), (72) и (50).

В случае одной частицы с массой m_p согласно (45в), (45з) входящая в (72) комбинация компонент тензора энергии-импульса имеет смысл плотности кинетической энергии источника гравитационного поля:

$$\overset{2}{T}^{00} + \overset{2}{T}^{ii} = \frac{m_p \mathbf{v}_p^2}{2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(x^0)).$$

Используя соотношения (30б) и (70), (72), получаем

$$\overset{4}{g}_{00} = (\overset{2}{f}_0^0)^2 + 2\overset{4}{f}_0^0 = 2(\overset{2}{f}_0^0)^2 + 2\psi. \quad (73)$$

Следует отметить, что для решения уравнений движения в первом постньютоновском приближении не требуется знать величины $\overset{4}{f}_j^i$ (см. (40)). Найденная в ньютоновском и первом постньютоновском приближениях ТКТГ метрика совпадает с метрикой, найденной в тех же приближениях ОТО (см. монографию [7], где сигнатура отличается от используемой в настоящей работе). Из соотношений (50), (54), (66), (72), (73) находятся символы Кристоффеля (38), (39), которые в ОТО отождествляются с аффинной связностью. Ввиду совпадения метрики в обеих теориях совпадают также символы Кристоффеля и, как следствие, совпадают траектории движения частиц, так что ТКТГ в применении к описанию систем типа Солнечной системы согласуется с наблюдениями. Однако интерпретации гравитации в этих теориях принципиально различаются. Калибровочные поля в ньютоновском и первом постньютоновском приближениях отсутствуют, и пространство-время в этих приближениях плоское. В ТКТГ за гравитацию отвечает кручение пространства-времени. Тензор кручения (44) в ньютоновском приближении имеет вид

$$\overset{2}{S}_{0i}^0 = -\overset{2}{S}_{i0}^0 = \frac{1}{2} \partial_i \overset{2}{f}_0^0, \quad \overset{2}{S}_{ij}^k = \frac{1}{2} (\delta_i^k \partial_j \overset{2}{f}_0^0 - \delta_j^k \partial_i \overset{2}{f}_0^0). \quad (74)$$

Нахождение других компонент тензора кручения требует рассмотрения второго постньютоновского приближения, в частности необходимо определить компоненты калибровочных полей третьего и четвертого порядков малости. Это обстоятельство обусловлено самой процедурой постньютоновского разложения, связанного с разложением уравнений движения, в которые не входят калибровочные поля, так как они взаимодействуют только с гравитацией.

5.4. Тензорное равенство, описывающее изменение вектора энергии-импульса. Рассмотрим в рамках ТКТГ изменение вектора энергии-импульса источников гравитации вследствие их взаимодействия с гравитационным полем. Используя соотношение (4), выражающее связность $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ через символы Кристоффеля $G_{\mu\nu}^{\lambda}$ и тензор кручения $S_{\mu\nu}^{\lambda}$, находим в пространстве Римана-Картана ковариантную производную произвольного симметричного тензора второго ранга:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = \partial_{\mu} T^{\mu\nu} + G_{\mu\rho}^{\mu} T^{\rho\nu} + G_{\mu\rho}^{\nu} T^{\mu\rho} - 2S_{\rho\mu}^{\mu} T^{\rho\nu} + 2S_{\mu\rho}^{\nu} T^{\mu\rho}. \quad (75)$$

Отсюда следует тензорное равенство

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} + 2S_{\rho\mu}^{\mu} T^{\rho\nu} - 2S_{\mu\rho}^{\nu} T^{\mu\rho} = \partial_{\mu} T^{\mu\nu} + G_{\mu\rho}^{\mu} T^{\rho\nu} + G_{\mu\rho}^{\nu} T^{\mu\rho}, \quad (76)$$

левая сторона которого явно тензорная, так что и правая сторона является тензором. Следует отметить, что правая часть равенства (76) имеет вид ковариантной производной, в которой роль связности выполняют символы Кристоффеля. По существу второй и третий члены в левой части равенства служат для устранения из ковариантной дивергенции тензора $T^{\mu\nu}$ всего, что связано с кручением, так что остается чисто метрическая часть. Это обстоятельство соответствует тому, что уравнения движения источников гравитации не содержат не только калибровочные поля, но в явном виде и тетрадные поля; в уравнениях присутствует лишь комбинация тетрадных полей в виде метрики. Используя определение (10) симметричного тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ системы частиц и уравнения движения частиц (16), выводим равенство

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} + G_{\mu\rho}^{\mu} T^{\rho\nu} + G_{\mu\rho}^{\nu} T^{\mu\rho} = 0, \quad (77)$$

являющееся в соответствии с (76) тензорным как в ТКТГ, так и в ОТО. При отсутствии гравитации равенство (77) принимает вид $\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$, откуда по теореме Нётер [9] следует сохранение вектора энергии-импульса системы частиц. В присутствии гравитации вектор энергии-импульса источников гравитационного поля согласно уравнению (77) не сохраняется, а его изменение вследствие взаимодействия с гравитацией описывается этим уравнением.

Согласно теореме Нётер тензор энергии-импульса порождается трансляционными симметриями пространства-времени Минковского. При наличии гравитации пространство-время не обладает трансляционными симметриями, поэтому тензор энергии-импульса гравитации не существует и, как следствие, не существует тензор энергии-импульса всей системы с гравитацией. Но это обстоятельство не мешает найти, как изменяется вектор энергии-импульса источников гравитации вследствие их взаимодействия с гравитационным полем. Напомним, что тензор энергии-импульса источников гравитации в присутствии гравитационного поля находится из тензора энергии-импульса в отсутствие гравитации, т. е. из тензора энергии-импульса в локально-инерциальной системе отсчета, путем свертки с компонентами

тетрады, как это имеет место для любого другого тензора. Если бы тензор энергии-импульса гравитации существовал, то он должен был быть отличным от нуля и в локально инерциальной системе отсчета, что противоречит самому смыслу такой системы и невозможно по формальной причине: закон преобразования тензоров линеен по их компонентам и однороден, а посредством такого преобразования невозможно получить из нулевого тензора ненулевой. Отсутствие тензора энергии-импульса гравитационного поля является следствием того, что в отличие от всех других материальных объектов гравитационное поле может быть хотя бы локально устранено путем перехода к локально-инерциальной системе отсчета.

Следует еще раз подчеркнуть, что (77) является тензорным равенством в пространстве-времени Римана–Картана (см. (76)), но оно ничего “не знает” о кручении, хотя именно кручение определяет гравитацию в ТКГТ.

Чтобы не увеличивать чрезмерно объем статьи, только кратко упомянем результаты использования равенства (77). В первом порядке по малому параметру v/c получаем сохранение массы (см. (60)); во втором порядке находится изменение импульса системы частиц под действием на частицы сил, порождаемых гравитационным полем; в третьем порядке находится изменение энергии системы частиц, обусловленное изменением энергии гравитационного поля; после аналогичных преобразований в четвертом порядке получается равенство, уже не имеющее такой простой физической интерпретации.

6. МЕТРИКА ШВАРЦШИЛЬДА

6.1. Стандартная форма статической изотропной метрики. Рассмотрим в ТКГТ задачу о нахождении представляющего статическое изотропное гравитационное поле метрического тензора, определяемого выражением для интервала [7]

$$d\tau^2 = B(r)(dx^0)^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (78)$$

где выполняются условия $B(r) > 0$, $A(r) > 0$. Частным случаем (78) является метрика пустого пространства, которой соответствуют $B(r) = 1$, $A(r) = 1$. Будучи выраженным через коэффициенты тетрады, интервал (78) принимает вид

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} e^\alpha_0 e^\beta_0 (dx^0)^2 + \eta_{\alpha\beta} e^\alpha_1 e^\beta_1 dr^2 + \eta_{\alpha\beta} e^\alpha_2 e^\beta_2 d\theta^2 + \eta_{\alpha\beta} e^\alpha_3 e^\beta_3 d\varphi^2. \quad (79)$$

Среди четверки лоренцевских векторов $e_0(r)$, $e_k(r, \theta, \varphi)$ вектор $e_0(r)$ времениподобен, а остальные пространственноподобны. Согласно (78) и (79) эти векторы можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} e_0(r) &= (e^0_0, 0, 0, 0) \equiv (B^{1/2}(r), 0, 0, 0), \\ e_k(r, \theta, \varphi) &= (0, e^1_k(r, \theta, \varphi), e^2_k(r, \theta, \varphi), e^3_k(r, \theta, \varphi)); \end{aligned} \quad (80)$$

явная зависимость компонент векторов $e_k(r, \theta, \varphi)$ от координат r , θ , φ очевидна и не приводится по соображениям экономии места. В рассматриваемом случае в отсутствие калибровочных полей у тензора кручения отличны от нуля лишь компоненты (далее штрих у B означает дифференцирование по r)

$$S_{10}{}^0 = -S_{01}{}^0 = -\frac{1}{4}B^{-1}B', \quad S_{12}{}^2 = -S_{21}{}^2 = S_{13}{}^3 = -S_{31}{}^3 = \frac{1}{2}r^{-1}(1 - A^{1/2}), \quad (81)$$

откуда следует, что существует единственная отличная от нуля свертка тензора кручения $S_{1\rho}^{\rho} = B^{-1}B'/4 + r^{-1}(1 - A^{1/2})$. Имеются также два отличных от нуля символа Кристоффеля:

$$G_{\lambda 1}^{\lambda} = \frac{1}{2}(B^{-1}B' + A^{-1}A' + 4r^{-1}), \quad G_{\lambda 2}^{\lambda} = \sin^{-1} \theta \cos \theta. \quad (82)$$

6.2. Решение уравнений, описывающих статическую изотропную метрику. Учитывая вышеизложенное, находим, что в рамках рассматриваемой задачи уравнения связей имеют вид тождеств $0 \equiv 0$, т. е. не налагают никаких ограничений на рассматриваемые величины, следовательно, нет и множителей Лагранжа. Легко проверить, что при отсутствии калибровочных полей уравнения калибровочных полей также обращаются в тождества. Таким образом, остаются только уравнения тетрадных полей, в которых опущены все члены с калибровочными полями и множителями Лагранжа. Вне источника гравитации уравнения тетрадных полей имеют при этом вид (см. (17))

$$\partial_{\nu} Q_{\alpha}^{\mu\nu} + G_{\rho\nu}^{\rho} Q_{\alpha}^{\mu\nu} - Z_{\rho}^{\mu} e_{\alpha}^{\rho} + \frac{2\pi G}{c^3} L_G e_{\alpha}^{\mu} = 0. \quad (83)$$

Выполняя свертку уравнений (83) с e_{α}^{λ} и выделяя полную производную, получаем

$$\partial_{\nu} (Q_{\alpha}^{\mu\nu} e_{\alpha}^{\lambda}) - Q_{\alpha}^{\mu\nu} \partial_{\nu} e_{\alpha}^{\lambda} + G_{\rho\nu}^{\rho} Q_{\alpha}^{\mu\nu} e_{\alpha}^{\lambda} - Z_{\rho}^{\mu} e_{\alpha}^{\rho} + \frac{2\pi G}{c^3} L_G \delta_{\lambda}^{\mu} = 0. \quad (84)$$

Дальнейший анализ этих уравнений требует выбора конкретных значений индексов μ и λ . Оказывается, что отличны от тождеств $0 \equiv 0$ лишь четыре уравнения, для которых индексы μ и λ совпадают. Используя соотношения (11), (19), (22) и (81), (82), выполняя дифференцирования и приводя подобные члены, находим следующие уравнения при $\mu = \lambda = 0$ и $\mu = \lambda = 1$ соответственно:

$$A^{-1}A' - r^{-1}(1 - A) = 0, \quad B^{-1}B' + r^{-1}(1 - A) = 0. \quad (85)$$

Уравнения, соответствующие $\mu = \lambda = 2$ и $\mu = \lambda = 3$, совпадают и обращаются в тождества на решениях уравнений (85). Решения уравнений (85) таковы:

$$A = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \quad B = A^{-1} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad (86)$$

где r_g – некоторая константа. Таким образом, мы получаем окончательный вид искомой метрики:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(dx^0)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (87)$$

Из сопоставления (87) с (52), (53) следует, что $r_g = 2r_0$.

Рассмотренная задача о нахождении метрического тензора, который представляет статическое изотропное гравитационное поле, имеет одно и то же решение (метрику Шварцшильда [2], [7] как в ОТО, так и в ТКТГ. Обращаясь к монографии [7], где рассмотрены классические опыты по проверке ОТО, можно заключить, что экспериментальный статус тетрадного (чисто гравитационного) сектора ТКТГ тот же, что и у ОТО.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе показано, что использование тетрадного формализма позволяет построить физически приемлемую калибровочную теорию, основанную на некомпактной группе симметрии (локальной группе Лоренца). Тетрадный сектор построенной теории описывает чистую гравитацию, а калибровочный сектор описывает поля, взаимодействующие только с гравитацией, что позволяет предварительно трактовать эти поля как соответствующие единственным известным в настоящее время физическим объектам, взаимодействующим только с гравитацией, а именно темной энергии и темной материи. Несмотря на принципиальное различие математических формализмов ТКТГ и ОТО, их приложение к системам гравитирующих тел типа Солнечной системы приводит к одним и тем же результатам. Обе теории также дают одно и то же решение для метрики статического изотропного гравитационного поля (метрика Шварцшильда). Однако геометрическая интерпретация гравитации в этих теориях совершенно разная: в ОТО за гравитацию отвечает кривизна пространства-времени, тогда как в ТКТГ гравитация обусловлена кручением пространства-времени, в результате в этих теориях пространство-время принципиально разное.

ОТО провозглашает равноправие всех относящихся к данной точке пространства-времени локально-инерциальных систем отсчета, но вследствие использования в качестве динамической переменной метрики, инвариантной относительно выбора такой системы отсчета, следствия из такой инвариантности остаются за пределами ОТО, ничего поэтому “не знающей” о калибровочных полях. Математический формализм ТКТГ существенно сложнее, чем в ОТО, но он естественно учитывает равноправие всех локально-инерциальных систем отсчета, что автоматически приводит к калибровочной теории, описывающей калибровочные поля, взаимодействующие только с гравитацией. При этом чистая гравитация (тетрадный сектор ТКТГ) оказывается не калибровочным феноменом.

Калибровочные поля ТКТГ дают вклад не только в кручение пространства-времени, но и определяют его кривизну, влияя при этом на движение обычной материи не напрямую, а только через гравитацию. Таким образом, пространство-время ТКТГ – объект существенно более сложный не только математически, но и физически, чем в случае ОТО.

В связи с предложенной ТКТГ возникает ряд вопросов, ответить на которые в рамках одной статьи не представляется возможным. Особый интерес представляют калибровочные поля ТКТГ, взаимодействующие только с гравитацией, для выяснения физической природы которых необходимо решение уравнений, описывающих эти поля и их взаимодействие с тетрадными полями. Это темы последующих публикаций.

Благодарности. Автор выражает благодарность рецензенту, в ответ на замечания которого был рассмотрен случай статического изотропного гравитационного поля и предложена предварительная интерпретация калибровочных полей.

Список литературы

- [1] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick, J. M. Nester, “General relativity with spin and torsion: foundations and prospects”, *Rev. Modern Phys.*, **48**:3 (1976), 393–415.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 2: *Теория поля*, Наука, М., 2016.

- [3] О. В. Бабурова, Б. Н. Фролов, *Математические основы современной теории гравитации*, Прометей, М., 2012.
- [4] В. А. Рубаков, *Классические калибровочные поля. Бозонные теории*, УРСС, М., 2005.
- [5] Ю. Б. Румер, А. И. Фет, *Теория групп и квантованные поля*, УРСС, М., 2013.
- [6] К. Хуанг, *Кварки, лептоны и калибровочные поля*, Мир, М., 1985.
- [7] С. Вайнберг, *Гравитация и космология*, Мир, М., 1975.
- [8] А. Д. Чернин, “Темная энергия и всемирное антитяготение”, *УФН*, **178**:3 (2008), 267–300.
- [9] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1976.

Поступила в редакцию 1.06.2016,
после доработки 21.06.2017