Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. К. Сингх, Н. К. Шарма, А. Беешам, Космология темной энергии типа Бианки-II с затухающим Λ -членом в теории гравитации Бранса-Дикке, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 3, 530–546

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:30:48

© 2017 г. Я. К. Сингх*, Н. К. Шарма*, А. Бешам†

КОСМОЛОГИЯ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ ТИПА БИАНКИ-II С ЗАТУХАЮЩИМ Λ -ЧЛЕНОМ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ БРАНСА–ДИККЕ

Рассмотрен ряд анизотропных моделей темной энергии типа Бианки-II в рамках теории гравитации Бранса–Дикке с переменным параметром уравнения состояния и постоянным параметром замедления. Для получения большинства аналитических решений используется степенная связь между скалярным полем ϕ и масштабным фактором A , а также между средними значениями параметра Хаббла H и масштабного фактора A . Параметр темной энергии ω уравнения состояния и допустимый в модели диапазон его изменения находятся в хорошем согласии с последними данными наблюдений. Было обнаружено, что космологическая постоянная Λ затухает со временем, что также согласуется с последними космологическими наблюдениями. Изучены динамическая устойчивость и физические особенности моделей.

Ключевые слова: пространство-время типа Бианки-II, анизотропная темная энергия, теория гравитации Бранса–Дикке, параметр уравнения состояния, Λ -член.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9241>

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно данным по исследованию большого красного смещения в сверхновых типа Ia (SNeIa) [1], [2] Вселенная наших дней испытывает неожиданное ускоренное расширение из-за наличия загадочной темной энергии (ТЭ). В последние годы большое внимание привлекают экспериментальные данные [3] по ускорению на поздних временах. Последние результаты, полученные при исследовании флуктуаций реликтового микроволнового фона (РМФ) [4] и крупномасштабной структуры (КМС) [5], свидетельствуют в пользу ускоренного расширения Вселенной. По-видимому, ТЭ – наилучший кандидат для объяснения космического ускорения.

*Department of Mathematics, Netaji Subhas Institute of Technology, Faculty of Technology, University of Delhi, India.

E-mail: jainendrrakumar@rediffmail.com, navinsharma2000@gmail.com

†Department of Mathematical Sciences, University of Zululand, Mhlatuze, South Africa.
E-mail: beeshama@unizulu.ac.za

Наиболее важные свидетельства связаны с данными по наблюдению сверхновых типа Ia [6]–[10], РМФ [4], [11], [12] и барионных акустических осцилляций (БАО) [13], [14]. Эти данные подтверждают, что около 76% плотности энергии современной Вселенной заключено в ТЭ. В наши дни полагается, что 96% энергии Вселенной состоит из ТЭ и темной материи (ТМ) (76% ТЭ, 20% ТМ). ТЭ – наиболее распространенный способ объяснения последних наблюдений возрастающей скорости расширения Вселенной. Простейшим кандидатом на роль ТЭ является космологическая постоянная Λ с параметром $\omega = -1$ в уравнении состояния, поскольку она хорошо согласуется с данными наблюдений. В настоящее время Λ по своему динамическому поведению считается постоянной величиной [15]–[17]. Газ Чаплыгина и $f(R)$, где R – скалярная кривизна лагранжиана Эйнштейна–Гильберта, также рассматриваются в качестве возможных моделей ТЭ ввиду отрицательного давления [18]–[29].

Уравнение состояния, описывающее эволюцию ТЭ, принято характеризовать параметром $\omega(t) = p/\rho$ уравнения состояния (УС), который не обязательно постоянен, где p – давление жидкости, а ρ – плотность энергии [30]. Наблюдаемые пределы изменения этого параметра, полученные по данным для сверхновых типа Ia [31] и для сверхновых типа Ia в совокупности с данными по анизотропии космического реликтового излучения (КРИ) и статистикой образования скоплений галактик [5], соответственно суть $-1.67 < \omega < -0.62$ и $-1.33 < \omega < -0.79$. Самые последние результаты получены в 2011 г. в результате комбинации космологических данных по анизотропии РМФ, по фотометрическим расстояниям для сверхновых типа Ia с большим красным смещением и по формированию скоплений галактик. Эти результаты ограничивают значения параметра ТЭ УС в пределах $-1.44 < \omega < -0.92$ с уровнем достоверности 68% [12], [32]. В последние годы для моделей с переменным Λ использовались различные зависящие от времени параметры УС [33], [34]. Недавно несколько моделей ТЭ с переменным параметром ω предложили Акарсу и Килинк [35], а также Сингх и Шарма [36].

Изотропные модели могут играть важную роль при изучении модели КМС Вселенной. Однако считается, что космическое ускорение на поздних временах, а также ТЭ вместе с модифицированными теориями гравитации стали более популярны среди многих исследователей. Бранс и Дикке предложили скалярно-тензорное обобщение общей теории относительности, широко известное как теория гравитации Бранса–Дикке (БД) [37]. Модификация гравитации в скалярно-тензорных теориях вызвана одним или более скалярными полями. Здесь мы рассматриваем только одно поле с действием вида

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} \left\{ \phi R - \frac{\varpi}{\phi} \phi_{;i} \phi^{;i} + L_m \right\} d^4x, \quad (1)$$

где $\sqrt{-g} d^4x$ обозначает четырехмерный объем, ϖ – константа связи БД, L_m получается из лагранжиана теории поля с плоским пространством-временем с помощью принципа эквивалентности, ϕ – скалярное поле. Теперь уравнения поля БД можно легко получить, варьируя уравнение (1) по g_{ij} и ϕ следующим образом:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = -\frac{8\pi}{\phi} T_{ij} - \frac{\varpi}{\phi^2} \left(\phi_{;i} \phi_{;j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{;k} \phi^{;k} \right) - \frac{1}{\phi} (\phi_{i;j} - g_{ij} \phi^{;k}_{;k}), \quad (2)$$

$$\square \phi = \phi^{;k}_{;k} = g^{ik} \phi_{i;k} = \frac{8\pi}{(3 + 2\varpi)\phi} T, \quad (3)$$

где $T = g^{ij}T_{ij}$ – след тензора энергии-импульса, $\square$ – оператор Даламбера, ϖ – безразмерная константа связи. Отметим, что общая теория относительности соответствует предельному случаю $\varpi \rightarrow \infty$. Поэтому можно сравнить наши результаты с экспериментальными данными для существенно больших значений ϖ . Запятая и точка с запятой означают частную и ковариантную производную соответственно. Модель типа Бианки-II является пространственно однородной и полностью анизотропной космологической моделью, которая играет важную роль в описании Вселенной на ранних стадиях ее эволюции. В последние годы изучение моделей типа модели Бианки привлекает многих исследователей [38]–[46] в связи с теорией БД, а также с различными другими альтернативными теориями гравитации.

В данной работе для нахождения решений используется степенная связь между скалярным полем ϕ и масштабным фактором A . Параметр ω УС и используемый интервал его значений для моделей ТЭ хорошо согласуются с последними данными наблюдений сверхновых типа Ia, с совокупностью данных по сверхновым типа Ia, анизотропии реликтового излучения и статистикой образования скоплений галактик, а также с совокупностью космологических данных по анизотропии РМФ, по фотометрическим расстояниям для сверхновых типа Ia с большим красным смещением и по формированию скоплений галактик. Было найдено, что космологическая постоянная Λ в этих моделях является положительной функцией времени, которая приближается к малым положительным значениям в нашу эпоху, что подтверждается последними космологическими наблюдениями. Целью настоящей работы является изучение изменения во времени космологической постоянной Λ с использованием динамики исследуемых моделей с учетом последних наблюдений по ускоренному расширению Вселенной. Обсуждается также физическое поведение и динамическая устойчивость модели.

2. МЕТРИКА И УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

Определим интервал в модели типа Бианки-II следующим образом:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx - z dy)^2 - b^2(t) dy^2 - c^2(t) dz^2, \quad (4)$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – космические масштабные факторы.

Тензор энергии-импульса анизотропной жидкости ТЭ возьмем в виде

$$T_j^i = \text{diag}[\rho, -p_x, -p_y, -p_z] = \text{diag}[1, -\omega_x, -\omega_y, -\omega_z]\rho, \quad (5)$$

где ρ – плотность энергии жидкости, p_x , p_y и p_z – направляющие давления, а ω_x , ω_y и ω_z – направляющие параметры ω в УС жидкости вдоль осей x , y и z соответственно. Теперь параметризуем выражение (5), выбирая $\omega_y = \omega_z = \omega$ и вводя параметр асимметрии δ , который представляет собой отклонение параметра ω УС на оси x от плоскости (y, z) :

$$T_j^i = \text{diag}[1, -(\omega + \delta), -\omega, -\omega]\rho, \quad (6)$$

где ω и δ не обязательно постоянны, они являются функциями космического времени t .

Для пространства-времени типа Бианки II (4) уравнения поля (2) принимают вид

$$\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{c}}{c} \frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{4} \frac{a^2}{b^2 c^2} - \frac{\dot{\phi}}{\phi} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{\phi}}{2\phi} \varpi \right) = -\frac{8\pi}{\phi} \rho, \quad (7)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} - \frac{3}{4} \frac{a^2}{b^2 c^2} - \frac{\dot{\phi}}{\phi} \left(\phi \ddot{\phi} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{\phi}}{2\phi} \varpi \right) = \frac{8\pi}{\phi} (\omega + \delta) \rho, \quad (8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{c}}{c} + \frac{1}{4} \frac{a^2}{b^2 c^2} - \frac{\dot{\phi}}{\phi} \left(\phi \ddot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{\phi}}{2\phi} \varpi \right) = \frac{8\pi}{\phi} \omega \rho, \quad (9)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{b}}{b} + \frac{1}{4} \frac{a^2}{b^2 c^2} - \frac{\dot{\phi}}{\phi} \left(\phi \ddot{\phi} + \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{\phi}}{2\phi} \varpi \right) = \frac{8\pi}{\phi} \omega \rho. \quad (10)$$

Уравнение сохранения энергии $T_{ij}^{ij} = 0$ записывается как

$$\dot{\rho} + 3(1 + \omega)\rho H + \rho(\delta H_x) = 0, \quad (11)$$

где точка “.” сверху означает производную по космическому времени t . Направляющие параметры Хаббла, выражающие скорость расширения Вселенной вдоль направлений осей x , y и z , можно определить по формулам

$$H_x = \frac{\dot{a}}{a}, \quad H_y = \frac{\dot{b}}{b}, \quad H_z = \frac{\dot{c}}{c}. \quad (12)$$

Обобщенный средний параметр Хаббла H , который выражает объемную скорость расширения Вселенной, задается выражением

$$H = \frac{1}{3}(H_x + H_y + H_z). \quad (13)$$

Средний масштабный фактор A и объемный масштабный фактор V определяются следующим образом:

$$V = A^3 = abc. \quad (14)$$

С помощью формул (12)–(14) получаем

$$H = \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} = \frac{1}{3}(H_x + H_y + H_z) = \frac{\dot{A}}{A}. \quad (15)$$

Средний анизотропный параметр расширения Δ играет чрезвычайно важную роль в определении того, является ли модель изотропной или анизотропной, и имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{3} \frac{\sigma^2}{H^2} = \frac{1}{3} \sum_{i=x}^z \left(\frac{H_i - H}{H} \right)^2, \quad (16)$$

где σ – скаляр сдвига, Δ – мера отклонения от изотропного расширения. Вселенная расширяется изотропно при $\Delta = 0$. Модель непрерывно приближается к изотропной, если $V \rightarrow \infty$ и $\Delta = 0$ при $t \rightarrow \infty$ [47]. Для физически реалистичных моделей можно ожидать, что плотность энергии принимает положительные значения для ТЭ-жидкости при $t \rightarrow \infty$.

Найдем теперь скаляр расширения и скаляр сдвига для метрики (4). Скаляр расширения определяется по формуле

$$\Theta = 3H, \quad (17)$$

а скаляр сдвига имеет вид

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=x}^z H_i^2 - 3H^2 \right]. \quad (18)$$

Безразмерный средний параметр замедления (ПЗ) q в космологии является мерой космического ускорения Вселенной и задается выражением

$$q = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) - 1. \quad (19)$$

Вселенная испытывает ускоренное объемное расширение при $q < 0$, замедленное объемное расширение при $q > 0$ и постоянное ускорение при $q = 0$. Как упоминалось ранее, параметр q изначально считался положительным, но последние наблюдения, в частности по данным о сверхновой, свидетельствуют о его отрицательности. Таким образом, поведение модели зависит от знака q . Положительный ПЗ соответствует замедляющейся модели, а его отрицательное значение свидетельствует об ускорении.

Рассмотрим степенную связь между средним масштабным фактором A и скалярным полем ϕ [38] следующего вида:

$$\phi = lA^\alpha, \quad (20)$$

где l – коэффициент пропорциональности, а α – показатель степени. Воспользуемся также хорошо известным соотношением [48] между средним параметром Хаббла H и средним масштабным фактором A

$$H = \chi A^{-n}, \quad (21)$$

где $\chi > 0$ и $n \geq 0$. Это соотношение является важным, поскольку оно приводит к постоянному значению ПЗ. Действительно, из выражений (15) и (21) получаем, что

$$\dot{A} = \chi A^{-n+1}, \quad (22)$$

с помощью этого уравнения находим, что ПЗ есть постоянная, т. е.

$$q = n - 1. \quad (23)$$

Интегрируя уравнение (22), записываем равенства

$$A = (n\chi t + k_1)^{1/n}, \quad n \neq 0, \quad (24)$$

$$A = k_2 e^{\chi t}, \quad n = 0, \quad (25)$$

где k_1 и k_2 – постоянные интегрирования. Таким образом, мы получили два выражения для среднего масштабного фактора, соответствующие двум разным моделям Вселенной.

3. ТЭ-МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ ПРИ $n \neq 0$

Обсудим теперь модель Вселенной при $n \neq 0$, т.е. при $A = (n\chi t + k_1)^{1/n}$. Для этой модели ϕ приобретает вид

$$\phi = l(n\chi t + k_1)^{\alpha/n}. \quad (26)$$

Уравнения полей (7)–(11) представляют собой систему пяти независимых уравнений с семью неизвестными параметрами a , b , c , ω , δ , ρ и ϕ . Поэтому, чтобы получить решения системы уравнений в явном виде, требуются некоторые дополнительные уравнения, связывающие эти параметры. Предположим, что

$$b = a^r, \quad (27)$$

$$c = a^s, \quad (28)$$

где r и s – произвольные постоянные. С помощью уравнения (6) записываем равенство

$$\square\phi = \ddot{\phi} + \dot{\phi}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) = \frac{8\pi(1 - 3\omega - \delta)\rho}{(3 + 2\varpi)\phi}. \quad (29)$$

Вычитая уравнение (9) из (10), получаем уравнение

$$\frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\ddot{b}}{b} + \left(\frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{b}}{b}\right)\left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{\phi}}{\phi}\right) = 0. \quad (30)$$

Решая его с помощью (26), находим равенство для метрических коэффициентов

$$a = \left\{ \frac{(r + s + 1)(n\chi t + k_1)^{\alpha/n+1}}{\chi(\alpha + n)} \right\}^{1/(r+s+1)}. \quad (31)$$

Физические параметры, т.е. направляющие параметры Хаббла H_i , средний обобщенный параметр Хаббла H , средний параметр анизотропии Δ , пространственный объем V , скаляр расширения Θ и скаляр сдвига σ^2 задаются выражениями

$$H_x = \frac{\chi(\alpha + n)}{(r + s + 1)(n\chi t + k_1)}, \quad H_y + H_z = (r + s)H_x, \quad (32)$$

$$H = \frac{\chi(\alpha + n)}{3(n\chi t + k_1)}, \quad (33)$$

$$\Delta = \frac{3(r^2 + s^2 + 1)}{(r + s + 1)^2} - 1, \quad (34)$$

$$V = \frac{(r + s + 1)(n\chi t + k_1)^{\alpha/n+1}}{\chi(\alpha + n)}, \quad (35)$$

$$\Theta = \frac{\chi(\alpha + n)}{(n\chi t + k_1)}, \quad (36)$$

$$\sigma^2 = \frac{\chi^2(\alpha + n)^2}{2(n\chi t + k_1)^2} \left[\frac{(r^2 + s^2 + 1)}{(r + s + 1)^2} - \frac{1}{3} \right]. \quad (37)$$

Мы видим, что в рассматриваемой космологической модели Вселенная испытывает начальную сингулярность точечного типа при $t = -k_1/n\chi$. Пространство-время

удовлетворительно ведет себя в области $-k_1/n\chi < t < \infty$. В начальный момент $t = -k_1/n\chi$ параметры H , Θ и σ^2 расходятся. Так что Вселенная рождается из начальной сингулярности с бесконечными скалярами сдвига и расширения. Кроме того, H , Θ и σ^2 стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Поэтому расширение и сдвиг постепенно исчезают. Здесь H , Θ и σ^2 – величины, монотонно убывающие по t в интервале $-k_1/n\chi < t < \infty$. Сдвиг стремится к нулю значительно быстрее, чем расширение. Соответствующий объем V стремится к нулю в точке начальной сингулярности. С течением времени Вселенная устремляется к бесконечному объему при $t \rightarrow \infty$. Скаляр расширения Θ в интервале $-k_1/n\chi < t < \infty$ всегда положителен. Поэтому наши модели описывают расширяющиеся космологические модели в присутствии ТЭ. Модель описывает ускоряющуюся модель ($q < 0$) при $n < 1$ и замедляющуюся модель ($q > 0$) при $n > 1$. Отношение σ^2/Θ^2 в модели есть постоянная величина. Это указывает на то, что модель не приближается к изотропной с расширением Вселенной. Средний параметр анизотропии Δ остается неизменным на протяжении всей эволюции Вселенной, поскольку он не зависит от t . В этой модели существует горизонт частиц, поскольку интеграл

$$\int_{t_0}^t \frac{dt'}{V(t')} = \left[\frac{-(\alpha + n)}{\alpha(r + s + 1)(n\chi t' + k_1)^{\alpha/n}} \right]_{t_0}^t \quad (38)$$

сходится.

Решая уравнение поля (7) с помощью формул (26) и (31), получаем равенство

$$\rho = \frac{l(n\chi t + k_1)^{\alpha/n-2}}{8\pi} [\rho_1 + \rho_2], \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \chi^2(\alpha + n) \left\{ \alpha - \frac{(r + rs + s)(\alpha + n)}{(r + s + 1)^2} \right\}, \\ \rho_2 &= \frac{(n\chi t + k_1)^2}{4} \left\{ \frac{(r + s + 1)(n\chi t + k_1)^{\alpha/n+1}}{\chi(\alpha + n)} \right\}^{-2+4/(r+s+1)} - \frac{\varpi \chi^2 \alpha^2}{2}. \end{aligned}$$

Решая уравнение поля (9) с помощью формул (26), (31) и (39), получаем равенство

$$\omega = -1 + \frac{l(n\chi t + k_1)^{\alpha/n-2}}{8\pi\rho} [\omega_1 + \omega_2 - \omega_3], \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\chi^2(\alpha + n)}{(r + s + 1)^2} \{ \alpha(r^2 + s^2 + 1) - 2n(r + rs + s) \}, \\ \omega_2 &= \frac{(n\chi t + k_1)^2}{2} \left\{ \frac{(r + s + 1)(n\chi t + k_1)^{\alpha/n+1}}{\chi(\alpha + n)} \right\}^{-2+4/(r+s+1)}, \\ \omega_3 &= \chi^2 \{ \alpha(\alpha - n) - \varpi \alpha^2 \}. \end{aligned}$$

Рис. 1. Зависимость плотности энергии ρ от космического времени t (а); зависимость параметра уравнения состояния ω от космического времени t (б); зависимость анизотропии ТЭ-жидкости δ/ω от космического времени t (в); зависимость космологической постоянной Λ от космического времени t (г).

Вычитая из уравнения поля (8) уравнение (10) и используя соотношения (26) и (31), выводим, что

$$\delta = -\frac{l(n\chi t + k_1)^{\alpha/n-2}}{8\pi\rho}[\delta_1 + \delta_2], \quad (41)$$

где

$$\delta_1 = \frac{2rs\chi^2(\alpha+n)^2}{(r+s+1)^2(n\chi t + k_1)^2},$$

$$\delta_2 = (n\chi t + k_1)^2 \left\{ \frac{(r+s+1)(n\chi t + k_1)^{\alpha/n+1}}{\chi(\alpha+n)} \right\}^{-2+4/(r+s+1)}.$$

Из равенства (40) видно, что параметр ω является функцией космического времени t и поэтому в равной мере он может быть функцией красного смещения z или масштабного фактора A . Параметризация, связанная с зависимостью ω от масштабного фактора, имеет вид

$$\omega(A) = \omega_0 + \omega_A(1 - A), \quad (42)$$

где ω_0 – текущее значение при $A = 1$, а ω_A – мера изменения ω' во времени [49]. Сравнивая результаты данной работы с экспериментальными результатами, приходим к выводу, что предел параметра ω надежно попадает в допустимый интервал изменения параметра УС, который указан в разделе 1. Заметим, что при $t = t_c$ параметр ω обращается в нуль, где t_c – критическое время, которое получается из равенства (40), и его значение равно $t_c = 0.02948$ (см. рис. 16). Эта модель представляет пылевую Вселенную в момент $t = t_c$, фаза преобладания материи во Вселенной соответствует $t \geq t_c$, при этом $\omega \geq 0$, а фаза преобладания ТЭ соответствует $t < t_c$, при этом $\omega < 0$, как показано на рис. 16. Значение параметра ω УС для данной модели ограничено следующими пределами наблюдений:

- $-1.67 < \omega < -0.62$, что находится в хорошем согласии с результатами, полученными по данным наблюдений за сверхновыми типа Ia [31];
- $-1.33 < \omega < -0.79$, что находится в хорошем согласии с результатами, полученными по данным наблюдений за сверхновыми типа Ia в совокупности с данными по анизотропии космического реликтового излучения и статистикой формирования скоплений галактик [5];
- $-1.44 < \omega < -0.92$, что находится в хорошем согласии с результатами, полученными из совокупности космологических данных по анизотропии космического реликтового излучения, по фотометрическим расстояниям для сверхновых типа Ia с большим красным смещением и по формированию скоплений галактик в 2009 г. (с уровнем достоверности 68% [12], [32]).

Рис. 16 демонстрирует также изменение параметра УС ω в зависимости от космического времени t в двух фазах эволюции Вселенной: в фазе ускорения ($q < 0$) и в фазе замедления ($q > 0$) при соответствующем выборе констант интегрирования и других физических параметров. Мы видим, что параметр ω быстро увеличивается в начальной стадии и достигает максимального положительного значения $\omega \simeq 53.44$ в эпоху $t \simeq 0$, которая ближе к ранним стадиям эволюции Вселенной. Он резко уменьшается до минимального отрицательного значения $\omega \simeq -50.61$ в эпоху $t \simeq 0$ и затем проходит через различные фазы ТЭ-модели Вселенной, такие как

- фантомную фазу, когда $\omega < -1$;
- квантовую фазу, которая включает в себя свойства фазы квинтэссенции и фантомной фазы с предельной линией фантомной фазы $\omega = -1$;
- фазу космологической постоянной Λ , которая считается простейшим случаем ТЭ, когда $\omega = -1$;
- фазу квинтэссенции, когда $-1 < \omega < -1/3$ [30];
- фазу, когда ω стремится к нулю в эпоху $t \simeq 0.02948$, что может соответствовать описанию пылевой Вселенной в это время;
- фазу, когда на более поздней стадии ω возрастает и достигает максимального значения $\omega \simeq 0.8924$ в интервале $0 < t < 12$.

Таким образом, можно сказать, что ранняя стадия Вселенной, в которой доминирует материя, превращается в фазу Вселенной, в которой доминирует ТЭ, которая на поздних временах снова превращается в фазу Вселенной, в которой доминирует материя. Плотность энергии ρ жидкости – убывающая функция времени и стремится к $\rho \simeq 0$ при $t \simeq 20$, как показано на рис. 1а. Анизотропию ТЭ-жидкости можно измерить с помощью параметра δ/ω , минимальное значение которого равно $\delta/\omega \simeq 4.939$ при $t \simeq -0.153$, далее он достигает значения $(\delta/\omega)_{\max} \simeq 745.3$ при $t \simeq 0.4464$, затем убывает до $(\delta/\omega)_{\min} \simeq -710.4$ при $t \simeq 0.4839$, и в асимптотике $\delta/\omega \simeq 0$ в интервале $0.7462 \leq t \leq 10.07$, как показано на рис. 1в. Таким образом, мы видим, что в этой модели анизотропная ТЭ-жидкость исчезает в интервале $0.7462 \leq t \leq 10.07$.

В отсутствие кривизны плотность энергии вещества Ω_m и плотность ТЭ Ω_Λ связаны равенством

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1, \quad (43)$$

где $\Omega_m = \rho/3H^2$ и $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H^2$. Таким образом, уравнение (42) сводится к следующему:

$$\Lambda = 3H^2 - \rho. \quad (44)$$

Выражение для космологической постоянной Λ можно получить с помощью соотношений (33), (39) и (44):

$$\Lambda = \frac{\chi^2(\alpha + n)^2}{3(n\chi t + k_1)^2} - \frac{l(n\chi t + k_1)^{\alpha/n-2}}{8\pi}(\rho_1 + \rho_2). \quad (45)$$

Заметим, что Λ -член всегда положителен при

$$8\pi\chi^2(\alpha + n)^2 > 3l(n\chi t + k_1)^{\alpha/n}. \quad (46)$$

Этот Λ -член является убывающей функцией времени на интервале $0 \leq t \leq 8.5$, при этом $\Lambda_{\min} \simeq 0$ (см. рис. 1г), что согласуется с последними космологическими наблюдениями, которые свидетельствуют в пользу существования положительного Λ -члена, равного по величине $\Lambda(G\hbar/c^3) \simeq 10^{-123}$. Таким образом, наша модель ТЭ указывает на ускоряющееся расширение Вселенной, которое может возникнуть из-за вклада в вакуумную энергию от параметра УС в зависящем от времени фоне.

Модель физически приемлема, если скорость звука v_s меньше скорости света [50], т. е. если

$$0 \leq v_s = \frac{dp}{d\rho} < 1. \quad (47)$$

Скорость звука определяется выражением

$$v_s = -1 + \left[\frac{l\chi(\alpha - 2n)(n\chi t + k_1)^{\alpha/n-3}(w_1 + w_2 - w_3) + 4l(n\chi t + k_1)^{\alpha/n-2}w_2X}{l(n\chi t + k_1)^{\alpha/n-2}(2\rho_2 + \varpi\chi^2\alpha^2)X + l\chi(\rho_1 + \rho_2)(\alpha - 2n)(n\chi t + k_1)^{\alpha/n-3}} \right], \quad (48)$$

где

$$X = \frac{1}{(n\chi t + k_1)} \left\{ n\chi + \frac{\chi(\alpha + n)(1 - r - s)}{(r + s + 1)} \right\}.$$

Рис. 2. Зависимость скорости звука v_s от космического времени t (а); зависимость плотности энергии ρ от космического времени t (б); зависимость параметра ω УС от космического времени t (в); зависимость анизотропии ТЭ-жидкости δ/ω от космического времени t (г).

На рис. 2а показано поведение скорости звука v_s по отношению к космическому времени t . Выбирая подходящий параметр, получаем устойчивую область в интервале $16.49 < t < 500$, где скорость звука $v_s \simeq 0.994$. Таким образом, модель физически приемлема в интервале $1.51 < t < 500$, когда скорость звука изменяется в интервале $0.0552 < v_s < 0.994$.

4. ТЭ-МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ ПРИ $N = 0$

Средний масштабный фактор для данной модели Вселенной $A = le^{\chi t}$, и, следовательно, ϕ принимает вид

$$\phi = lk_2^\alpha e^{\chi \alpha t}. \quad (49)$$

Решая уравнение (30) с помощью равенств (27), (28) и (49), получаем выражение для метрических коэффициентов

$$a = \left(\frac{r+s+1}{\alpha\chi} \right)^{1/(r+s+1)} \exp \left(\frac{\alpha\chi t}{r+s+1} \right). \quad (50)$$

Физические параметры, такие как направляющие параметры Хаббла H_i , средняя обобщенная постоянная Хаббла H , средний параметр анизотропии Δ , пространственный объем V , скаляр расширения Θ и скаляр сдвига σ^2 , имеют вид

$$H_x = \frac{\chi\alpha}{r+s+1}, \quad H_y + H_z = (r+s)H_x, \quad (51)$$

$$H = \frac{\chi\alpha}{3}, \quad (52)$$

$$\Delta = \frac{3(r^2+s^2+1)}{(r+s+1)^2} - 1, \quad (53)$$

$$V = \left(\frac{r+s+1}{\alpha\chi} \right) e^{\alpha\chi t}, \quad (54)$$

$$\Theta = \alpha\chi, \quad (55)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha^2\chi^2}{2} \left[\frac{r^2+s^2+1}{(r+s+1)^2} - \frac{1}{3} \right]. \quad (56)$$

В этом случае мы видим, что модель Вселенной является экспоненциальной со средним масштабным фактором $A = k_2 e^{\chi t}$. Поэтому модель не сингулярна, поскольку экспоненциальная функция не обращается в ноль. Все физические параметры H_i , H , Δ , Θ , и σ^2 конечны. Объемный масштабный фактор V растет экспоненциально со временем, что говорит о том, что Вселенная начала расширяться из нулевого объема в бесконечном прошлом. Скаляр расширения Θ всегда положителен при $\chi, \alpha > 0$, а параметр замедления $q < 0$ при $n = 0$. Поэтому ТЭ-модель описывает ускоряющееся расширение Вселенной. Отношение σ^2/Θ^2 для данной модели является постоянной величиной. Это указывает на то, что модель не достигает изотропии на временах эволюции Вселенной. Средний параметр анизотропии Δ не меняется на протяжении эволюции Вселенной, поскольку он не зависит от времени t . В этой модели существует горизонт частиц, поскольку сходится интеграл

$$\int_{t_0}^t \frac{dt}{V(t)} = \frac{e^{-\chi\alpha t_0} - e^{-\chi\alpha t}}{r+s+1}. \quad (57)$$

Решая уравнение поля (7) с помощью формул (49) и (50), выводим равенство

$$\rho = \frac{lk_2^\alpha e^{\alpha\chi t}}{8\pi} [\rho_1 + \rho_2], \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha^2\chi^2 \left\{ 1 - \frac{(r+rs+s)}{(r+s+1)^2} - \frac{\varpi}{2} \right\}, \\ \rho_2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{r+s+1}{\alpha\chi} \right)^{-2+4/(r+s+1)} \exp \left\{ \frac{2\alpha\chi t(1-r-s)}{(r+s+1)} \right\}. \end{aligned}$$

Решая уравнение поля (9) с помощью формул (49), (50) и (58), получаем выражение

$$\omega = -1 + \frac{lk_2^\alpha e^{\alpha\chi t}}{8\pi\rho}[\omega_1 + \omega_2], \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha^2 \chi^2 \left\{ \frac{(r^2 + s + 1)}{(r + s + 1)^2} - 1 - \varpi \right\}, \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{r + s + 1}{\alpha\chi} \right)^{-2+4/(r+s+1)} \exp \left\{ \frac{2\alpha\chi t(1 - r - s)}{(r + s + 1)} \right\}. \end{aligned}$$

Вычитая уравнение поля (10) из уравнения (8) и используя равенства (49), (50) и (58), приходим к формуле

$$\delta = - \frac{lk_2^\alpha \left(\frac{r+s+1}{\alpha\chi} \right)^{-2+4/(r+s+1)} \exp \left\{ \alpha\chi t \left(\frac{3-r-s}{r+s+1} \right) \right\}}{8\pi\rho}. \quad (60)$$

На рис. 2в показано изменение параметра ω УС как функции космического времени t . Если сравнить результаты настоящей работы с упомянутыми выше экспериментальными данными, то видно, что предел параметра ω , получающийся из выражения (59), можно хорошо согласовать с допустимым интервалом изменения значений параметра УС. Обнаружено критическое время $t = t_c \simeq 75.72$, при котором ω обращается в нуль. Также видно, что ранняя стадия существования реальной материи при $t \leq t_c \simeq 75.72$, где $\omega \geq 0$, позже превращается в стадию Вселенной с преобладанием ТЭ при $t > t_c \simeq 75.72$, где $\omega < 0$. В этой модели Вселенная зарождается в конечном прошлом и параметр достигает положительного значения $\omega \simeq 0.6993$, что происходит ближе к ранним стадиям эволюции Вселенной. Параметр резко уменьшается до минимального отрицательного значения $\omega \simeq -1.57$ в эпоху $t \simeq 405$. Кривая проходит через различные фазы ТЭ-модели Вселенной, такие как

- фантомную фазу, когда $\omega < -1$;
- квантовую фазу, которая содержит свойства как фазы квинтэссенции, так и фантомной фазы с предельной линией фантомной фазы $\omega = -1$;
- фазу космологической постоянной Λ , которая считается простейшим случаем ТЭ при $\omega = -1$;
- фазу квинтэссенции, когда $-1 < \omega < -1/3$ [30];
- фазу, когда ω стремится к нулю в эпоху $t \simeq 75.72$, что может подходить для описания пылевой Вселенной в то время;
- фазу, когда на более поздней стадии параметр $\omega \simeq -1.57$ почти стабилен в интервале $405 < t < 900$.

Таким образом, можно сказать, что ранняя фаза Вселенной с преобладанием материи переходит в фазу Вселенной с преобладанием ТЭ. Плотность энергии ρ жидкости в ускоряющейся фазе Вселенной является убывающей функцией времени, как показано на рис. 2б. Анизотропию ТЭ-жидкости можно измерить с помощью параметра δ/ω . Его начальное значение равно $\delta/\omega \simeq 0.0997$ при $t \simeq 0$, оно остается стабильным в интервале $0 < t < 52.06$, а затем убывает до $(\delta/\omega)_{\min} \simeq -60$ при $t \simeq 61$, как показано на рис. 2г. Таким образом, мы видим, что в этой модели Вселенная

Рис. 3. Зависимость космологической постоянной Λ от космического времени t (а); зависимость скорости звука v_s от космического времени t (б).

заполнена изотропной ТЭ-жидкостью в интервале $0 < t < 52.06$. Космологическая постоянная Λ в отсутствие кривизны задается выражением

$$\Lambda = \frac{\chi^2 \alpha^2}{3} - \frac{lk_2^\alpha e^{\alpha\chi t}}{8\pi} (\rho_1 + \rho_2). \quad (61)$$

Мы видим, что Λ -член всегда положителен при

$$8\pi\chi^2\alpha^2 > 3lk_2^\alpha e^{\alpha\chi t} (\rho_1 + \rho_2). \quad (62)$$

В этом случае Λ -член является убывающей функцией времени в интервале $0 < t < 18$. Его начальное значение есть $\Lambda \simeq 0.05284$ при $t \simeq 0$, затем он достигает величины $\Lambda_{\min} \simeq -0.01$ при $t \simeq 18$ и равен нулю при $t \simeq 18$. Поэтому модель согласуется с последними космологическими наблюдениями, которые указывают на существование положительного Λ -члена, по величине равного $\Lambda(G\hbar/c^3) \simeq 10^{-123}$, как показано на рис. 3а. Следовательно, такая ТЭ-модель демонстрирует ускоряющееся расширение Вселенной. Модель физически приемлема при скорости звука v_s , меньшей скорости света [50], т. е. когда

$$v_s = 1 + \frac{2lk_2^\alpha \alpha \chi (w_1 + w_2) e^{\alpha\chi t}}{lk_2^\alpha (1 - r - s) \left(\frac{r+s+1}{\alpha\chi} \right)^{-3+4/(r+s+1)} \exp\left\{ \frac{\alpha\chi t(3-r-s)}{(r+s+1)} \right\}}. \quad (63)$$

На рис. 3б показано поведение скорости звука v_s по отношению к космическому времени t . Выбором подходящего параметра можно получить устойчивую область в интервале $13.16 < t < 504.2$, где скорость звука $v_s \simeq 0.994$. Таким образом, модель физически приемлема в интервале $0 < t < 500$.

5. ОБСУЖДЕНИЯ И ВЫВОДЫ

Настоящая работа посвящена исследованию решений космологической модели типа Бианки-II в теории гравитации БД на фоне анизотропной ТЭ. Для нахождения решений использована степенная связь между ϕ и R . Предположение о постоянном параметре замедления приводит к двум моделям Вселенной, а именно, к степенной и экспоненциальной моделям.

- В степенной модели Вселенной, соответствующей $n \neq 0$ со средним масштабным фактором $A = (n\chi t + k_1)^{1/n}$, появляется начальная сингулярность *точечного* типа при $t = -k_1/n\chi$. В этой точке все физические параметры H_x , H_y , H_z , H , Θ , и σ^2 бесконечны, а объемный масштабный фактор V обращается в нуль. Таким образом, Вселенная зарождается из начальной сингулярности с бесконечной скоростью сдвига и расширения. Условие изотропности $\sigma^2/\Theta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ также удовлетворяется. Следовательно, на основе этих наблюдений мы приходим к выводу, что модель начинает расширение с нулевым объемом и продолжает расширяться при $0 < n < 1$.

- Экспоненциальная модель Вселенной соответствует $n = 0$ со средним масштабным фактором $A = k_2 e^{\chi t}$. В этой модели не существует физической сингулярности, потому что экспоненциальная функция является асимптотикой в бесконечном прошлом. Все физические параметры H_i , H , Δ , Θ и σ^2 конечны, поскольку метрические функции в этой модели не обращаются в нуль. Объемный масштабный фактор V экспоненциально возрастает со временем. Этот факт указывает на то, что Вселенная начинает расширение с нулевым объемом из бесконечного прошлого. Скаляр расширения Θ и космологическая постоянная Λ всегда положительны. Поэтому ТЭ-модель в этом случае описывает ускоряющееся расширение Вселенной.

- Обе рассмотренные ТЭ-модели полностью анизотропны и указывают на ускоряющееся расширение Вселенной. В обеих моделях существует горизонт частиц. В обеих ТЭ-моделях космологические решения согласуются с последними космологическими наблюдениями.

Благодарности. Авторы выражают благодарность главе Netaji Subhas Institute of Technology профессору Й. Сингху за непрерывную поддержку и обеспечение выполнения данной работы, а также признательны рецензенту за полезные замечания и предложения.

Список литературы

- [1] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber et al. [Supernova Cosmology Project Collab.], "Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae", *Astrophys. J.*, **517**:2 (1999), 565–586.
- [2] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis et al. [Supernova Search Team Collab.], "Observational evidence from supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant", *Astron. J.*, **116**:3 (1998), 1009–1038.
- [3] C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw et al., "First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: preliminary maps and basic results", *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **148**:1 (2003), 1–27, arXiv: astro-ph/0302207.
- [4] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, "First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters", *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **148**:1 (2003), 175–194.
- [5] M. Tegmark, M. A. Strauss, M. R. Blanton et al., "Cosmological parameters from SDSS and WMAP", *Phys. Rev. D*, **69**:10 (2004), 103501, 26 pp.

- [6] P. Astier, J. Guy, N. Regnault et al., “The supernova legacy survey: measurement of Ω_M , Ω_Λ and w from the first year data set”, *Astron. Astrophys.*, **447**:1 (2006), 31–48.
- [7] A. G. Riess, L.-G. Strolger, S. Casertano et al., “New Hubble Space Telescope discoveries of type Ia Supernovae at $z \geq 1$: narrowing constraints on the early behavior of dark energy”, *Astrophys. J.*, **659**:1 (2007), 98–121, arXiv:astro-ph/0611572 .
- [8] W. M. Wood-Vasey, G. Miknaitis, C. W. Stubbs et al., “Observational constraints on the nature of dark energy: first cosmological results from the ESSENCE supernova survey”, *Astron. J.*, **666**:2 (2007), 694–715.
- [9] T. M. Davis, E. Mortsell, J. Sollerman et al., “Scrutinizing exotic cosmological models using ESSENCE supernova data combined with other cosmological probes”, *Astron. J.*, **666**:2 (2007), 716–725.
- [10] M. Kowalski, D. Rubin, G. Aldering et al., “Improved cosmological constraints from new, old, and combined supernova data sets”, *Astron. J.*, **686**:2 (2008), 749–778.
- [11] D. N. Spergel, R. Bean, O. Doré et al., “Three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: implications for cosmology”, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **170**:2 (2007), 377–408.
- [12] E. Komatsu, K. M. Smith, J. Dunkley et al., “Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation”, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **192**:2 (2011), 18, 47 pp.
- [13] D. J. Eisentein, I. Zehavi, D. W. Hogg et al., “Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies”, *Astron. J.*, **633**:2 (2005), 560–574.
- [14] W. J. Percival, B. A. Reid, D. J. Eisenstein et al., “Baryon acoustic oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 galaxy sample”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **401**:4 (2010), 2148–2168.
- [15] J. M. Overduin, F. I. Cooperstock, “Evolution of the scale factor with a variable cosmological term”, *Phys. Rev. D*, **58**:4 (1998), 0435506, 23 pp.
- [16] V. Sahni, A. Starobinsky, “The case for a positive cosmological lambda-term”, *Internat. J. Modern Phys. D*, **9**:4 (2000), 373–443, arXiv:astro-ph/9904398.
- [17] S. M. Carroll, “The cosmological constant”, *Living Rev. Relativity*, **4** (2001), 2001-1, 80 pp.
- [18] S. K. Srivastava, “Future universe with $w < -1$ without big smash”, *Phys. Lett. B*, **619**:1–2 (2005), 1–4.
- [19] O. Bertolami, A. A. Sen, S. Sen, P. T. Silva, “Latest supernova data in the framework of the generalized Chaplygin gas model”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **353**:1 (2004), 329–337.
- [20] M. C. Bento, O. Bertolami, A. A. Sen, “Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification”, *Phys. Rev. D*, **66**:4 (2002), 043507, 5 pp.
- [21] N. Bilic, G. B. Tupper, R. Viollier, “Unification of dark matter and dark energy: the inhomogeneous Chaplygin gas”, *Phys. Lett. B*, **535**:1–4 (2002), 17–21.
- [22] P. P. Avelino, L. M. G. Beça, J. P. M. de Carvalho, C. J. A. P. Martins, P. Pinto, “Alternatives to quintessence model building”, *Phys. Rev. D*, **67**:2 (2003), 023511, 8 pp.
- [23] H. Amirhashchi, A. Pradhan, B. Saha, “An interacting two-fluid scenario for dark energy in an FRW Universe”, *Chin. Phys. Lett.*, **28**:3 (2011), 039801, 4 pp.
- [24] S. Capozziello, “Curvature quintessence”, *Internat. J. Modern Phys. D*, **11**:4 (2002), 483–492.
- [25] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden, M. S. Turner, “Is cosmic speed-up due to new gravitational physics?”, *Phys. Rev. D*, **70**:4 (2004), 043528, 5 pp.
- [26] A. D. Dolgov, M. Kawasaki, “Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?”, *Phys. Lett. B*, **573** (2003), 1–4.
- [27] S. Nojiri, S. D. Odintsov, “The minimal curvature of the universe in modified gravity and conformal anomaly resolution of the instabilities”, *Phys. Lett. A*, **19**:8 (2004), 627–638, arXiv:hep-th/0310045.
- [28] M. C. B. Abdalaa, S. Nojiri, S. D. Odintsov, “Consistent modified gravity: dark energy, acceleration and the absence of cosmic doomsday”, *Class. Quantum Grav.*, **22**:5 (2005), L35–L42.

- [29] O. Mena, J. Santiago, J. Weller, “Constraining inverse-curvature gravity with supernovae”, *Phys. Rev. Lett.*, **96**:4 (2006), 041103, 4 pp.
- [30] S. M. Carroll, M. Hoffman, M. Trodden, “Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than -1 ?”, *Phys. Rev. D*, **68**:2 (2003), 023509, 11 pp.
- [31] R. K. Knop, G. Aldering, R. Amanullah et al. [Supernova Cosmology Collab.], “New constraints on Ω_M , Ω_Λ , and w from an independent set of eleven high-redshift supernovae observed with HST”, *Astrophys. J.*, **598**:1 (2003), 102–137, arXiv: astro-ph/0309368.
- [32] G. Hinshaw, J. L. Weiland, R. S. Hill et al., “Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe observations: data processing, sky maps, and basic results”, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **180**:2 (2009), 225–245.
- [33] A. A. Usmani, P. P. Ghosh, U. Mukhopadhyay, P. C. Ray, S. Ray, “The dark energy equation of state”, *Mon. Not. R. Astron. Soc. Lett.*, **386**:1 (2008), L92–L95.
- [34] U. Mukhopadhyay, P. P. Gosh, S. B. D. Choudhury, “ Λ -CDM universe: a phenomenological approach with many possibilities”, *Internat. J. Modern Phys. D*, **17**:2 (2008), 301–309, arXiv: 0708.0680.
- [35] Ö. Akarsu, C. B. Kilinc, “Bianchi type III models with anisotropic dark energy”, *Gen. Rel. Grav.*, **42**:4 (2010), 763–775.
- [36] J. K. Singh, N. K. Sharma, “Bianchi type-II dark energy model in scale covariant theory of gravitation”, *Internat. J. Theor. Phys.*, **53**:2 (2014), 461–468.
- [37] C. Brans, R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation”, *Phys. Rev.*, **124**:3 (1961), 925–935.
- [38] V. B. Johri, K. Desikan, “Cosmological models with constant deceleration parameter in Brans–Dicke theory”, *Gen. Rel. Grav.*, **26**:12 (1994), 1217–1232.
- [39] S. Ram, C. P. Singh, “Early cosmological models with bulk viscosity in Brans–Dicke theory”, *Astrophys. Space Sci.*, **254**:1 (1997), 143–150.
- [40] G. P. Singh, A. Beesham, “Bulk viscosity and particle creation in Brans–Dicke theory”, *Aust. J. Phys.*, **52**:6 (1999), 1039–1049.
- [41] K. S. Adhav, M. R. Ugale, C. B. Kale, M. P. Bhende, “Plane symmetric vacuum Bianchi type-III cosmological model in Brans–Dicke Theory”, *Internat. J. Theor. Phys.*, **48**:1 (2009), 178–182.
- [42] D. R. K. Reddy, D. Bharati, G. V. V. Lakshmi, “Kantowski–Sachs bulk viscous string cosmological model in Brans–Dicke theory of gravitation”, *Astrophys. Space Sci.*, **351**:1 (2014), 307–311.
- [43] J. K. Singh, N. K. Sharma, “Some Bianchi type-II cosmological models in Brans–Dicke theory”, *Astrophys. Space Sci.*, **327**:2 (2010), 293–298.
- [44] J. K. Singh, “Some cosmological models in scalar-tensor theories”, *Modern Phys. Lett. A*, **25**:27 (2010), 2363–2371.
- [45] J. K. Singh, “Bianchi type-V cosmological models in Brans–Dicke theory”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **25**:18–19 (2010), 3817–3824.
- [46] J. K. Singh, S. Rani, “The Bianchi type-V dark energy cosmology in self interacting Brans Dicke theory of gravity”, arXiv: 1601.01265.
- [47] C. B. Collins, S. W. Hawking, “Why is the universe isotropic?”, *Astrophys. J.*, **180** (1973), 317.
- [48] M. S. Berman, “A special law of variation for Hubble’s parameter”, *Nuovo Cimento B*, **74**:2 (1983), 182–186.
- [49] E. V. Linder, “The dynamics of quintessence, the quintessence of dynamics”, *Gen. Rel. Grav.*, **40**:2–3 (2008), 329–356.
- [50] B. Saha, “Bianchi type-VI anisotropic dark energy model with varying EoS parameter”, *Internat. J. Theor. Phys.*, **52**:10 (2013), 3646–3657.