Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Эпендиев, О 4-импульсе поля точечного заряда в нелинейной электродинамике, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 3, 417–423

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:27:12

© 2017 г.

М. Б. Эпендиев*

О 4-ИМПУЛЬСЕ ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Доказано, что 4-импульс электромагнитного поля точечного заряда является 4-вектором, если лагранжиан поля нелинеен (относительно инвариантов поля), а масса поля конечна. Определен класс лагранжианов, приводящих к ограниченности массы поля.

Ключевые слова: нелинейная электродинамика, точечный заряд, масса поля, 4-импульс поля.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9249>

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе принята система единиц, в которой скорость света $c = 1$. Латинские индексы пробегает значения 0, 1, 2, 3; греческие – 1, 2, 3. По повторяющимся (сверху и снизу) индексам проводится суммирование. Если в интегралах не указаны пределы интегрирования, то они бесконечны. Компонентами 4-вектора w^k является совокупность $(w^0, \vec{w})$; в частности, координатный вектор $x^k = (t, \vec{r})$, вектор 4-скорости $u^k = (u^0, \vec{u})$. Иногда вектор записывается без указания индекса, причем $(xu) = x^n u_n$, $x^2 = x^n x_n$, и т. д.

В работе рассматривается вопрос о том, в каких случаях 4-импульс поля можно считать 4-вектором. Чтобы избежать разночтений, вкратце напомним, что такое 4-вектор (и тензор вообще) в псевдоевклидовом пространстве.

В основе определения тензора лежит принцип релятивистской инвариантности: соотношения между тензорными выражениями не меняются при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. При указанном переходе новые (штрихованные) и старые координаты связаны ортогональным преобразованием

$$x'^k = Q^k_i x^i, \quad x^k = x'^i Q_i^k, \quad Q_i^k Q^i_n = Q^k_i Q_n^i = \delta_n^k. \quad (1)$$

Совокупность величин $A^{i_1 \dots i_n}_{k_1 \dots k_s}(x)$ можно назвать тензором, если

$$A'^{i_1 \dots i_n}_{k_1 \dots k_s}(x') = Q^{i_1}_{l_1} \dots Q^{i_n}_{l_n} Q^{j_1}_{k_1} \dots Q^{j_s}_{k_s} A^{l_1 \dots l_n}_{j_1 \dots j_s}(x) \quad (2)$$

(в правой части (2) $x = x(x')$ в соответствии с (1)).

*Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия.
E-mail: m010148@mail.ru

Обычно под преобразованием (1) подразумевают или преобразование Лоренца (переход в движущуюся систему отсчета), или поворот пространственных осей. В общем случае выражение (1) описывает любую последовательность этих действий. В книге [1] дано представление матрицы Q как экспоненты антисимметричной матрицы:

$$Q^i_k = (e^W)^i_k = \frac{1}{\theta} \{ (\varphi^2 \operatorname{ch} \gamma + \gamma^2 \cos \varphi) \delta^i_k + (\gamma \operatorname{sh} \gamma + \varphi \sin \varphi) W^i_k + \\ + (\operatorname{ch} \gamma - \cos \varphi) W^i_n W^n_k + (\varphi \operatorname{sh} \gamma - \gamma \sin \varphi) \widetilde{W}^i_k \}, \quad (3)$$

где

$$W^i_k = -W^i_k, \quad \widetilde{W}^{ik} = \frac{1}{2} e^{ikln} W_{ln} \quad (e^{0123} = 1), \quad \theta = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}, \\ \gamma = \sqrt{\frac{\theta + a_0}{2}}, \quad \varphi = \frac{b_0}{2\gamma}, \quad a_0 = \frac{1}{2} W^{ln} W_{nl}, \quad b_0 = \frac{1}{2} W^{ln} \widetilde{W}_{nl}.$$

При $W^\alpha_\beta = 0$ матрица (3) является оператором преобразования Лоренца, при $W^\alpha_0 = 0$ – оператором поворота пространственных осей.

Если $T^{kn}(x)$ есть тензор энергии-импульса (ТЭИ) некоторой системы, то 4-импульс системы определяется интегралом

$$P^k = \int T^{k0} d^3\vec{r}. \quad (4)$$

Очевидно, что выражение (4) в общем случае не является 4-вектором. С другой стороны, если система изолирована, то (4) должно быть 4-вектором (иначе или данную систему нельзя изолировать, или 4-импульс не является ее динамической переменной). Мы собираемся обсуждать 4-импульс электромагнитного поля некоторого заряда. Ясно, что между зарядом и его полем существует некая связь, так как отделить (изолировать) поле от заряда невозможно. Одна из сторон этой связи выявлена в статье [2], где рассматривается взаимодействие ускоренно движущегося протяженного заряда со своим полем. Показано, что в первом приближении (но только в первом) при действии на заряд внешней силы инерционным параметром является сумма массы заряда и массы поля. Кроме того, протяженность заряда позволяет говорить о наличии неких внутренних процессов в нем и связать эти процессы со свойствами поля так, чтобы 4-импульс системы “заряд+поле” являлся 4-вектором. Для точечного же заряда 4-импульс по определению является 4-вектором. Однако при линейном (относительно инвариантов поля) лагранжиане энергия его поля расходится. Поэтому в данном случае, чтобы понятие 4-импульса имело физический смысл, нужно исходить из нелинейных лагранжианов.

Нелинейные поправки обычно рассчитываются в квантовой теории при рассмотрении радиационных процессов (см. книгу [3]). Мы ограничиваемся в настоящей статье зависимостью лагранжиана от одного инварианта поля, но зато исследуем эту зависимость в общем виде.

2. ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС ПОЛЯ

Лагранжиан, уравнение и ТЭИ поля имеют вид (J^k – вектор тока)

$$\begin{aligned} L &= L(a), \quad a = \frac{1}{4} F^{kn} F_{nk}, \quad F_{kn} = A_{n,k} - A_{k,n}, \\ (L' F^{kn})_{,n} &= -J^k, \quad (\cdot)_{,n} = \frac{\partial}{\partial x^n} (\cdot), \\ T^{kn} &= L' F^{km} F_m{}^n - g^{kn} L, \quad L' = \frac{dL}{da}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для покоящегося заряда и сферической симметрии

$$\begin{aligned} J^k &= (\mu(r), 0, 0, 0), \quad A^k = (\Phi(r), 0, 0, 0), \quad a = \frac{1}{2} f^2, \quad f = \frac{d\Phi}{dr}, \\ F_{(0)}^{0\alpha} &= \frac{r^\alpha f}{r}, \quad F_{(0)}^{\alpha\beta} = 0, \quad T_{(0)}^{00} = L' f^2 - L, \quad T_{(0)}^{0\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из формул (5), (6), учитывая, что $\vec{\nabla}(\vec{r}/r^3) = 4\pi\delta(\vec{r})$, получаем уравнение

$$4\pi Q\delta(\vec{r}) + \frac{1}{r^2} \frac{dQ}{dr} = -\mu, \quad Q = Q(r) = L' r^2 f. \quad (7)$$

Отсюда следует, что

- если $\mu = e\delta(\vec{r})$, то

$$Q = \text{const} = -\frac{e}{4\pi}; \quad (8)$$

- если заряд “размазан”, то $Q(0) = 0$ и

$$Q = -\int_0^r \tau^2 \mu(\tau) d\tau.$$

Если заряд движется со скоростью $\vec{v}$, то равенства (5) переходят в равенства

$$\begin{aligned} F^{kn} &= \frac{(q^k u^n - q^n u^k) f(\sigma)}{\sigma}, \\ q^k &= (xu) u^k - x^k, \quad \sigma = \sqrt{(xu)^2 - x^2} = |\vec{\sigma}|, \\ \vec{\sigma} &= \vec{r} - \left(t - \frac{\vec{u}\vec{r}}{u_0 + 1} \right) \vec{u}, \quad d^3 \vec{r} = \frac{d^3 \vec{\sigma}}{u_0}, \quad \vec{u} = u_0 \vec{v}, \quad u_0 = \sqrt{1 + \vec{u}^2}, \\ T^{kn} &= \left(u^k u^n - \frac{q^k q^n}{\sigma^2} \right) L' f^2 - g^{kn} L, \quad f = f(\sigma), \quad a = \frac{f^2}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$(10)$$

Обозначим

$$\langle Q(\vec{r}) \rangle = \int Q(\vec{r}) d^3\vec{r},$$

причем для любой интегрируемой функции $B(\vec{r})$

$$\int B(\vec{\sigma}(\vec{r})) d^3\vec{r} = \langle B(\vec{\sigma}(\vec{r})) \rangle = \frac{1}{u_0} \langle B(\vec{r}) \rangle.$$

Учитывая, что

$$q^0 = -(\vec{u}\vec{\sigma}), \quad \vec{q} = -\vec{\sigma} - \frac{(\vec{u}\vec{\sigma})\vec{u}}{u_0 + 1}, \quad \vec{r} = \vec{\sigma} + \frac{\vec{u}}{u_0} \left(t - \frac{(\vec{u}\vec{\sigma})}{u_0 + 1} \right),$$

а также то, что для всякой интегрируемой функции $Q(\sigma)$ имеет место соотношение

$$\langle \sigma_\alpha \sigma_\beta Q(\sigma) \rangle = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3} \langle \sigma^2 Q(\sigma) \rangle, \quad \delta_{\alpha\alpha} = 1, \quad \alpha \neq \beta \rightarrow \delta_{\alpha\beta} = 0,$$

для компонент 4-импульса поля из формулы (4) получаем выражения

$$\begin{aligned} P_f^0 &= \langle T^{00} \rangle = \left\langle \left(u_0 - \frac{\vec{u}^2}{3u_0} \right) L' f^2 - \frac{L}{u_0} \right\rangle, \\ P_f^\alpha &= \langle T^{0\alpha} \rangle = \langle L' f^2 \rangle \frac{2u^\alpha}{3}, \quad f = f(r). \end{aligned} \quad (11)$$

Вводя массу поля

$$M_f = \langle T_{(0)}^{00} \rangle = \langle L' f^2 - L \rangle, \quad f = f(r), \quad (12)$$

перепишем (11) в виде

$$P_f^k = M_f u^k + C b^k, \quad (13)$$

где

$$b^0 = \frac{\vec{u}^2}{3u_0}, \quad b^\alpha = \frac{u^\alpha}{3}, \quad b^n u_n = 0, \quad C = \langle 3L - L' f^2 \rangle, \quad f = f(r). \quad (14)$$

Так как b^k не является 4-вектором, необходимым и достаточным условием того, что (13) представляет собой 4-вектор, является равенство $C = 0$ при ограниченной массе M_f .

При линейном лагранжиане ($L = a/4\pi$) $C = \langle f^2 \rangle / 8\pi \neq 0$. В то же время для ограниченности массы (а также и C) нужно, чтобы заряд был протяженным.

Далее мы рассматриваем поле точечного заряда, считая, что лагранжиан нелинейный и такой, что интеграл (12) не расходится. Тогда из (9) имеем равенства

$$L' f = -\frac{e}{4\pi r^2}, \quad f = -\frac{e\sqrt{2a}}{|e|}. \quad (15)$$

Отсюда находим $a = a(r)$ или $r = r(a)$:

$$r = r(a) = \frac{\beta_0}{\sqrt{z}}, \quad \beta_0 = \sqrt{\frac{|e|}{\sqrt{2}4\pi}}, \quad z = \sqrt{a}L'.$$

Тогда для функций вида $B(a, r)$ записываем формулу

$$\langle B \rangle = 2\pi\beta_0^3 \int_0^{a(0)} B(a, r(a)) \frac{z'}{z^{5/2}} da, \quad z' = \frac{dz}{da}, \quad 2a_{(0)} = (f(0))^2 \quad (16)$$

($a_{(0)}$ есть значение a , при котором $L' = \infty$).

В ряде случаев преобразование (16) может приводить к более простым интегралам. Так, интегралы (43), (44), вычисленные в работах [4], [5], с помощью этого преобразования можно выразить через гамма-функцию:

$$I_1 = \frac{2(\Gamma(1/4))^2}{3^{9/4}\sqrt{2\pi}} \cong 0.8855, \quad I_2 = \frac{9I_1}{2} \cong 3.9847.$$

При этом в выражении для массы (находящемся сразу после (44)) коэффициент 2.65 можно заменить на $3I_1 \cong 2.6565$.

Вместо (14) для случая (15) с учетом (16) и (12) получаем, что

$$\begin{aligned} C &= 2\pi\beta_0^3 \int_0^{a_0} (3L - L'f^2) \frac{z'}{z^{5/2}} da = \\ &= 4\pi\beta_0^3 \int_0^{a_0} \frac{d}{da} \left(\frac{2L'a - L}{z^{3/2}} \right) da = 4\pi \int_0^\infty \frac{d}{dr} (r^3 T_{(0)}^{00}) dr. \end{aligned} \quad (17)$$

Если плотность энергии удовлетворяет условиям

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^3 T_{(0)}^{00} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^3 T_{(0)}^{00} = 0, \quad (18)$$

то приходим к тождеству

$$C = \langle 3L - 2L'a \rangle \equiv 0. \quad (19)$$

Из ограниченности выражения (12) следуют условия (18) (обратное, вообще говоря, неверно). Отметим, что согласно (19) 4-импульс (13) переходит для случая точечного заряда в 4-вектор, введенный в работе [4] в качестве вектора энергии-импульса.

Таким образом, 4-импульс (13) есть 4-вектор, если заряд точечный, а нелинейность лагранжиана такова, что масса поля конечна. В других случаях (размазанность заряда, нарушение сферической симметрии и пр.) мы, вообще говоря, не вправе делать такое утверждение. А реальность и представляет собой такие “другие случаи”. Поэтому подобно вырождению спектра в квантовой механике тождество (19) можно назвать случайным порождением точечной идеализации заряда.

Отметим, что в случае (19)

$$M_f = 2\langle L \rangle = \frac{4}{3}\langle L'a \rangle = \frac{8\pi\beta_0^3}{3} \int_0^{a(0)} \frac{z'\sqrt{a}}{z^{3/2}} da. \quad (20)$$

3. УСЛОВИЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ МАССЫ ПОЛЯ

Рассмотрим, какие условия нужно наложить на функцию $L(a)$, чтобы интеграл в (20) сходил. Запишем этот интеграл в виде

$$\int_0^{a(0)} z'\sqrt{a} \frac{da}{z^{3/2}} = -2\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{L'}} \Big|_0^{a(0)} + \int_0^{a(0)} \frac{da}{\sqrt{L'a^{3/2}}}. \quad (21)$$

Из (15) следует, что

$$L' = \frac{dL}{da} \geq 0 \quad \text{при всех} \quad 0 \leq a \leq a_{(0)}. \quad (22)$$

Для ограниченности правой части (21), прежде всего, необходимо, чтобы

$$L'|_{a \rightarrow 0} \sim a^{1/2-\delta_1}. \quad (23)$$

Третье условие зависит от того, расходуется поле в нуле ($a_{(0)} = \infty$) или нет. При $a_{(0)} = \infty$ имеем

$$L'|_{a \rightarrow \infty} \sim a^{1/2+\delta_2} \quad (24)$$

(в конце заключения работы [4] упомянуто это условие). А при $a_{(0)} < \infty$

$$L'|_{a \rightarrow a_{(0)}} \sim (C_1 + C_2(a_{(0)} - a)^{\delta_3})^{-2}, \quad C_1 = \text{const} \geq 0, \quad C_2 = \text{const}. \quad (25)$$

В (19)–(21) $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – некоторые положительные константы, знак $\sim$ означает, что в (23) левая часть убывает медленнее правой, а в (24), (25) – левая часть растет быстрее правой.

У нас нет гарантий того, что тот или иной используемый лагранжиан является точным. Соответственно и расчет массы нельзя считать точным. В этом плане выделяются лагранжианы, при которых поле в нуле остается бесконечным. Это означает, что поправки к ним могут приводить к существенно другой массе. Продемонстрируем этот факт на простом примере.

Используемый в статьях [4], [5] лагранжиан

$$L_1 = \frac{a + \sigma_0 a^2/2}{4\pi}, \quad a_{(0)} = \infty, \quad (26)$$

можно считать суммой двух первых членов разложения лагранжиана

$$L = -\frac{1}{4\pi\sigma_0} \ln(1 - \sigma_0 a), \quad a_{(0)} = \frac{1}{\sigma_0}, \quad (27)$$

по относительно малому параметру σ_0 . При этом отношение масс, рассчитанных для первого и второго вариантов, равно

$$\frac{M_f(L_1)}{M_f(L)} = \frac{3\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{2\pi} \cong 2.1213. \quad (28)$$

Однако, по мнению автора, такой возможный разброс массы поля в данной модели не принципиален, так как нам все равно не известно достаточно точное значение массы “голого” заряда. Инерционным параметром системы “заряд+поле” является суммарная масса, определенная для стабильных заряженных частиц с большой точностью. Поэтому для придания модели физического смысла достаточно убедиться, что в этой модели масса поля конечна и не превышает суммарную массу.

Благодарности. В заключение автор выражает искреннюю благодарность профессору МГУ им. М. В. Ломоносова А. В. Борисову за помощь и консультации в работе.

Список литературы

- [1] М. Б. Эпендиев, *Теоретические основы физики*, ИКИ, М.–Ижевск, 2013.
- [2] М. Б. Эпендиев, “Классическая электродинамика ускоренно движущегося протяженного заряда”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.*, **6** (2014), 40–45; М. В. Епендиев, “On the foundations of the classical relativistic theory of the field of an accelerated extended charge”, *J. Modern Phys.*, **6** (2015), 601–609.
- [3] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, А. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1980.
- [4] D. M. Gitman, A. E. Shabad, A. A. Shishmarev, *Moving point charge as a soliton in non-linear electrodynamics*, [arXiv: 1509.06401](https://arxiv.org/abs/1509.06401).
- [5] C. V. Costa, D. M. Gitman, A. E. Shabad, “Finite field-energy of a point charge in QED”, *Phys. Scr.*, **90**:7 (2015), 074012, 6 pp., [arXiv: 1312.0447](https://arxiv.org/abs/1312.0447).

Поступила в редакцию 23.06.2016,
после доработки 13.09.2016