Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Каменщик, Н. А. Свешников, Инфракрасные расходимости и асимптотические состояния кварков в квантовой хромодинамике, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 2, 175–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf925>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:10:55

© 1998 г.

А. Ю. Каменщик*, Н. А. Свешников

ИНФРАКРАСНЫЕ РАСХОДИМОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ КВАРКОВ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

Показано, что с помощью метода асимптотической динамики невозможно построить асимптотические состояния свободных кварков в квантовой хромодинамике.

В 1983 г. Никита Алексеевич Свешников и я опубликовали статью [1] об отсутствии свободных кварков в пертурбативной квантовой хромодинамике (КХД). В статье был представлен лишь набросок строгого доказательства соответствующих утверждений. Мы планировали в дальнейшем опубликовать подробную статью, посвященную этой теме, но не сделали этого. Никита Алексеевич всегда стремился к высокому уровню математической строгости и добивался его в своих опубликованных статьях. Сейчас, когда его нет с нами, я не могу представить текст того качества, который, как я понимаю, мог бы удовлетворить его высоким критериям. Тем не менее я решился опубликовать наши старые заметки в надежде, что они могут быть полезны людям, занимающимся проблемами инфракрасных расходимостей и конфайнмента в КХД. При этом я должен подчеркнуть, что все идеи этой работы принадлежат Никите Алексеевичу, а вся ответственность за недостатки изложения должна быть отнесена на мой счет.

А. Ю. Каменщик

1. ВВЕДЕНИЕ. ПРОБЛЕМА УДЕРЖАНИЯ КВАРКОВ И ИНФРАКРАСНЫЕ РАСХОДИМОСТИ

КХД стала главным кандидатом на роль фундаментальной теории сильных взаимодействий. Однако свободные кварки не были обнаружены экспериментально [2], поэтому возникла гипотеза об удержании кварков (“конфайнмент”) [3]. Суть этой гипотезы сводится к тому, что существуют только связанные бесцветные состояния кварков – адроны. Свободных же кварков, равно как и иных цветных состояний, в природе нет.

Имеется множество подходов к теоретическому обоснованию этой гипотезы [4]. Наряду с полуфеноменологическими подходами также широко распространены исследования инфракрасной структуры теории, опирающиеся на КХД “в чистом виде”, т.е. на лагранжиан КХД, и непосредственно следующие из него свойства функций Грина и матричных элементов. Среди них можно выделить решение уравнений Швингера–Дайсона

* Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия

в инфракрасном пределе КХД и исследование инфракрасных функций Грина [5], с одной стороны, и исследование инфракрасных расходимостей матричных элементов и сечений в рамках теории возмущений, с другой [6–12]. Имелись также попытки применить метод асимптотической динамики [13] к исследованию сокращения инфракрасных расходимостей в матричных элементах [14] и к проблеме конфайнмента [15].

Среди работ, посвященных изучению инфракрасных расходимостей матричных элементов, для нас особенно интересны статьи [7, 8, 12]. В работе [12] с помощью анализа фейнмановских диаграмм были выделены главные инфракрасные расходимости и доказана их “экспоненциация”, аналогичная электродинамической [16]. При этом получившийся в экспоненте фактор обращал в нуль любые несинглетные по цвету состояния. В статьях [7, 8] проблема невылетаия кварков не рассматривалась, но был произведен тщательный анализ инфракрасных расходимостей, результаты которого использованы в нашей статье [1]. Уравнения, полученные в работах [7, 8] для главных инфракрасных расходимостей матричных элементов с произвольным числом внешних концов, соответствующих массивным кваркам, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} T_{i_1 \dots i_N}(p_1, \dots, p_N) &= -\frac{1}{1 - \frac{22}{3} C_A \frac{\lambda}{4\pi}} \sum_{\alpha, \beta=1, \alpha \neq \beta}^N \eta_\alpha \eta_\beta \lambda_{i_\alpha j_\alpha}^a \lambda_{i_\beta j_\beta}^a \times \\ &\times F((p_\alpha + p_\beta)^2) T_{i_1 \dots j_\alpha \dots j_\beta \dots i_N}(p_1, \dots, p_N), \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} T_{i_1 \dots i_N}(p_1, \dots, p_N) &= T_{i_1 \dots i_N}^0(p_1, \dots, p_N), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\lambda = g^2/2\epsilon$, $\epsilon = (d-4)/2$, d – размерность пространства-времени, $T_{i_1 \dots i_N}(p_1, \dots, p_N)$ – главная инфракрасно расходящаяся часть перенормированной амплитуды процесса, содержащей N внешних кварковых линий с импульсами p_α и цветными индексами i_α , η_α – знаковый фактор, равный $+1$ для выходящей линии и -1 для входящей, λ^a – генераторы цветной группы G ,

$$F(p^2) = \int_0^1 dy \frac{p^2 - 2m^2}{m^2 - p^2(1-y)y - i0} + 2, \quad (1.2)$$

C_A – собственное значение квадратичного оператора Казимира группы G в присоединенном представлении, $T_{i_1 \dots i_N}^0(p_1, \dots, p_N)$ – простейшая диаграмма с тем же набором внешних импульсов и цветных индексов, что и $T_{i_1 \dots i_N}(p_1, \dots, p_N)$.

В работе [8] было показано, что учет неглавных расходимостей не приводит к существенному изменению уравнений Киношита–Укавы (1.1), (1.2).

Говоря об исследовании инфракрасных расходимостей в КХД, следует упомянуть работы [10], посвященные проверке теоремы Киношита, Ли и Науэнберга [17] на уровне теории возмущений. Как и следовало ожидать, эта общая теорема выполняется, в отличие от программы Блоха–Нордсика [18], которая реализуется лишь для рассеяния одного кварка на синглетном по цвету потенциале [19].

Особый интерес представляют работы по применению метода асимптотической динамики [13] к КХД. Все эти работы основаны на оценке различных членов оператора асимптотической эволюции, расписанного с помощью формулы Магнуса [20] для

T -экспоненты, и удержании первых нескольких членов (в отличие от квантовой электродинамики (КЭД) формула Магнуса не обрывается на конечном шаге). Получаемые с помощью такого “обрезанного” оператора асимптотической эволюции асимптотические состояния можно затем подставить в матричные элементы вместо фоковских. При этом инфракрасные расходимости, эффективно учтенные с помощью такого обрезанного оператора, сокращаются. Однако в более высоких порядках теории возмущений появляются другие расходимости, для сокращения которых нужно иметь более точное описание асимптотических состояний.

Попытка объяснить конфайнмент с помощью метода асимптотической динамики была предпринята в работе [15], где было высказано интересное предположение, что асимптотические состояния в КХД не могут быть построены из фоковских в отличие от КЭД. Однако это предположение не было доказано.

Существенным шагом в исследовании проблемы конфайнмента было исследование проблемы самосогласованности задачи рассеяния в моделях с неабелевой симметрией, предпринятое в работах Н. А. Свешникова [21–23]. Разработанный в этих работах формализм, будучи применен к КХД [1], приводит к новому результату: если в КХД с массивными кварками и существуют физические кварки, то они не могут быть получены из затравочных кварков по теории возмущений. Для доказательства этого факта наряду с методом асимптотической динамики использовались и уравнения Киношиты–Укавы. В последующих разделах будут приведены некоторые детали доказательства, которое было кратко изложено в [1].

2. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ КХД

В теории возмущений для определения S -матрицы необходимо введение инфракрасной регуляризации. Удобно воспользоваться размерной регуляризацией [24] ($\epsilon = (d - 4)/2 > 0$). Пусть S_ϵ – регуляризованная матрица рассеяния, соответствующая полному H и свободному H_0 гамильтонианам. Рецепт устранения инфракрасных расходимостей состоит в переходе от представления взаимодействия к представлению асимптотической динамики [13], в котором роль свободного гамильтониана играет асимптотический гамильтониан $H_{\text{as}} = H_0 + H_{\text{int}}^{\text{as}}$. Здесь $H_{\text{int}}^{\text{as}}$ – часть гамильтониана взаимодействия $H_{\text{int}} = H - H_0$, описывающая процессы с передачей энергии порядка $\Delta \ll m$, где m – масса кварка.

S -матрица представления взаимодействия может быть записана в виде

$$S_\epsilon = V_\epsilon^\dagger S_\epsilon^{\text{as}} V_\epsilon^-, \quad (2.1)$$

где асимптотическая S -матрица S_ϵ^{as} и операторы асимптотической эволюции равны соответственно

$$\begin{aligned} S_\epsilon^{\text{as}} &= \lim_{t_\pm \rightarrow \pm\infty} e^{iH_{\text{as}}t_+} e^{-iH(t_+ - t_-)} e^{-iH_{\text{as}}t_-}, \\ V_\epsilon^\pm &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_{\text{as}}t} e^{-iH_0t}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

значок $\dagger$ означает эрмитово сопряжение. При наличии инфракрасной регуляризации все операторы, фигурирующие в (2.1), (2.2), существуют и унитарны в рамках теории возмущений.

Асимптотический гамильтониан КХД содержит кварковые операторы лишь в комбинациях $\rho^a(\vec{p})$ – операторов плотности цветных зарядов [14, 15], где

$$\rho^a(\vec{p}) = b_i^+(\vec{p})\lambda_{ij}^a b_j(\vec{p}) - d_i^+(\vec{p})\lambda_{ij}^a d_j(\vec{p}), \quad (2.3)$$

b^+ , b и d^+ , d – операторы рождения и уничтожения кварков, соответственно.

Легко проверить, что

$$[V_\epsilon^\pm, \rho(\vec{p})] = 0, \quad (2.4)$$

где

$$\rho(\vec{p}) = b_i^+(\vec{p})b_j(\vec{p}) + d_i^+(\vec{p})d_j(\vec{p}) \quad (2.5)$$

есть оператор плотности числа кварков и антикварков. Отсюда следует, что инфракрасно-одетое кварковое состояние

$$V_\epsilon^\pm |\Psi^a\rangle_q \otimes |0\rangle_g, \quad (2.6)$$

где $|\Psi^a\rangle_q$ – фоковское кварковое состояние с цветным мультииндексом a , $|0\rangle_g$ – фоковский вакуум глюонного поля, может быть представлено в виде

$$\sum_{a'} |\Psi^{a'}\rangle_q \otimes V_{\epsilon; aa'}^\pm |0\rangle_g, \quad (2.7)$$

где $V_{\epsilon; aa'}^\pm$ содержит лишь глюонные операторы и генераторы цветной группы G .

Мы предположим, что при снятии регуляризации состояние (2.7) становится асимптотическим состоянием КХД (где $V_{\epsilon; aa'}^\pm |0\rangle_g$ играет роль вакуума) и что S -матрица в асимптотическом представлении (2.1) не содержит инфракрасных расходимостей по построению. Высказанные предположения эквивалентны утверждению, что в КХД с помощью метода асимптотической динамики можно устранить инфракрасные расходимости из S -матрицы. Это утверждение вполне согласуется с рассмотренными во введении результатами анализа инфракрасных расходимостей.

Действительно, рассмотрим вероятность перехода между чисто кварковыми состояниями:

$$W_{f,i} = \text{Tr}(P_f S_\epsilon P_i S_\epsilon^\dagger), \quad (2.8)$$

где

$$P_{f,i} = |\Psi_{f,i}\rangle_q \langle \Psi_{f,i}|_q \otimes |0\rangle_g \langle 0|_g. \quad (2.9)$$

Подстановка (2.1) в (2.8) дает с использованием (2.7) после суммирования по конечным состояниям, которые отличаются энергией, не превышающей δE , следующее выражение для величин типа инклюзивных сечений:

$$\sigma_i(\delta E) = \sum_{a' a''} \langle 0|_g V_{\epsilon; a' a}^{\dagger -} \otimes \langle \Psi_i^{a'} |_q S_\epsilon^{\dagger \text{as}} P_f^{\delta E} S_\epsilon^{\text{as}} | \Psi_i^{a''} \rangle_q \otimes V_{\epsilon; aa''}^- |0\rangle_g. \quad (2.10)$$

В самом деле, имеем условие

$$\sum_f V_\epsilon^+ P_f V_\epsilon^{\dagger +} = \sum_f P_f \equiv P_f^{\delta E} \quad (2.11)$$

во всех порядках теории возмущений, меньших $\delta E/\Delta$. В силу произвольности Δ можно гарантировать выполнение этого условия с точностью до любого наперед заданного порядка.

Суммирование (2.10) по начальным состояниям с разностью энергий δE приводит к равенству

$$\sigma(\delta E) = \text{Tr}(P_f^{\delta E} S_\epsilon^{\text{as}} P_i^{\delta E} S_\epsilon^{\dagger \text{as}}). \quad (2.12)$$

Это выражение не содержит инфракрасных расходимостей в полном соответствии с теоремой Киношity, Ли и Науэнберга [17].

Рассмотрим теперь вопрос о выполнении программы Блоха–Нордсика [18] в КХД, изучавшийся в статье [19]. Наличие в начальном состоянии лишь одной цветной частицы означает в силу закона сохранения цветного заряда, что оператор

$$A^{a'a''} = \langle \Psi_i^{a'} |_q S_\epsilon^{\dagger \text{as}} P_f^{\delta E} S_\epsilon^{\text{as}} | \Psi_i^{a''} \rangle_q \quad (2.13)$$

пропорционален $\delta^{a'a''}$. Если бы было несколько частиц, то закон сохранения цветного заряда не привел бы к совпадению мультииндексов. Вследствие этого выражение (2.10) не содержит инфракрасных расходимостей, т.к. произведение

$$V_{\epsilon; a'a}^{\dagger -} V_{\epsilon; aa''}^{-} \delta^{a'a''} = V_{\epsilon; a'a}^{\dagger -} V_{\epsilon; aa'}^{-} \quad (2.14)$$

не содержит полюсов по ϵ в силу унитарности операторов $V^\pm$, которая сохраняется при снятии регуляризации. Этот результат совпадает с результатом работы [19]. В случае абелевой группы симметрии (КЭД) он обобщается на произвольное начальное состояние электронов и позитронов, поскольку сумма по мультииндексам в (2.10) содержит теперь лишь одно слагаемое.

Однако в случае рассеяния нескольких цветных кварков оператор $V_{\epsilon; a'a}^{\dagger -} V_{\epsilon; aa''}^{-}$ уже не является просто произведением унитарного оператора на эрмитово сопряженный к нему, т.е. тождественным оператором. Компенсации инфракрасных полюсов $1/\epsilon$, вообще говоря, не происходит. В этом случае усреднение по цветам кварков в начальном состоянии позволяет сделать заключение лишь о сокращении главных инфракрасных расходимостей. Действительно, после суммирования по a функция $\sigma_i(\delta E)$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_i(\delta E)} &= \sum_{a, a'a''} \langle 0 |_g V_{\epsilon; a'a}^{\dagger -} A^{a'a''} V_{\epsilon; aa''}^{-} | 0 \rangle_g = \\ &= \sum_a \langle 0 |_g \left(A^{aa} + \sum_{a'a''} V_{\epsilon; a'a}^{\dagger -} [V_{\epsilon; aa''}^{-}, A^{a'a''}] \right) | 0 \rangle_g. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В отсутствие регуляризации коммутатор $V_{\epsilon; aa'}^\pm$ с наблюдаемыми равен формально нулю. На регуляризованном уровне он отличен от нуля, но содержит положительные степени ϵ , что приводит к подавлению инфракрасных расходимостей. Таким образом, в формуле (2.15) будут присутствовать только неглавные расходимости.

Как известно, матричный элемент S_ϵ между чисто кварковыми состояниями имеет иерархическую структуру инфракрасных расходимостей вида

$$S_0 \left(\frac{g^2}{2\epsilon} \right) + g^2 S_1 \left(\frac{g^2}{2\epsilon} \right) + \dots \quad (2.16)$$

Первое слагаемое ряда (2.16) описывает главные расходимости. Для него можно получить явное выражение

$$\begin{aligned} \langle 0|_g \otimes \langle \Psi_f^a |_q S_\epsilon | \Psi_i^b \rangle_q | 0 \rangle_g &= \sum_{a', b'} \langle 0|_g V_{\epsilon; a' a}^{++} V_{\epsilon; b b'}^- | 0 \rangle_g \times \\ &\times \langle 0|_g \otimes \langle \Psi_f^{a'} |_q S_\epsilon^{\text{as}} | \Psi_i^{b'} \rangle \otimes | 0 \rangle_g + (\text{неглавные члены}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Формула (2.17) дает обобщение свойства “экспоненциации” инфракрасных расходимостей КХД. Отметим как важный для дальнейшего факт, что выражение

$$\langle 0|_g V_{\epsilon; a a'}^{++} V_{\epsilon; b b'}^- | 0 \rangle_g \quad (2.18)$$

является в “главном логарифмическом пределе”

$$g \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \frac{g^2}{2\epsilon} = \lambda \quad (2.19)$$

решением уравнений Киношита–Укавы.

Теперь мы можем сформулировать рецепт устранения инфракрасных расходимостей из S -матрицы. Он заключается в переходе к нефокковским пространствам асимптотических состояний. Выбор $|\Psi_i^{\text{as}}\rangle = V_\epsilon^{\dagger-} |\Psi_i^F\rangle$ в качестве начального состояния и $|\Psi_f^{\text{as}}\rangle = V_\epsilon^{\dagger+} |\Psi_f^F\rangle$ в качестве конечного, где $|\Psi_{i,f}^F\rangle$ – состояния из фоковского пространства, устраняет инфракрасные расходимости из S -матрицы. Действительно, величина

$$\langle \Psi_f^{\text{as}} | S_\epsilon | \Psi_i^{\text{as}} \rangle = \langle \Psi_f^F | S_\epsilon^{\text{as}} | \Psi_i^F \rangle \quad (2.20)$$

уже не содержит инфракрасных расходимостей в силу предполагаемых свойств асимптотической S -матрицы.

3. УСЛОВИЕ САМОСОГЛАСОВАННОСТИ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАРКОВ

Использование представления асимптотической динамики подразумевает, что собственные состояния асимптотического гамильтониана образуют базис в пространстве асимптотических состояний $\mathcal{H}_{\text{as}}$. Если в $\mathcal{H}_{\text{as}}$ есть подпространство $\mathcal{H}_{\text{as}}^q$, содержащее физические “инфракрасно одетые” кварки, и если последние могут быть получены из затравочных кварковых полей по теории возмущений, то операторы асимптотической эволюции реализуют унитарную эквивалентность пространства $\mathcal{H}_{\text{as}}^q$ и фоковского пространства “голых” кварков $\mathcal{F}_q \otimes |0\rangle_g$:

$$\mathcal{H}_{\text{as}}^q = V_\epsilon^+ \mathcal{F}_q \otimes |0\rangle_g. \quad (3.1)$$

Предположение о существовании физических кварков приводит, таким образом, при учете условия (2.4) к требованию унитарности на пространстве $\mathcal{F}_q$ оператора

$$M = \langle 0 | {}_g V_\epsilon^{\dagger+} V_\epsilon^- | 0 \rangle_g. \quad (3.2)$$

Если же физические кварки могут быть получены по теории возмущений из голых кварков, принадлежащих некоторому подпространству фоковского пространства

$$\mathcal{H}_q = P \mathcal{F}_q, \quad (3.3)$$

где P – проектор, то M должен быть унитарен на подпространстве $\mathcal{H}_q$, т.е.

$$M P M^\dagger P = M^\dagger P M P = P. \quad (3.4)$$

Заметим, что в КЭД оператор M имеет вид

$$M_{\text{КЭД}} = \exp(2i\lambda\Phi), \quad (3.5)$$

где оператор кулоновской фазы

$$\Phi = \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} \frac{d\vec{q}}{2E_{\vec{q}}} \rho_{\text{el}}(\vec{p}) \rho_{\text{el}}(\vec{q}) \frac{pq}{\sqrt{(pq)^2 - m^4}} \quad (3.6)$$

и $E_{\vec{p}} = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$. Очевидная унитарность $M_{\text{КЭД}}$ на $\mathcal{F}_q$ свидетельствует о существовании в КЭД физических электронов.

Переходя к КХД, отметим, что инфракрасные расходимости коэффициентных функций оператора M имеют ту же структуру, что и ряд (2.16). Легко показать, переходя к логарифмическому пределу (2.19), что оператор $M_0(\lambda)$, описывающий главные инфракрасные расходимости, должен быть сам по себе унитарен на пространстве $\mathcal{F}_q$. Уравнение (1.1) может быть записано для $M_0(\lambda)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dM_0(\lambda)}{d\lambda} = f(\lambda) & \left(\int_{S^2} \frac{d\hat{k}}{4\pi} \int \frac{d\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} \frac{d\vec{q}}{2E_{\vec{q}}} \frac{pq}{(p\hat{k})(q\hat{k})} \times \right. \\ & \left. \times [\rho^a(\vec{p}), [\rho^a(\vec{q}), M_0(\lambda)]] + i \{ \Phi_{\text{КХД}}, M_0(\lambda) \} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь $\hat{k}$ – вектор на единичной сфере в трехмерном пространстве. Неабелев аналог кулоновской фазы $\Phi_{\text{КХД}}$ получается из соотношения (3.6) заменой $\rho_{\text{el}}(\vec{p}) \rightarrow \rho^a(\vec{p})$ и суммированием по a ,

$$f(\lambda) = \left(1 - \frac{22}{3} C_A \frac{\lambda}{(4\pi)^2} \right)^{-1}. \quad (3.8)$$

Покажем, что явный вид функции $f(\lambda)$ несуществен для дальнейшего.

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n, \quad M_0 = 1, \quad (3.9)$$

удовлетворяет условию унитарности во всех порядках по x , т.е.

$$\sum_{k=0}^n M_{n-k}^{\dagger} M_k = 0 \quad \forall n \geq 1. \quad (3.10)$$

Тогда оператор

$$\widetilde{M} = M(f(x)), \quad (3.11)$$

где

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n, \quad f_1 = 1, \quad (3.12)$$

также унитарен (в смысле разложения по x).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим $\widetilde{M}^{\dagger}(x)\widetilde{M}(x)$ в ряд по x с учетом (3.12). В n -м порядке получим выражение

$$\sum_{k=0}^n \widetilde{M}_{n-k}^{\dagger} \widetilde{M}_k = \sum_{q=1}^n \sum_{\substack{\gamma_1, \dots, \gamma_q \\ \sum \gamma_q = n}} f_{\gamma_1} \dots f_{\gamma_q} \left(\sum_{l=0}^q M_{q-l}^{\dagger} M_l \right), \quad (3.13)$$

которое делает унитарность $\widetilde{M}$ очевидным следствием условия (3.10).

Таким образом, явный вид зависимости эффективного заряда от λ несуществен для условия самосогласованности постановки задачи рассеяния. В связи с этим мы будем считать, что $f(\lambda) = 1$.

Сделаем некоторые удобные переобозначения. Вместо $M_0(\lambda)$ будем писать

$$M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \lambda^n,$$

где $M_0 = I$. Вместо интеграла

$$\int_{S^2} \frac{d\vec{k}}{4\pi} \int \frac{d\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} \frac{d\vec{q}}{2E_{\vec{q}}} \frac{pq}{(p\hat{k})(q\hat{k})} \rho^a(\vec{p}) \dots \rho^a(\vec{q})$$

будем писать

$$\widehat{\rho \dots \rho}, \quad (3.14)$$

а вместо $\Phi_{\text{КХД}}$ — просто Φ . Тогда уравнение (3.7) может быть переписано в виде

$$nM_n = \left[\widehat{\rho, [\rho, M_{n-1}]} \right] + i\{\Phi, M_{n-1}\}, \quad (3.15)$$

$$M_0 = I.$$

Отсюда можно найти M_n для любого наперед заданного номера n .

Из условий унитарности (3.4) можно получить следующие следствия для $n \geq 1$:

$$[M_n, P] = 0, \quad [M_n^\dagger, P] = 0, \quad (3.16)$$

$$P \sum_{k=0}^n M_k M_{n-k}^\dagger P = P \sum_{k=0}^n M_k^\dagger M_{n-k} P = 0. \quad (3.17)$$

Вычислим теперь явно M_1 , M_2 и M_3 , используя (3.15):

$$\begin{aligned} M_1 &= 2i\Phi, \\ M_2 &= i \left[\widehat{[\rho, [\rho, \Phi]]} \right] - 2\Phi^2, \\ M_3 &= \frac{i}{3} \left[\widehat{[\rho, [\rho, [\rho, [\rho, \Phi]]]]} \right] - \frac{2}{3} \left[\widehat{[\rho, [\rho, \Phi^2]]} \right] - \frac{1}{3} \left\{ \left[\widehat{[\rho, [\rho, \Phi]]}, \Phi \right\} - \frac{4}{3} i \Phi^3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Подставляя M_1 из (3.18) в (3.16), получим

$$[\Phi, P] = 0. \quad (3.19)$$

Подставляя M_1 , M_2 и M_3 из (3.18) в (3.17), имеем

$$P \left[\widehat{[\Phi, \rho]}, [\rho, \Phi] \right] P = 0. \quad (3.20)$$

Из условия (3.20) и положительности “спаривания” (3.14) следует, что

$$[\rho, \Phi] P = 0. \quad (3.21)$$

Можно доказать теорему, обобщающую это условие на все порядки.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого n выполняется соотношение*

$$[\rho, \Phi] \underbrace{\rho \dots \rho}_n P = 0. \quad (3.22)$$

Доказательство этой теоремы проводится по индукции. С помощью уравнения (3.15) рекуррентным путем получается следующее выражение для M_n , записанное в форме ряда по Φ :

$$\begin{aligned} M_n &= 2 \left(\frac{i(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \langle [\rho, \Phi]_{2n-2} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{2n-4} \frac{\langle [\rho, \Phi]_k [\rho, \Phi]_{2n-k-4} \rangle}{(k+1)!(2n-k-3)!} + \dots + i \frac{(2i)^{n-1}}{n!} \Phi^n \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где

$$[\rho, \Phi]_n = [\rho, \dots, [\rho, \Phi] \dots]_n$$

– составной коммутатор, а знак $\langle \rangle$ обозначает суммирование по всем возможным спариваниям операторов ρ друг с другом (возможны спаривания либо операторов ρ , принадлежащих к различным составным коммутаторам, либо операторов, входящих в один составной коммутатор и стоящих рядом).

Из (3.21) и предположения индукции следует, что

$$\begin{aligned} M_n P &= P M_n P = \frac{(2i\Phi)^n}{n!} P, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ M_{N+1} &= \frac{2i^{2N+1}}{(2N+1)!} P \langle [\rho, \Phi]_{2N} \rangle P + \frac{(2i\Phi)^{N+1}}{(N+1)!} P, \\ M_{N+2} &= \frac{2i^{2N+3}}{(2N+3)!} P \langle [\rho, \Phi]_{2N+2} \rangle P + \\ &\quad + 2i^{2N} \sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{(2N-k+1)!(k+1)!} P \langle [\rho, \Phi]_{2N-k} [\rho, \Phi]_k \rangle P + \\ &\quad + \frac{1}{(N+2)!} (2i\Phi)^{N+2} P. \end{aligned} \quad (3.24)$$

В последней сумме в силу предположения индукции отличен от нуля лишь член с $k = N$. Подстановка (3.24) в условие (3.17) для $n = N + 2$ дает условие

$$P \langle \rho^{N-1} [\rho, \Phi]_1 [\Phi, \rho]_1 \rho^{N-1} \rangle P = 0. \quad (3.25)$$

Теперь нужно учесть, что в силу предположения индукции оператор

$$[\Phi, \rho^{a_0}(\vec{p}_0)] \rho^{a_1}(\vec{p}_1) \dots \rho^{a_N}(\vec{p}_N) P \quad (3.26)$$

не меняется при перестановках операторов $\rho^{a_i}(\vec{p}_i)$ и потому симметричен как функция $\{\vec{p}_i, a_i\}$. Действительно, операторы (3.26) с различным порядком $\rho^{a_i}(\vec{p}_i)$ равны друг другу с точностью до выражений, в которых некоторые пары заменены их коммутаторами. Однако замена пары операторов ρ коммутатором приводит к уменьшению общего числа операторов ρ в операторе (3.26) на единицу, что в силу предположения индукции обращает в нуль такие выражения. Вследствие симметрии оператора (3.26) можно так расположить операторы $\rho^{a_i}(\vec{p}_i)$ в условии (3.25), что спаривания между ними будут симметричны по отношению к оператору $[\rho, \Phi][\Phi, \rho]$ в (3.25). После этого из положительности спаривания следует, что

$$[\Phi, \rho] \underbrace{\rho \dots \rho}_{N-1} P = 0,$$

что и требовалось доказать.

Легко видеть, что верна и обратная теорема.

Таким образом совокупность условий (3.22) эквивалентна требованию унитарности оператора M на пространстве физических состояний кварков.

Теперь мы сформулируем теорему, непосредственно описывающую условия, которым должны удовлетворять физические состояния.

ТЕОРЕМА 3. Пусть дан набор конечномерных ($k = 1, \dots, N$) пространств $\mathcal{L}_k$, в каждом из которых определено несинглетное унитарное представление простой компактной группы G с генераторами I_k^a . Рассмотрим в прямом произведении этих пространств

$$\mathcal{L} = \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{L}_k \quad (3.27)$$

оператор

$$\Phi_N = \sum_{k,m} I_k^a I_m^a R_{km}, \quad (3.28)$$

где $R_{km} = R_{mk}$, $R_{kk} = 0$.

Пусть существует подпространство $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ такое, что

$$[\Phi_N, I_{k_0}^{a_0}] I_{k_1}^{a_1} \dots I_{k_p}^{a_p} \mathcal{L}_0 = 0 \quad (3.29)$$

для любого набора $\{a_i, k_i\}$. Тогда либо $\mathcal{L}_0$ тривиально, либо $R_{km} = 0$ при всех k, m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в пространстве $\mathcal{L}_k$ ортонормированный базис $\{|\alpha_k\rangle\}$. Тогда произвольное состояние $|\Psi\rangle \in \mathcal{L}$ можно представить в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} \Psi^{\alpha_1, \dots, \alpha_N} |\alpha_1\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_N\rangle = \sum_{\alpha_1} |\alpha_1\rangle \otimes |\Psi^{\alpha_1}\rangle. \quad (3.30)$$

Легко видеть, что условие (3.29) эквивалентно условию

$$\Phi_N F[I] \mathcal{L}_0 = 0$$

для любого полинома $F[I]$.

Пусть F зависит только от I_1 . Для $|\Psi\rangle \in \mathcal{L}_0$ и произвольного вектора

$$|\tilde{\Psi}\rangle \in \mathcal{L}' = \bigotimes_2^N \mathcal{L}_k$$

вычислим

$$\langle \tilde{\Psi} | \Phi_N F[I_1] | \Psi \rangle = \langle \tilde{\Psi} | F[I_1] \Phi_N | \Psi \rangle.$$

Используя для $|\Psi\rangle$ представление (3.30), получим

$$\sum_a I_1^a F[I_1] |\phi^a\rangle = \sum_a F[I_1] I_1^a |\phi^a\rangle, \quad (3.31)$$

где

$$|\phi^a\rangle = 2 \sum_{\alpha_1} |\alpha_1\rangle \langle \tilde{\Psi} | \sum_n R_{1n} I_n^a | \Psi^{\alpha_1} \rangle. \quad (3.32)$$

Нетрудно показать, что условие (3.31) эквивалентно условию

$$[I_1^a, I_1^{b_0}] I_1^{b_1} \dots I_1^{b_n} |\phi^a\rangle = 0$$

для любого набора $\{b_i\}$. Отсюда имеем, что

$$(I_1^b I_1^a I_1^b - I_1^b I_1^b I_1^a) |\phi^a\rangle = 0, \quad (3.33)$$

но

$$I_1^b I_1^b = c_1 I, \quad (3.34)$$

а

$$\begin{aligned} I_1^b I_1^a I_1^b &= I_1^b I_1^b I_1^a + \frac{1}{2} i (f^{abc} I_1^b I_1^c + f^{acb} I_1^c I_1^b) = c_1 I_1^a + \frac{1}{2} i f^{abc} (I_1^b I_1^c - I_1^c I_1^b) = \\ &= c_1 I_1^a + \frac{1}{2} i f^{abc} f^{bcd} I_1^d = c_1 I_1^a - \frac{1}{2} c_A \delta^{ad} I_1^d = c_1 I_1^a - \frac{1}{2} c_A I_1^a, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где c_1 – значение квадратичного оператора Казимира представления группы G в пространстве $\mathcal{L}_1$, а c_A – значение этого же оператора в присоединенном представлении. Подставляя (3.34) и (3.35) в (3.33), получим

$$\left(\left(c_1 - \frac{1}{2} c_A \right) I_1^a - c_1 I_1^a \right) |\phi^a\rangle = -\frac{1}{2} c_A I_1^a |\phi^a\rangle = 0,$$

откуда

$$I_1^a |\phi^a\rangle = 0.$$

Следовательно, условие (3.31) имеет вид

$$\sum_a I_1^a F(I_1^a) |\phi^a\rangle = 0 \quad (3.36)$$

для любого $F(I_1)$.

Выберем в пространстве $\mathcal{L}_1$ произвольное состояние $|\xi\rangle$ и положим

$$M^{ba}(\xi) \equiv \langle \xi | I_1^b \phi^a \rangle.$$

Легко показать, что (3.36) эквивалентно условию

$$\text{tr}(M(\xi)\Lambda) = 0, \quad (3.37)$$

где Λ – произвольный оператор в пространстве присоединенного представления группы G , являющийся полиномом от его генераторов. В силу циклическости присоединенного представления простой группы G из (3.37) следует, что

$$M^{ba}(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{L}_1.$$

Отсюда заключаем, что $|\phi^a\rangle = 0$ и вследствие произвольности $|\tilde{\Psi}\rangle$ имеем

$$\sum_n R_{1n} I_n^a |\Psi\rangle = 0 \quad \forall |\Psi\rangle \in \mathcal{L}_0. \quad (3.38)$$

Подставим теперь в уравнение (3.38) вектор $I_k^b|\Psi\rangle$ вместо вектора $|\Psi\rangle$ ($k \neq 1$), подействуем на это состояние оператором I_k^b , просуммируем по b , а затем вычтем из полученного результата уравнение (3.38), умноженное на c_k . При этом будем иметь

$$R_{1k} I_k^a |\Psi\rangle = 0$$

для любого a , что и доказывает теорему.

Применим теперь эту теорему к рассмотрению пространства асимптотических состояний. Рассмотрим собственное подпространство оператора плотности числа частиц, содержащее N частиц с импульсами $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$. С точки зрения группы симметрии это подпространство представляет собой пространство вида (3.27), а оператор кулоновской фазы Φ сводится к оператору (3.28) с коэффициентами

$$R_{km} = R(\vec{p}_k, \vec{p}_m),$$

которые равны нулю лишь при $\vec{p}_k = \vec{p}_m$ (это следует из свойств кулоновской фазы). Поэтому допустимое состояние $|\Psi\rangle$ массивных частиц должно удовлетворять условию

$$\rho^a(\vec{p})|\Psi\rangle = I^a \delta(\vec{p} - \vec{p}_0)|\Psi\rangle, \quad (3.39)$$

где

$$I^a = \int \frac{d\vec{p}}{2E_{\vec{p}}} \rho^a(\vec{p})$$

— оператор цветного заряда, $\vec{p}_0$ — некоторый импульс, характерный для данного состояния.

Выполнение условия (3.39) для вакуумного и одночастичного состояний гарантируется аксиомами S -матричного подхода. В то же время никакие другие фоковские состояния кварков условию (3.39) не удовлетворяют (действительно, состояние из двух частиц с совпадающими импульсами является ненормируемым и потому не принадлежит фоковскому пространству). Это означает отсутствие фоковских состояний, соответствующих системе разлетающихся кварков.

Приведенные выше результаты могут быть формально обобщены на случай связанных состояний. В этом случае условие унитарности оператора M выполняется лишь для бесцветных состояний. Здесь, однако, нельзя говорить о строгих доказательствах, поскольку мы оказываемся за пределами применимости теории возмущений.

Следует отметить, что физическая идея, лежащая в основе нашего подхода, проста. Суть ее сводится к тому, что в теории с безмассовыми частицами можно избавиться от инфракрасных расходимостей, перейдя к асимптотическим состояниям, в которых исходные фоковские состояния заменяются состояниями, близкими к исходным по суммарному импульсу и энергии и совпадающими с ними по дискретным квантовым числам. Однако в КХД (и в других неабелевых теориях с массивными фермионами и безмассовыми бозонами [22, 23]) построить такие состояния с помощью унитарного оператора асимптотической эволюции невозможно.

Отметим также, что из двух факторов, обуславливающих усложнение инфракрасной структуры КХД по сравнению с КЭД, для нас оказался существенным только один — неабелевость кварк-глюонного взаимодействия. Второй же фактор — самодействие безмассовых глюонов — не сыграл никакой роли в получении ограничений на асимптотические состояния массивных кварков в КХД.

Список литературы

- [1] *A. Yu. Kamenshchik, N. A. Sveshnikov.* Phys. Lett. B. 1983. V. 123. P. 255.
- [2] *L. Lyons.* Phys. Rep. 1985. V. 129. P. 225.
- [3] *H. Pagels.* Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 2747; *A. R. Swift, F. S. Roig.* Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 1206.
- [4] *M. Bander.* Phys. Rep. 1981. V. 75. P. 205.
- [5] *Б. А. Арбузов, С. С. Куренной.* ЯФ. 1982. Т. 36. С. 1314; *А. И. Алексеев, Б. А. Арбузов, В. А. Байков.* ЯФ. 1981. Т. 34. С. 1374; *А. А. Славнов.* ТМФ. 1983. Т. 54. С. 52; *J. S. Ball, F. Zachariazen.* Nucl. Phys. B. 1978. V. 143. P. 148; *M. Baker, J. S. Ball, P. Lucht, F. Zachariazen.* Phys. Lett. B. 1979. V. 86. P. 52.
- [6] *T. Appelquist, J. Carazzone.* Nucl. Phys. B. 1977. V. 120. P. 77; *E. C. Poggio, H. R. Quinn.* Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 578.
- [7] *T. Kinoshita, A. Ukawa.* Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 1596.
- [8] *T. Kinoshita, A. Ukawa.* Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 332.
- [9] *R. Doria, J. Frenkel, J. C. Taylor.* Nucl. Phys. B. 1980. V. 168. P. 93; *C. Di'Ideto, S. Gendron, I. G. Halliday, C. T. Sachrajda.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 183. P. 223.
- [10] *L. Tyburski.* Nucl. Phys. B. 1976. V. 116. P. 214; *G. Sterman.* Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 2123.
- [11] *D. Shalloway.* Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 1762; *C. E. Carneiro, M. Day, J. Frenkel, J. C. Taylor.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 183. P. 445; *A. Andrasi, M. Day, R. Doria, J. Frenkel, J. C. Taylor.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 182. P. 104.
- [12] *T. M. Cornwall, G. Tiktopoulos.* Phys. Rev. D. 1976. V. 13. P. 3370.
- [13] *П. П. Кулиш, Л. Д. Фаддеев.* ТМФ. 1970. Т. 4. С. 153.
- [14] *D. R. Butler, C. A. Nelson.* Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 1196; *C. A. Nelson.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 181. P. 141; V. 186. P. 187.
- [15] *J. Frenkel, J. G. M. Gatheral, J. C. Taylor.* Nucl. Phys. B. 1982. V. 194. P. 172.
- [16] *D. R. Yennie, S. C. Frautschi, H. Suura.* Ann. Phys. 1961. V. 13. P. 379.
- [17] *T. Kinoshita.* J. Math. Phys. 1962. V. 3. P. 650; *T. D. Lee, M. Nauenberg.* Phys. Rev. 1964. V. 133. P. 1549.
- [18] *F. Bloch, A. Nordsieck.* Phys. Rev. 1937. V. 52. P. 54.
- [19] *S. B. Libby, G. Sterman.* Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 2468.
- [20] *W. Magnus.* Commun. Pure Appl. Math. 1954. V. 7. P. 649.
- [21] *Н. А. Свешников.* Пространство асимптотических состояний в теории $\overline{\Psi}\Psi\phi$. Препринт Р2-12267. Дубна: ОИЯИ, 1979.
- [22] *Н. А. Свешников.* Асимптотическая динамика в зарядово-симметричной модели. Препринт Р2-12862. Дубна: ОИЯИ, 1979.
- [23] *Н. А. Свешников.* Пространство асимптотических состояний в зарядово-симметричной модели. В сб.: Труды международного семинара "Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля", 20–27 сентября 1980 г. Серпухов: ИФВЭ, 1980. Т. 1. С. 116.
- [24] *G. 't'Hooft, M. Veltman.* Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189; *C. G. Bollini, J. J. Giambiagi.* Nuovo Cimento. 1972. V. 12. P. 20; *J. Ashmore.* Lett. Nuovo Cimento. 1972. V. 4. P. 289; *C. M. Cicuti, E. Montaldi.* Lett. Nuovo Cimento. 1972. V. 4. P. 329.

Поступила в редакцию 14.IV.1998 г.