Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Быков, Циклические градуировки алгебр Ли и пары Лакса для сигма-моделей, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 3, 380–388

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9252>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:35:34

© 2016 г.

Д. В. Быков*

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРАДУИРОВКИ АЛГЕБР ЛИ И ПАРЫ ЛАКСА ДЛЯ СИГМА-МОДЕЛЕЙ

Исследован класс σ -моделей с комплексными однородными таргет-пространствами, для которых существуют представления нулевой кривизны. Обнаружена связь этих моделей с σ -моделями m -симметрических пространств. Детально описана модель с гиперкомплексным таргет-пространством $S^1 \times S^3$.

Ключевые слова: сигма-модель, интегрируемая система, комплексная структура.

DOI: 10.4213/tmf9252

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теории поля σ -модели составляют классический предмет исследования. Они возникают в широком круге задач физики элементарных частиц – от нарушения киральной симметрии в сильных взаимодействиях до описания распространения струн в искривленных пространствах. Особенно интересный класс σ -моделей образуют так называемые интегрируемые модели [1], [2]. В классическом подходе уравнения движения в таких моделях допускают представление нулевой кривизны, а решения этих уравнений можно найти с помощью метода обратной задачи рассеяния [3]. Многие из этих моделей остаются интегрируемыми также на квантовом уровне. В последние годы интерес к классическим решениям двумерных σ -моделей возобновился в связи с определенными продвижениями в понимании их связи с расходимостями рядов теории возмущений в квантованных версиях этих моделей [4]. Это может оказаться первым шагом к согласованной математически корректной формулировке взаимодействующей квантовой теории поля, сначала в двух измерениях, но с возможным последующим обобщением на более реалистичные четырехмерные модели. Заметим, что реалистичные теории, как правило, включают калибровочные поля, поэтому при попытках построения “непертурбативной” формулировки теории следует также иметь в виду дополнительные сложности, в частности, связанные с наличием грибовских копий. Отметим, однако, что в последнее время имеется прогресс и в этом направлении исследований [5].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: dbykov@mi.ras.ru

В недавних статьях [6]–[8] рассмотрен класс σ -моделей с таргет-пространствами $\mathcal{M}$, которые характеризуются следующими свойствами: $\mathcal{M}$ – комплексное однородное пространство G/H , а метрика Киллинга на G/H эрмитова относительно комплексной структуры. Пусть $X: \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$ есть отображение с мирового листа Σ в таргет-пространство $\mathcal{M}$ с метрикой Киллинга $\mathbb{G}$. Для заданного таргет-пространства, обладающего указанными свойствами, запишем действие σ -модели

$$\mathcal{S} := \int_{\Sigma} d^2z \|\partial X\|_{\mathbb{G}}^2 + \int_{\Sigma} X^* \omega, \quad (1)$$

где ω – кэлерова форма на $\mathcal{M}$, а $z, \bar{z}$ – локальные координаты на евклидовом мировом листе Σ . Ранее [8] мы показали, что уравнения движения таких моделей допускают представление в виде условия нулевой кривизны $dA_u - A_u \wedge A_u = 0$ однопараметрического семейства связностей

$$A_u = \frac{1-u}{2} K_z dz + \frac{1-u^{-1}}{2} K_{\bar{z}} d\bar{z}, \quad (2)$$

где K – канонический нётеровский ток, вычисленный по действию (1).

Перейдем к обсуждению вопроса о том, какие пространства $\mathcal{M}$ попадают в описанную выше категорию. Классификация комплексных однородных пространств с дополнительными условиями, что $\mathcal{M}$ – односвязное многообразие и G – полупростая группа, была проведена давно (см. работу [9]). Эти пространства описываются следующей теоремой: каждому такому многообразию G/H отвечает подгруппа H , полупростая часть которой совпадает с полупростой частью централизатора торической подгруппы в G . В случае $G = SU(N)$, например, эти многообразия суть

$$\mathcal{M}_{n_1, \dots, n_m | N} = \frac{SU(N)}{S(U(n_1) \times \dots \times U(n_m))}, \quad m \geq 0, \quad n_i > 0, \quad \sum_{i=1}^m n_i \leq N. \quad (3)$$

Заметим, что $\mathcal{M}_{n_1, \dots, n_m | N}$ – торические расслоения над пространствами флагов.

В настоящей работе перед нами стоят две цели. Во-первых, заметим, что когда $\sum_{k=1}^m n_k = N$, многообразие $\mathcal{M}_{n_1, \dots, n_m | N}$ представляет собой пространство флагов. Известно, что такое пространство флагов является m -симметрическим пространством. Это означает по определению, что группа $SU(N)$ обладает автоморфизмом порядка m , причем этот автоморфизм оставляет инвариантной в точности подгруппу $S(U(n_1) \times \dots \times U(n_m))$. В последние годы активно исследовались σ -модели, таргет-пространства которых обладают такого рода градуировками. В первую очередь интерес к этим пространствам связан с тем фактом, что группа изометрий суперсимметризованного многообразия $\text{AdS}_5 \times S^5$, возникающего в рамках AdS/CFT -соответствия, обладает $\mathbb{Z}_4$ -автоморфизмом. Представления нулевой кривизны для некоторых из этих моделей (в частности, для случая, когда таргет-пространство есть пространство флагов) были построены в работе [10]. В этой конструкции существенным образом используется градуировка. В разделе 2 мы покажем, однако, что модели из работы [10] совпадают с моделями из [8], по крайней мере в случае пространства флагов. Помимо прочего эти модели можно определить каноническим образом, используя лишь комплексную структуру на таргет-пространстве, не прибегая к $\mathbb{Z}_m$ -градуировкам.

Наша вторая задача – выйти за рамки класса m -симметрических таргет-пространств. Для этого мы опустим требование того, чтобы группа G была полупростой, а таргет-пространство $\mathcal{M}$ – односвязным, и рассмотрим в разделе 3 таргет-пространство $\mathcal{M} = S^1 \times S^3 = U(2)$. Данное многообразие особо примечательно тем, что оно служит примером гиперэрмитова многообразия – многообразия, на котором имеется целая сфера S^2 однородных комплексных структур, совместных с метрикой [11]. В связи с этим лагранжиан соответствующей σ -модели (типа тех, что рассматривались в работе [8]) зависит явным образом от единичного вектора $\vec{n}$, описывающего выбор комплексной структуры.

2. m -СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Классическая интегрируемость давно установлена для симметрических таргет-пространств [12]. Одно из определений симметрического пространства G/H связано с наличием $\mathbb{Z}_2$ -градуировки на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G .

Если ввести разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, можно определить $\mathbb{Z}_2$ -градуировку компонент следующим образом: $\deg(\mathfrak{h}) = 0$, $\deg(\mathfrak{m}) = 1$. В этом случае коммутационные соотношения, характеризующие симметрическое пространство, возникают автоматически:

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad (\text{подалгебра}), \quad (4)$$

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad (\text{редуктивность}), \quad (5)$$

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}, \quad (\text{симметрическое пространство}). \quad (6)$$

Аналогичным образом можно определить градуировки другими циклическими группами $\mathbb{Z}_m$. По определению такая градуировка означает наличие следующего разложения:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathfrak{g}_i, \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j \pmod{m}}. \quad (7)$$

Обозначим через $H \subset G$ группу Ли, отвечающую подалгебре $\mathfrak{g}_0$. Фактор-пространство G/H называется в этом случае m -симметрическим пространством. В этих терминах обычные симметрические пространства суть 2-симметрические пространства. Можно показать, что по аналогии со свойствами симметрических пространств уравнения движения специальных σ -моделей с таргет-пространствами G/H можно переписать в виде условия нулевой кривизны однопараметрического семейства связностей. Например, $\mathbb{Z}_4$ -градуировка на супералгебре Ли $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$ использовалась в работах [13], [14] для доказательства интегрируемости σ -модели Грина–Шварца с таргет-пространством $\text{Super}(\text{AdS}_5 \times S^5) = \frac{PSU(2, 2|4)}{SO(1, 4) \times SO(5)}$. В этом случае, однако, метрика на таргет-пространстве не является метрикой Киллинга¹⁾, поэтому данная модель не попадает в тот класс, который мы анализируем в настоящей статье.

Модели, рассмотренные в работе [10], ближе к нашим. Их действие таково:

$$\tilde{\mathcal{S}} := \int_{\Sigma} d^2x \|\partial X\|_G^2 + \int_{\Sigma} X^* \tilde{\omega}, \quad (8)$$

¹⁾Эта метрика, например, вырождена в фермионных направлениях.

где $\tilde{\omega}$ – 2-форма, построенная при помощи $\mathbb{Z}_m$ -разложения алгебры Ли (7). Заметим, что если бы $\tilde{\omega}$ была кэлеровой формой, то мы получили бы в точности действие (1). Перейдем теперь к точному определению формы $\tilde{\omega}$. Разложим ток $J = -g^{-1}dg$ (где $g \in G$) в соответствии с (7):

$$J = -g^{-1}dg = \sum_{i=0}^{m-1} J^{(i)}, \quad \text{где } J^{(i)} \in \mathfrak{g}_i. \quad (9)$$

Форма $\tilde{\omega}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k)-k}{m} \operatorname{tr}(J^{(k)} \wedge J^{(m-k)}). \quad (10)$$

В связи с этой формулой возникает следующий важный вопрос. Из выражения (10) видно, что форма $\tilde{\omega}$ зависит от выбора $\mathbb{Z}_m$ -градуировки. Как правило, заданная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает много разных градуировок (с различными или с одинаковыми значениями m). Вопрос состоит в следующем: различаются ли модели, определенные формулами (8)–(10), если выбирать различные градуировки алгебры $\mathfrak{g}$?

Прежде чем ответить на этот вопрос, вспомним, каким образом строятся циклические градуировки на полупростых алгебрах Ли [15]. Будем для простоты рассматривать случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N+1)$. Циклическая градуировка может быть построена следующим образом²⁾: необходимо выбрать систему из N простых положительных корней $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, а также максимальный отрицательный корень $\alpha_{N+1} = -\alpha_1 - \dots - \alpha_N$ ³⁾. Этим корням $\alpha_1, \dots, \alpha_{N+1}$ присваиваются произвольные (неотрицательные целые) градуировки $m_1, \dots, m_N, m_{N+1}$. Тогда градуировки всех остальных корней определяются структурой алгебры Ли, а значение m вычисляется по формуле

$$m = m_1 + \dots + m_{N+1}. \quad (11)$$

Если использовать обычную матричную запись, эта градуировка выглядит таким образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{m}_1 & & & \\ & 0 & \mathbf{m}_2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \mathbf{m}_N \\ \mathbf{m}_{N+1} & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

²⁾Здесь мы ограничимся градуировкой типа $A_N^{(1)}$.

³⁾ В статье Каца [15] корни $\alpha_1, \dots, \alpha_{N+1}$ рассматриваются как положительные простые корни соответствующей аффинной алгебры Ли $\hat{A}_N$. Рассмотрим случай $N = 2$. Простые положительные корни петлевой алгебры $\mathfrak{su}_3(t, t^{-1})$ можно выбрать таким образом:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_0 = t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном контексте последний корень α_0 , аналог α_{N+1} , обычно называют “мнимым”. Вообще говоря, вся теория циклических градуировок алгебр Ли формулируется Кацем естественным образом в терминах аффинных алгебр Ли и их диаграмм Дынкина.

Подалгебра $\mathfrak{g}_0$, отвечающая знаменателю H фактор-пространства G/H , определяется теми m_i , которые равны нулю. Например, если все $m_i > 0$, то результирующее пространство – это многообразие полных флагов $\frac{SU(N+1)}{S(U(1)^{N+1})}$.

В общем случае при определенном выборе набора $m_1, \dots, m_{N+1}$ некоторые из подпространств $\mathfrak{g}_i$ будут тождественно равны нулю. Поэтому естественное ограничение состоит в том, чтобы наложить требование $\mathfrak{g}_i \neq 0$ для всех $i \pmod m$. Назовем такую градуировку *допустимой*. При этом все равно остается большое количество возможностей. Например, в случае алгебры $SU(3)$ полный набор допустимых градуировок дается следующим списком (с точностью до действия группы Вейля S_3):

$$\mathbb{Z}_2: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Z}_3: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 2 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbb{Z}_4: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 3 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Z}_5: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 4 & 0 & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 4 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbb{Z}_6: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 5 & 0 & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Z}_7: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 6 & 0 & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & 5 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Здесь $\mathbb{Z}_2$ -градуировка и вторая $\mathbb{Z}_3$ -градуировка отвечают однородному пространству $SU(3)/S(U(2) \times U(1)) = \mathbb{CP}^2$, а все остальные градуировки соответствуют пространству флагов $\mathcal{M}_{1,1,1|3}$.

Теперь мы готовы дать ответ на поставленный ранее вопрос: какова связь между σ -моделями с действием (8), если выбраны различные градуировки на соответствующей алгебре Ли? Наше утверждение состоит в следующем.

УТВЕРЖДЕНИЕ. По крайней мере для случая однородных пространств унитарной группы, модели, определенные формулами (8)–(10), при выборе различных градуировок типа $A_N^{(1)}$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ классически эквивалентны моделям, заданным действием (1), при соответствующем выборе комплексной структуры на таргет-пространстве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся случаем, когда G/H является полным пространством флагов. Интегрируемая комплексная структура на пространстве флагов определяется выбором множества положительных корней [16]. Для простоты выберем множество верхнетреугольных матриц (все остальные варианты можно получить при помощи действия группы Вейля, т. е. действием перестановки). Обозначим верхне- и нижнетреугольные компоненты токов $J^{(k)}$ как $(J^{(k)})_{\pm}$. При $k \neq 0$ имеем $J^{(k)} = (J^{(k)})_+ + (J^{(k)})_-$. Ясно, что

$$\mathrm{tr}((J^{(k_1)})_+ \wedge (J^{(k_2)})_+) = \mathrm{tr}((J^{(k_1)})_- \wedge (J^{(k_2)})_-) = 0,$$

поэтому форму (10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k)-k}{m} (\mathrm{tr}(J_+^{(k)} \wedge J_-^{(m-k)}) + \mathrm{tr}(J_-^{(k)} \wedge J_+^{(m-k)})) = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k)-k}{m} \mathrm{tr}(J_+^{(k)} \wedge J_-^{(m-k)}) \end{aligned} \quad (16)$$

(переход с последнему выражению получен заменой $k \rightarrow m-k$ во втором слагаемом). Суммирование по k , т. е. по внедиагональным подпространствам алгебры $\mathfrak{su}(N+1)$, можно заменить суммированием по положительным корням α_{ij} с $i < j$:

$$\tilde{\omega} = \sum_{i < j} \frac{(m - k_{ij}) - k_{ij}}{m} J_{ij} \wedge J_{ji}, \quad (17)$$

где k_{ij} – градуировка корня α_{ij} . Эта градуировка определяется множеством целых чисел $m_1, \dots, m_{N+1}$, введенных ранее в (12). Разрешим условие (11) следующим образом⁴⁾:

$$m_k = n_k - n_{k+1}, \quad (18)$$

где n_k – целые числа и $n_{N+2} \equiv n_1 - m$. Простое вычисление показывает, что градуировка k_{ij} имеет вид

$$k_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} m_k = n_i - n_j, \quad 1 \leq i < j \leq N+1. \quad (19)$$

Подставляя данное выражение в (17), получаем

$$\tilde{\omega} = \sum_{i < j} J_{ij} \wedge J_{ji} - \sum_{i,j} \frac{n_i - n_j}{m} J_{ij} \wedge J_{ji}. \quad (20)$$

Во втором члене мы воспользовались антисимметрией коэффициента $(n_i - n_j)/m$, чтобы избавиться при суммировании от условия $i < j$. Второй член можно переписать в виде

$$\sum_{i,j=1}^{N+1} \frac{n_i - n_j}{m} J_{ij} \wedge J_{ji} = 2 \sum_{i,j=1}^{N+1} \frac{n_i}{m} J_{ij} \wedge J_{ji} = 2 \sum_{i=1}^{N+1} \frac{n_i}{m} (J \wedge J)_{ii} = 2 \sum_{i=1}^{N+1} \frac{n_i}{m} dJ_{ii}. \quad (21)$$

В последнем равенстве мы учли, что ток (9) плоский: $dJ - J \wedge J = 0$. Важно заметить, что правая часть равенства (21) представляет собой замкнутую, но не точную форму, так как величины J_{ii} являются не 1-формами на пространстве флагов, а связностями в определенных линейных расслоениях над ним (другими словами, при преобразованиях из знаменателя H фактор-пространства G/H они меняются “неоднородным образом”: $J_{ii} \rightarrow J_{ii} + d\alpha_i$).

Заметим, что первое слагаемое в правой части формулы (20) – это в точности кэлерова форма метрики Киллинга при выборе комплексной структуры, в которой верхнетреугольные генераторы алгебры Ли голоморфны: $\omega = \sum_{i < j} J_{ij} \wedge J_{ji}$.

Окончательно запишем (20) как

$$\tilde{\omega} = \omega - 2 \sum_{i=1}^{N+1} \frac{n_i}{m} dJ_{ii}. \quad (22)$$

⁴⁾Из соотношения (18) следует, что циклический автоморфизм $\hat{\Omega}$ алгебры Ли, который определяет $\mathbb{Z}_m$ -градуировку, может быть представлен в следующем виде: $\hat{\Omega}(a) = \Omega a \Omega^{-1}$, где $\Omega = \text{diag}(e^{2\pi i n_1/m}, \dots, e^{2\pi i n_{N+1}/m})$.

Этим завершается доказательство. Действительно, мы показали, что независимо от выбора градуировки (которая теперь параметризована целыми числами n_i) форма $\tilde{\omega}$ отличается от кэлеровой формы на топологический член. Ясно, что этот топологический член зависит от выбранной градуировки, однако он не вносит вклад в уравнения движения.

3. СИГМА-МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВА $S^1 \times S^3$

Действие (1) зависит явным образом от комплексной структуры на таргет-пространстве через зависимость от нее кэлеровой формы ω . Чтобы подчеркнуть эту зависимость, рассмотрим таргет-пространство особого вида, которое обладает непрерывным семейством комплексных структур: пространство $\mathcal{M} = S^1 \times S^3 \simeq U(2)$. Ясно, что метрика Киллинга на $\mathfrak{u}(2)$ является вырожденной и потому не подходит для построения действия σ -модели. Поэтому мы будем использовать ее простейшее обобщение – метрику $\langle a, b \rangle := \text{tr}(ab)$, где a, b берутся в фундаментальном (а не в присоединенном) представлении.

Выберем сначала одну комплексную структуру на $U(2)$, постулировав, что подпространство $(\mathfrak{m}_+)_0 \subset \mathfrak{u}(2)$ является голоморфным:

$$(\mathfrak{m}_+)_0 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right). \quad (23)$$

Если $a \in (\mathfrak{m}_+)_0$, то $\text{tr}(a^2) = 0$, поэтому выбранная метрика в данной комплексной структуре является эрмитовой. Антиголоморфное подпространство $(\mathfrak{m}_-)_0$ эрмитово сопряжено с $(\mathfrak{m}_+)_0$:

$$(\mathfrak{m}_-)_0 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right). \quad (24)$$

Голоморфное подпространство для произвольной левоинвариантной комплексной структуры $I(h)$ (в той же самой компоненте связности) получается действием группы $SU(2)$:

$$\mathfrak{m}_+ = h(\mathfrak{m}_+)_0 h^\dagger, \quad h \in SU(2). \quad (25)$$

Ясно, что пространство $(\mathfrak{m}_\pm)_0$ сохраняется диагональной подгруппой $U(1) \subset SU(2)$, поэтому комплексная структура $I(h)$ зависит только от представителя $hU(1)$ в фактор-пространстве, т. е. параметризуется единичным вектором $\vec{n} \in SU(2)/U(1) = S^2$.

Перейдем к построению действия модели. Оно будет зависеть от $\vec{n}$. Во-первых, разложим ток $J = -g^{-1} dg$ по базису эрмитовых матриц $\sigma_\mu = \{\mathbf{1}, \vec{\sigma}\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$:

$$J = \sum_{\mu=0}^3 J_\mu \sigma_\mu. \quad (26)$$

Необходимо построить проекции тока на подпространства $\mathfrak{m}_\pm$ (подробности см. в работе [8]). Так как $\mathfrak{m}_\pm = h(\mathfrak{m}_\pm)_0 h^\dagger$, это то же самое, что построить проекции $h^\dagger J h$ на $(\mathfrak{m}_\pm)_0$. Ввиду того что $h \in SU(2)$, мы имеем

$$\sum_{k=1}^3 h^\dagger J_k \sigma_k h = \sum_{k,m=1}^3 J_k \Lambda_{km} \sigma_m, \quad \Lambda \in SO(3). \quad (27)$$

Пусть

$$\tilde{J} = \sum_{\mu=0}^3 \tilde{J}_\mu \sigma_\mu = \hbar^\dagger J h = J_0 \mathbf{1} + \sum_{k,m=1}^3 J_k \Lambda_{km} \sigma_m, \quad (28)$$

т. е. $\tilde{J}_0 = J_0$ и $\tilde{J}_m = \sum_{k=1}^3 \Lambda_{km} J_k$.

Проекции на подпространства $(\mathfrak{m}_\pm)_0$ легко находятся из разложения

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \frac{1-i}{2}(\tilde{J}_0 + i\tilde{J}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + (\tilde{J}_1 - i\tilde{J}_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1+i}{2}(\tilde{J}_0 - i\tilde{J}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + (\tilde{J}_1 + i\tilde{J}_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

Лагранжиан модели имеет вид

$$\mathcal{L} = \text{tr}((J_+)_z (J_-)_{\bar{z}}) = (\tilde{J}_0 + i\tilde{J}_3)_z (\tilde{J}_0 - i\tilde{J}_3)_{\bar{z}} + (\tilde{J}_1 - i\tilde{J}_2)_z (\tilde{J}_1 + i\tilde{J}_2)_{\bar{z}}. \quad (30)$$

Нам необходимо выразить его через исходный ток J . Для этого параметризуем ортогональную матрицу Λ с помощью трех ортонормированных векторов:

$$\Lambda = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3 := \vec{n}), \quad \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j = \delta_{ij}.$$

Тогда $\tilde{J}_m = \vec{n}_m \cdot \vec{J}$. Чтобы выразить второй член в лагранжиане (30) через $\vec{n}_3 = \vec{n}$, воспользуемся следующим тождеством:

$$(\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_2 - \vec{n}_2 \otimes \vec{n}_1)_{ij} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} (\vec{n}_3)_k. \quad (31)$$

Оно следует из того, что $\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Используя соотношение полноты

$$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_1 + \vec{n}_2 \otimes \vec{n}_2 + \vec{n}_3 \otimes \vec{n}_3 = \mathbf{1}_3, \quad (32)$$

можно записать лагранжиан следующим образом:

$$\mathcal{L} = (J_0 + i\vec{n} \cdot \vec{J})_z (J_0 - i\vec{n} \cdot \vec{J})_{\bar{z}} + \vec{J}_z \cdot \vec{J}_{\bar{z}} - (\vec{n} \cdot \vec{J})_z (\vec{n} \cdot \vec{J})_{\bar{z}} + \sum_{i,j,k=1}^3 i \epsilon_{ijk} (J_i)_z (J_j)_{\bar{z}} n_k. \quad (33)$$

Его можно переписать в еще более компактном виде

$$\mathcal{L} = \sum_{\mu,\nu=0}^3 (J_\mu)_z A_{\mu\nu} (J_\nu)_{\bar{z}}, \quad (34)$$

где

$$A = \mathbf{1}_4 + iB, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & 0 & n_3 & -n_2 \\ n_2 & -n_3 & 0 & n_1 \\ n_3 & n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = -\mathbf{1}_4. \quad (35)$$

Вид матрицы подсказывает более инвариантное определение для B : это антисимметричная матрица, квадрат которой равен минус единице:

$$B_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda,\rho=0}^3 \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} B_{\lambda\rho}, \quad B^2 = -\mathbf{1}_4. \quad (36)$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей статье мы продолжили исследование предложенных ранее в работах [6], [8] потенциально интегрируемых σ -моделей с комплексными однородными таргет-пространствами. В разделе 2 было показано, что для случая, когда таргет-пространство является пространством флагов (m -симметрическим пространством), рассматриваемые модели совпадают с предложенными в статье [10]. Тот факт, что модели из работы [8] зависят только от метрики и комплексной структуры на таргет-пространстве, означает, что по существу они не зависят от выбора градуировки алгебры Ли группы изометрии (в то время как эта градуировка входит в определение m -симметрического пространства). Чтобы выйти за рамки класса m -симметрических таргет-пространств, в разделе 3 мы обсудили σ -модель поверхности Хопфа $S^1 \times S^3 = U(2)$. Это многообразие является гиперкомплексным, в результате чего лагранжиан модели зависит явно от единичного вектора $\vec{n}$, который параметризует сферу $U(2)$ -инвариантных комплексных структур. Было бы интересно исследовать вопросы, связанные с классической и квантовой интегрируемостью модели. Мы оставляем их для дальнейшей работы.

Благодарности. Я хотел бы выразить благодарность А. А. Славнову и моим родителям за поддержку.

Список литературы

- [1] K. Pohlmeyer, *Commun. Math. Phys.*, **46**:3 (1976), 207–221.
- [2] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *ЖЭТФ*, **74**:6 (1978), 1953–1973.
- [3] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [4] G. V. Dunne, M. Ünsal, *JHEP*, **11** (2012), 170, 84 pp., arXiv:1210.2423.
- [5] А. А. Славнов, *ТМФ*, **183**:2 (2015), 163–176, arXiv:1503.03380.
- [6] D. Bykov, *Nucl. Phys. B*, **894** (2015), 254–267.
- [7] D. Bykov, *Nucl. Phys. B*, **902** (2016), 292–301, arXiv:1506.08156.
- [8] D. Bykov, *Phys. Lett. B*, **760** (2016), 341–344, arXiv:1605.01093.
- [9] H.-C. Wang, *Amer. J. Math.*, **76**:1 (1954), 1–32.
- [10] C. A. S. Young, *Phys. Lett. B*, **632**:4 (2006), 559–565, arXiv:hep-th/0503008.
- [11] C. P. Boyer, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **102**:1 (1988), 157–164, arXiv:1412.3746.
- [12] H. Eichenherr, M. Forger, *Nucl. Phys. B*, **155**:2 (1979), 381–393.
- [13] I. Bena, J. Polchinski, R. Roiban, *Phys. Rev. D*, **69**:4 (2004), 046002, 7 pp., arXiv:hep-th/0305116.
- [14] G. Arutyunov, S. Frolov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:25 (2009), 254003, 121 pp., arXiv:0901.4937.
- [15] В. Г. Кац, *Функц. анализ и его прил.*, **3**:3 (1969), 94–96.
- [16] D. V. Alekseevsky, “Flag manifolds”, *11th Yugoslav geometrical seminar. Invited papers* (Divčibare, Yugoslavia, October 10–17, 1996), *Zbornik Radova* (Beograd) (N.S.), **6**(14), eds. N. Bokan, N. Blažić, Matematički Institut SANU, Beograd, 1997, 3–35.

Поступила в редакцию 11.07.2016