Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Рудой, О. А. Котельникова, Функциональное уравнение для кроссовера в модели одномерных случайных блужданий Вейерштрасса, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 3, 477–484

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:50:04

© 2016 г.

Ю. Г. Рудой*, О. А. Котельникова†

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КРОССОВЕРА В МОДЕЛИ ОДНОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ ВЕЙЕРШТРАССА

Проблема одномерной симметричной диффузии рассмотрена в рамках подхода марковских случайных блужданий типа Вейерштрасса с использованием двухпараметрического скейлинга для переходной вероятности. Построено решение функционального уравнения для характеристической функции Ляпунова в виде суммы регулярного (однородного) и сингулярного (неоднородного) решений и найдены условия кроссовера от нормальной к аномальной диффузии.

Ключевые слова: нормальная и аномальная диффузия, марковский процесс, фрактальная размерность, функциональное уравнение, функция Вейерштрасса.

DOI: 10.4213/tmf9253

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема диффузии – как нормальной, так и аномальной – продолжает оставаться одной из актуальных в современных физико-химических и иных приложениях (см., например, обзоры [1]–[3], где использован формализм дробных производных, недостаточно знакомый физикам). Кроме того, эта проблема представляет интерес и с математической точки зрения как один из разделов аналитической теории вероятностей (см., например, [4]–[7]). Связь между этими областями исследований основана на моделировании диффузионных процессов в рамках подхода одномерных (на непрерывной пространственно-координатной оси $-\infty < x < \infty$) и симметричных марковских случайных блужданий (СБ) с переходной вероятностью $P(x)$.

Особый интерес в этой связи представляют, например, работы [8], [9], где для симметричной функции $P(-x) = P(x)$ допускаются сколь угодно большие (в том числе

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг.

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия. E-mail: rudikar@mail.ru

†Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: olga@magn.ru

и бесконечные) значения эффективного радиуса $R_{\text{eff}} = \sigma$. Здесь $\sigma^2 = m_2$ – дисперсия, или второй центральный момент $P(x)$, причем для симметричного случая все четные центральные моменты совпадают с простыми моментами, а все нечетные моменты равны нулю.

Существенно, что в работах [8], [9] переходная функция $P(x)$ снабжается одним или двумя управляющими параметрами, что позволяет изменять R_{eff} в широких пределах и тем самым переходить от нормальной диффузии (НД) с конечным значением R_{eff} и экспоненциальным фронтом к аномальной диффузии (АД) с бесконечным R_{eff} и степенным фронтом. Если начальное распределение $p_0(x) = \delta(x)$, то согласно [4]–[7] искомое распределение $p_N(x)$ после $N \geq 1$ шагов (скачков) представляется N -кратной сверткой функции $P(x)$, в связи с чем целесообразно перейти от функции $P(x)$ к ее фурье-образу $G(k)$ – характеристической функции Ляпунова, для которой свертка превращается в произведение. Кроме того, функция $G(k)$ сглаживает все особенности $P(x)$, а в силу тауберовых теорем интересующая нас асимптотика $p_N(x)$ как в дискретном времени (при $N \gg 1$), так и в пространстве (при больших значениях $x \gg 1$) определяется значениями $G(k)$ при малых значениях k вблизи точки $k = 0$.

Сложность этой задачи состоит в том, что для физически интересных функций $P(x)$ функции $G(k)$ часто являются весьма “экзотическими”, например обобщенная дзета-функция Римана для СБ Римана в работе [8] или функция Вейерштрасса¹⁾ для СБ Вейерштрасса в работе [9]. Наибольший интерес представляет то обстоятельство, что в зависимости от значений управляющих параметров у названных функций имеются возможности как аналитического ($\sim k^2$), так и неаналитического ($\sim k^\alpha$, $0 < \alpha < 2$) поведения $G(k)$ при $k \rightarrow 0$.

Существенно, что аналитическое поведение $G(k)$ универсально для всех функций $P(x)$ с конечным значением $R_{\text{eff}} = \sigma = \sqrt{m_2}$, причем согласно [4]–[7] $p_N(x)$ также имеет асимптотически универсальный вид, а именно нормальный (гауссовский) вид, и описывает НД Гаусса–Эйнштейна–Винера, где $p_N(x) \sim e^{-x^2/2\sigma_N^2}$, $\sigma_N^2 \sim N$. По существу, это утверждение представляет собой один из вариантов формулировки центральной предельной теоремы [4].

При бесконечном R_{eff} , напротив, значение α специфично для каждой из функций $P(x)$ и различным образом зависит от входящих в $P(x)$ параметров; соответственно, фронт диффузии $p_N(x)$ имеет степенной вид $C_\alpha N x^{-(1+\alpha)}$, характерный для АД (иногда называемой также АД Леви–Хинчина). Ясно, что посредством управляющих параметров можно регулировать значение $R_{\text{eff}} = \sigma = \sqrt{m_2}$, тем самым реализуя *кроссовер* между двумя режимами – НД и АД – единого явления диффузии. Этот вопрос детально рассмотрен нами в работе [11] на основе аналогии диффузионного кроссовера с магнитным фазовым переходом.

В заключение этого раздела заметим, что даже явный вид функции $G(k)$, например заданной в виде бесконечного степенного или тригонометрического ряда, еще не дает возможности нахождения показателя α . По-видимому, наиболее адекватным средством для этого является получение и решение функционального уравнения

¹⁾Заметим, что в этом году исполняется ровно 100 лет со времени детального исследования этой функции, выполненного Харди в работе [10].

для $G(k)$ с использованием присущих этой функции свойств *обобщенной однородности* (самоподобия, масштабной инвариантности); этот подход широко используется, например, в методе ренормализационной группы (см., например, [12]).

Одним из преимуществ предлагаемого подхода является возможность избежать применения малознакомого физикам аппарата дробных производных [1]–[3]. В качестве содержательного примера рассмотрим далее модель СБ Вейерштрасса, сформулированную Монтроллом и др. в работе [9].

2. МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ ВЕЙЕРШТРАССА

В работе [9] изучена простая, но достаточно содержательная модель для переходной вероятности $P(x)$ с двойным степенным масштабированием (иногда называемым скейлингом Бернулли):

$$P(x, \lambda) = p \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} [\delta(x - b^j) + \delta(x + b^j)]. \quad (1)$$

В этой модели *радиусы* одномерных шагов и соответствующие им *вероятности* образуют две неограниченные геометрические прогрессии: возрастающую (по длине шага) $\pm 1, \pm b, \dots, \pm b^j, \dots$, где $1 < b < \infty$, и убывающую (по значению вероятности) $p, p/\lambda, \dots, p/\lambda^j, \dots$, где $1 < \lambda < \infty$, $0 < p < 1$. Число узлов ($j = 0, 1, \dots$) предполагается неограниченным, а значение $b > 1$ для простоты в дальнейшем будем считать заданным ($b = \text{const}$). Ясно, что с уменьшением λ распределение $P(x, \lambda)$ становится все более широким (медленно убывающим), однако значения $\lambda \leq 1$ исключены ввиду нарушения условия нормировки, в силу которого $2[p + (p/\lambda) + \dots + (p/\lambda^j) + \dots] = 1$, откуда легко найти $p = p(\lambda) = (1 - 1/\lambda)/2$.

Заметим, что в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ в ряде (1) сохраняется лишь первое слагаемое с $j = 0$, так что в этом пределе $P(x, \lambda) \rightarrow P(x, \infty) = P(\pm 1) = p(\infty) = 1/2$, что совпадает со стандартным определением СБ Гаусса–Эйнштейна–Винера [4]–[7]; для этого случая распределение $P(x, \infty)$ является наиболее узким, причем $R_{\text{eff}} = \sigma = \sqrt{m_2}$ принимает минимальное значение, равное единице. Очевидно, что с уменьшением λ распределение $P(x, \lambda)$ уширяется, так как величина $R_{\text{eff}} = \sigma = \sqrt{m_2}$ при этом возрастает – вплоть до ее расходимости, определяющей точку кроссовера между НД и АД. Для точной количественной оценки и нахождения указанной точки необходимо найти явное выражение для дисперсии $\sigma^2(b, \lambda)$, причем всегда $\partial \sigma^2(b, \lambda)/\partial \lambda < 0$ при всех λ .

Удобным аппаратом для решения этой задачи является аппарат характеристической функции $G(k, \lambda)$, которая для $P(x, \lambda)$ из (1) дается функцией Вейерштрасса

$$G(k, \lambda) = 2p(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} \cos(kb^j), \quad (2)$$

причем $G(0, \lambda) \equiv 1$ в силу условия нормировки, $G'(0, \lambda) = 0$ в силу симметрии. Выражение (2) представляет собой тригонометрический ряд с пропусками (лакунами), позволяющий найти формальные выражения для всех четных моментов $m^{(2s)}(\lambda)$,

которые по определению равны производным $G^{(2s)}(k, \lambda)$ по k порядка $2s$ при $k = 0$:

$$|m_{2s}(\lambda)| = 2p(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{\text{cr}}^{(s)}}{\lambda} \right)^j, \quad \lambda_{\text{cr}}^{(s)} = (\lambda_{\text{cr}})^s, \quad \lambda_{\text{cr}} = b^2. \quad (3)$$

Если бы значения всех моментов (3) были конечны при любом значении λ , то можно было бы перейти от разложения Фурье (2) к разложению Тейлора для $G(k, \lambda)$, справедливому при всех значениях $1 < \lambda < \infty$ (хотя бы вблизи точки $k = 0$),

$$G(k, \lambda) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(2s)!} (i^{2s}) m_{2s}(\lambda) k^{2s}. \quad (4)$$

Однако каждый момент (3) порядка $2s$ имеет вид суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $\lambda_{\text{cr}}^{(s)}/\lambda$, где пороговые значения $\lambda_{\text{cr}}^{(s)}$ образуют возрастающую (с ростом порядка s от 1 до ∞) неограниченную геометрическую прогрессию со знаменателем $\lambda_{\text{cr}}^{(s)} = (\lambda_{\text{cr}})^s$, $\lambda_{\text{cr}} = b^2 > 1$.

Следовательно, каждый из рядов (3) для момента $m_{2s}(\lambda)$ сходится только при $\lambda_{\text{cr}}^{(s)}/\lambda < 1$, т.е. при достаточно больших значениях λ ; только в этом случае моменты имеют конечные значения $m_{2s}(\lambda) = 2p(\lambda)[1 - (\lambda_{\text{cr}}^{(s)}/\lambda)]^{-1}$, где $p(\lambda) = (1 - 1/\lambda)/2$. Очевидно, что при любом конечном λ в бесконечном ряде (4) всегда найдется бесконечное число расходящихся (сингулярных) слагаемых; именно это обстоятельство будет использовано ниже в разделе 3 при построении решения функционального уравнения для $G(k, \lambda)$ при любом λ .

Таким образом, ряд Тейлора (4) сходится только в рассмотренном выше пределе $\lambda \rightarrow \infty$, причем с учетом очевидного равенства $m_{2s}(\infty) = 2p(\infty) \equiv 1$ для всех значений s от 1 до ∞ , сумма ряда (4) равна $\cos k$ при любых значениях k . Тот же результат, разумеется, следует и из разложения (2), в котором при $\lambda \rightarrow \infty$ остается лишь первое (при $j = 0$) слагаемое $G(k, \infty) = \cos k$, так что режим НД вообще будет единственным для диффузии, а режим АД (и, следовательно, кроссовер АД/НД) будет отсутствовать в принципе.

В общем случае для произвольных значений λ разложение Тейлора (4) теряет применимость и не может описывать все режимы диффузии. Иными словами, функция $G(k, \lambda)$ при конечных λ не будет аналитической вблизи $k = 0$, и ее разложение будет идти по нецелым степеням k , например слагаемое низшего порядка в этом разложении должно иметь вид k^α , где $0 < \alpha < 2$, так что $m_2(\lambda) \equiv G^{(2)}(k = 0, \lambda)$ будет тогда, как и ожидалось, расходиться при $\lambda < \lambda_{\text{cr}}^{(1)}$.

Именно эти значения параметра λ будут определять режим АД, но следует также учитывать, что при изменении λ от бесконечно больших значений до минимального (равного единице) фактически будет происходить бесконечный каскад “кроссоверов”, вполне аналогичных так называемой “чертовой лестнице” (“devil’s staircase”) фазовых переходов (см., например, [7]). Детальный анализ соответствующей фазовой диаграммы аналога магнитного фазового перехода с логарифмическим параметром порядка дан нами в работе [11], но здесь нас интересует взаимосвязь разложений (2) и (4).

3. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

Ввиду неприменимости разложения Тейлора (4) при любых конечных λ необходимо предложить способ, позволяющий найти неаналитическую часть разложения исходной функции (2) при малых k . Монтролл и др. [9] использовали для этого представление зависящего от k множителя $\cos(kb^j)$ в виде обратного преобразования Меллина с дальнейшим применением теоремы о вычетах. Как и следовало ожидать, в интервале значений $1 < \lambda < \lambda_{\text{cr}}^{(1)} = b^2$ имеет место разложение $G(k, \lambda) \approx 1 - C_\alpha k^\alpha + \dots$, где $\alpha = 2 \ln \lambda / \ln \lambda_{\text{cr}}^{(1)} = \ln \lambda / \ln b$, так что $0 < \alpha < 2$ в этом интервале, причем $G''(0, \lambda) = m_2(\lambda)$, очевидно, расходится. Согласно [7], [9] показатель α определяет фрактальную размерность диффузионных кластеров.

Однако способ получения результата в работе [9] представляется физически не вполне прозрачным и требующим дополнительного математического обоснования, поэтому ниже предлагается альтернативный способ, основанный на существовании для $G(k, \lambda)$ функционального уравнения, вид которого следует непосредственно из определения (2):

$$G(k, \lambda) = \frac{1}{\lambda} G(bk, \lambda) + 2p(\lambda) \cos k. \quad (5)$$

Уравнение (5) является линейным неоднородным функциональным уравнением, справедливым во всем интервале значений $1 < \lambda < \infty$, причем неоднородное слагаемое $2p(\lambda) \cos k$ в правой части (5) регулярно по k вблизи $k = 0$ для всех допустимых значений λ . Отсюда ясно, что это слагаемое может давать вклад только в режим НД и, следовательно, режим АД (существующий только при $1 < \lambda < b^2$) полностью обусловлен только однородным слагаемым $(1/\lambda)G(bk, \lambda)$. С этим вполне согласуется тот факт, что слагаемое $(1/\lambda)G(bk, \lambda)$ исчезает в предельном случае²⁾ $\lambda \rightarrow \infty$, когда, как показано выше, существует только режим НД (при этом учтено, что значение $G(bk, \infty) = \cos(bk)$ всегда конечно).

На основе этих соображений нетрудно получить частное (сингулярное) решение $G_{\text{sing}}(k, \lambda)$ функционального уравнения (5), описывающее АД при значениях $1 < \lambda \leq \lambda_{\text{cr}} = b^2$, полностью отбрасывая неоднородное регулярное слагаемое. Естественно искать $G_{\text{sing}}(k, \lambda)$ в виде³⁾

$$G_{\text{sing}}(k, \lambda) = C(\lambda) k^{\alpha(\lambda)} Q(k), \quad Q(bk) = Q(k). \quad (6)$$

Подставляя (6) в усеченное (однородное) уравнение (5), легко получаем

$$1 = \left(\frac{1}{\lambda} \right) b^{\alpha(\lambda)}, \quad \alpha(\lambda) = \frac{\ln \lambda}{\ln b}, \quad 0 < \alpha(\lambda) \leq 2, \quad 1 < \lambda \leq \lambda_{\text{cr}} = b^2. \quad (7)$$

Таким образом, целесообразно искать полное решение уравнения (5) в виде суммы

$$G(k, \lambda) = G_{\text{reg}}(k, \lambda) + G_{\text{sing}}(k, \lambda). \quad (8)$$

²⁾ Это обстоятельство открывает возможность итерационного решения функционального уравнения (5) по степеням $1/\lambda$.

³⁾ Как будет показано ниже, множитель $Q(k)$ содержит только логарифмические по k поправки.

Возвращаясь к формальному разложению Тейлора (4), полностью регулярному только в пределе $\lambda \rightarrow \infty$, целесообразно при любом конечном λ искать регулярную (аналитическую) часть решения $G(k, \lambda)$ в следующем виде (о выборе $S = S(\lambda)$ см. ниже; пока заметим лишь, что $S \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$):

$$G_{\text{reg}}(k, \lambda(S)) = 1 + \sum_{s=1}^{S-1} (-1)^s \frac{1}{(2s)!} m_{2s}[\lambda(S)] k^{2s}. \quad (9)$$

Оставшаяся часть разложения (4) является сингулярной, или полностью неаналитической, благодаря рассмотренным выше расходимостям m_{2s} при $s \geq S$:

$$G_{\text{sing}}(k, \lambda(S)) = 1 + \sum_{s=S}^{\infty} (i)^{2s} \frac{1}{(2s)!} m_{2s}[\lambda(S)] k^{2s}. \quad (10)$$

Далее по аналогии с (6) бесконечную сумму (10) по целым (четным) степеням k можно заменить всего одним слагаемым, но дробного порядка по k :

$$G_{\text{sing}}(|k|, \lambda(S)) = C[\lambda(S)] |k|^{\alpha[\lambda(S)]} Q(|k|), \quad (11)$$

где коэффициент $C[\lambda(S)]$ и аномальный показатель $\alpha[\lambda(S)]$ не зависят от k (об амплитудной функции $Q(|k|)$ см. ниже). Заметим, что представление решения (8) в виде суммы (9) и (11) вполне аналогично часто используемой в приложениях формуле Тейлора в виде суммы многочлена Тейлора (9) и остаточного члена в форме (11), аналогичного форме Пеано⁴⁾, но с обратным следованием относительно порядкового символа o , так что $G_{\text{reg}}(k, \lambda(S)) = o[G_{\text{sing}}(k, \lambda(S))]$. Иными словами, в определенном интервале значений $\lambda(S)$ (при заданном значении S) в интересующем нас пределе $k \rightarrow 0$ остаточный член превосходит основной, и потому именно он определяет асимптотическое поведение всей функции $G(k, \lambda)$, а тем самым и функции $P(x, \lambda)$ в пределе $x \rightarrow \infty$.

Фактическое построение разложений (9) и (11) основано на том, что для любого конечного значения λ из открытого интервала $(1, \infty)$ всегда существует (также конечное) значение $S(\lambda)$ из полуоткрытого интервала $[1, \infty)$; соответственно, существует обратная функция $\lambda(S)$, для которой выполняются неравенства $\lambda_{\text{cr}}^{(S-1)} < \lambda(S) < \lambda_{\text{cr}}^{(S)}$, причем $\lambda_{\text{cr}}^{(1)} = 1$, $\lambda_{\text{cr}}^{(2)} = b^2$ и т. д. Тогда моменты $m_{2s}(\lambda)$ существуют и конечны только для $s = 1, 2, \dots, S-1$ и расходятся для $s \geq S$, так что разложение (9) обрывается на слагаемом порядка $k^{2(S-1)}$.

Наибольший интерес представляет показатель $\alpha[\lambda(S)]$, удовлетворяющий строгому неравенству $2(S-1) < \alpha[\lambda(S)] < 2S$, так как только в этом случае все производные $G_{\text{sing}}^{(2s)}(k, \lambda)$ с $s \geq S$ становятся сингулярными при $k = 0$. Действительно, пусть $2S - \alpha = \varepsilon$ с $0 < \varepsilon < 2$, а $s = S + r$, $r = 0, 1, \dots$. Тогда $G_{\text{sing}}^{(2s)}(|k|, \lambda) \sim |k|^{-(\varepsilon+2r)} \rightarrow \infty$ при $k = 0$ и сколь угодно малом значении $\varepsilon > 0$; что касается множителя $Q(|k|)$, то его не следует дифференцировать (см. сноску 3).

⁴⁾Заметим, что ни одна из других форм остаточного члена (Лагранжа, Коши, Шлёмилха-Роша) не подходит, поскольку подразумевает конечность производной более высокого порядка $G^{(2S)} = m_{2S}$, тогда как в нашем случае это условие нарушается вообще для всех значений $s \geq S$.

Показатель $\alpha[\lambda(S)]$ можно вычислить точно – подобно тому, как это сделано в соотношении (8) с использованием только однородной части функционального уравнения (6) $G(|k|, \lambda) = (1/\lambda)G(b|k|, \lambda)$, иногда называемом *скейлинговым*, или самоподобным; согласно этому уравнению $G(|k|, \lambda)$ является обобщением понятия однородной функции в смысле Эйлера. Предполагая дополнительно выполнение другого функционального уравнения $Q(b|k|) = Q(|k|)$ для амплитудной функции $Q(|k|)$, получаем из (9)

$$1 = \left[\frac{1}{\lambda(S)} \right] b^{\alpha[\lambda(S)]}, \quad \alpha[\lambda(S)] = \frac{\ln \lambda(S)}{\ln b}. \quad (12)$$

Применим далее монотонную операцию логарифмирования к цепочке неравенств $\lambda_{\text{cr}}^{S-1} < \lambda(S) < \lambda_{\text{cr}}^S$ (все члены этой цепочки превышают единицу, так что их логарифмы положительны), а затем разделим почленно на $\ln \lambda_{\text{cr}} > 0$, откуда получим неравенство $S - 1 < \ln \lambda(S) / \ln \lambda_{\text{cr}} < S$. Учитывая, что $\lambda_{\text{cr}} = b^2$, окончательно приходим к неравенству $2(S-1) < \alpha[\lambda(S)] < 2S$, которое обеспечивает неаналитичность сингулярной части решения (11). Разделив найденное неравенство на S , заметим, что $2(1 - 1/S) < \alpha[\lambda(S)]/S < 2$, так что $\alpha/S \rightarrow 2$ при $S \rightarrow \infty$, $\lambda(S) \rightarrow \infty$, когда неаналитическая часть решения (11) (а вместе с ней АД) строго обращается в нуль (как показано в разделе 2).

Входящий в (11) коэффициент $C[\lambda(S)]$ можно определить с помощью “эвристических” соображений, причем результат полностью совпадает с результатом, полученным в работе [9] более строго посредством интегрального преобразования Меллина. Переход от первого расходящегося слагаемого порядка $2S$, входящего в $G_{\text{reg}}(k, \lambda)$ (9), к соответствующему слагаемому в $G_{\text{sing}}(|k|, \lambda)$ состоит в переходе между степенями k , а именно от $2S$ к $\alpha < 2S$. Аналогичные замены проводятся и для коэффициента $1/(2S)!(i)^{2S}$, переходящего в коэффициент $C(\alpha)$; именно, $1/(2S)! \equiv 1/\Gamma[1 + (2S)!]$ переходит в $1/\Gamma[1 + \alpha] = -(1/\pi)\Gamma(-\alpha)$, тогда как множитель $(i)^{2S} \equiv e^{[i(\pi/2)]^{2S}}$ переходит в $e^{[i(\pi/2)]^\alpha}$, сохраняющий только четную часть $\cos[(\pi/2)\alpha]$, которая обращается в нуль при любом четном значении α .

Что касается амплитудной функции $Q(|k|)$, то для функционального уравнения $Q(b|k|) = Q(|k|)$ существует постоянное решение $Q = \text{const}$ (вообще не зависящее от k). В более общем случае указанное функциональное уравнение определяет лог-периодическую функцию, принадлежащую к классу медленно меняющихся функций (в смысле Карамата). Действительно, если мы проведем “логарифмическую” замену переменных $|k| \rightarrow \log(|k|)$, $b \rightarrow \log b$ (с учетом условия $b > 1$), то функциональное уравнение для Q перейдет в более обычное функциональное уравнение для периодической функции $Q(\log(|k|)) = Q(\log(|k|) + \log b)$.

Решение последнего уравнения имеет вид тригонометрического ряда Фурье по переменной $\log(|k|)$ с периодом $\log b$:

$$Q(|k|) = \frac{2}{\log b} \sum_{m=0}^{\infty} q_m \cos \left[2\pi m \frac{\log(|k|)}{\log b} + \varphi_m \right], \quad (13)$$

где амплитуды q_m и начальные фазы φ_m остаются неопределенными. Ряд (13) содержит только логарифмические по $|k|$ поправки $\sim [\log(|k|)]^n$, где n – натуральные числа, что оправдывает утверждение, сделанное в сноске 4.

4. ВЫВОДЫ

Проблема одномерной симметричной диффузии, в том числе кроссовер между режимами НД (Гаусса–Эйнштейна–Винера) и АД (Леви–Хинчина) рассмотрена на основе подхода марковских СБ. Показано, что в рамках модели Монтролла и др. [9] с двухпараметрическим скейлингом переходной вероятности для СБ Вейерштрасса можно найти сначала характеристическую функцию Ляпунова, а затем посредством тауберовых теорем и асимптотическое распределение вероятностей (или, иначе, фронт диффузии). Предложен конструктивный и физически прозрачный метод построения решения линейного неоднородного функционального уравнения, результаты которого полностью совпадают со строгим результатом, полученным ранее в работе [9] посредством интегрального преобразования Меллина.

Список литературы

- [1] В. В. Учайкин, *УФН*, **173**:8 (2003), 847–875.
- [2] A. A. Dubkov, B. Spagnolo, V. V. Uchaikin, *Intern. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **18**:9 (2008), 2649–2672.
- [3] V. Zaburdaev, S. Denisov, J. Klafter, *Rev. Modern Phys.*, **87**:2 (2015), 483–530.
- [4] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, **1**, Мир, М., 1984.
- [5] К. В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках*, Мир, М., 1986.
- [6] Н. Г. Ван Кампен, *Стохастические процессы в физике и химии*, Высшая школа, М., 1990.
- [7] М. Шредер, *Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая*, РХД, Ижевск, 2001.
- [8] J. E. Gillis, G. H. Weiss, *J. Math. Phys.*, **11**:4 (1970), 1307–1312.
- [9] B. D. Hughes, M. F. Shlesinger, E. W. Montroll, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **78**:6 (1981), 3287–3291.
- [10] G. H. Hardy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17**:3 (1916), 301–325.
- [11] Ю. Г. Рудой, *Вестник Самарского госуд. ун-та. Сер. Матем.*, **1**:66 (2008), 210–222.
- [12] Д. В. Ширков, *ТМФ*, **60**:2 (1984), 218–223.

Поступила в редакцию 18.07.2016,
после доработки 1.08.2016