Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Чернега, О. В. Манько, В. И. Манько, Ж. Сеилов, Новые информационно-энтропийные соотношения для коэффициентов Клебша–Гордана, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 2, 356–366

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9255>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:08:05

© 2017 г.

В. Н. Чернега*, О. В. Манько*[†],
В. И. Манько*[‡], Ж. Сеилов[‡]

НОВЫЕ ИНФОРМАЦИОННО-ЭНТРОПИЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША–ГОРДАНА

С помощью свойств энтропии Шеннона и энтропии Тсаллиса получены новые неравенства для коэффициентов Клебша–Гордана группы $SU(2)$; для этого квадраты коэффициентов Клебша–Гордана используются в качестве распределения вероятностей. Полученные соотношения являются новыми характеристиками корреляций в квантовых системах двух спинов. Также найдены новые неравенства для полиномов Хана и гипергеометрических функций ${}_3F_2$.

Ключевые слова: информационно-энтропийные неравенства, коэффициенты Клебша–Гордана, $3j$ -символы Вигнера, полиномы Хана, энтропия Шеннона, энтропия Тсаллиса, свойство субаддитивности.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9255>

1. ВВЕДЕНИЕ

Коэффициенты Клебша–Гордана позволяют вычислить собственные функции оператора суммарного момента импульса составной системы, определяемого квантовыми числами j, m , где j – значение момента и m – проекция момента на выбранное направление, $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$, по известным собственным функциям операторов момента импульса двух подсистем, которые определяются квантовыми числами j_1, m_1 и j_2, m_2 [1]–[4]. С теоретико-групповой точки зрения коэффициенты Клебша–Гордана позволяют в явном виде записать результат сложения

Исследование выполнено при поддержке Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета.

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: vchernega@gmail.com, omanko@sci.lebedev.ru, manko@lebedev.ru

[†]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

[‡]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия. E-mail: seilov@live.ru

моментов, задающийся в виде тензорного произведения двух неприводимых представлений группы $SU(2)$, как прямую сумму представлений этой группы. Свойства коэффициентов Клебша–Гордана и связанных с ними $3j$ -символов [5] были детально изучены в работах [1], [6]–[8]. Связь коэффициентов Клебша–Гордана и полиномов Хана [9], [10] была найдена в работе [11].

В недавних работах [12]–[16] было показано, что классическое распределение вероятностей для кудита – квантовой системы без подсистем – удовлетворяет информационно-энтропийным соотношениям, таким как свойства субаддитивности и сильной субаддитивности [17]. Данные свойства известны для составных систем: субаддитивность – это неотрицательность совместной информации квантовой системы из двух подсистем, а сильная субаддитивность – это неотрицательность условной информации квантовой системы из трех подсистем.

Целью настоящей работы является получение новых неравенств для коэффициентов Клебша–Гордана и $3j$ -символов, которые позволяют выявить новые свойства этих коэффициентов, не описанные в работах [1], [6]–[8]. На основе этих неравенств можно описать корреляции в системе двух спинов с помощью вводимой в терминах коэффициентов Клебша–Гордана совместной информации. Отметим, что физический смысл коэффициентов Клебша–Гордана и их физические свойства обсуждались в связи с исследованием волновой функции в задачах восстановления изображений [18]. Также мы выводим новые неравенства для полиномов Хана, используя их связь с коэффициентами Клебша–Гордана, указанную в работе [19]. Эти неравенства получаются на основе представления набора квадратов коэффициентов Клебша–Гордана как распределения вероятностей. В нашем исследовании мы используем подход работы [13], согласно которому информационно-энтропийные свойства системы без подсистем аналогичны свойствам составных систем. В рамках этой аналогии в настоящей работе мы применяем понятия совместной информации Шеннона, информации Тсаллиса и свойство субаддитивности к распределению вероятностей, связанному с квадратами коэффициентов Клебша–Гордана.

Структура статьи такова. В разделе 2 мы рассматриваем основные свойства коэффициентов Клебша–Гордана и $3j$ -символов. В разделе 3 мы описываем информационно-энтропийные неравенства для систем с двумя подсистемами, а также выводим их аналоги для коэффициентов Клебша–Гордана. В разделе 4 мы получаем аналогичные неравенства для полиномов Хана. В разделе 5 мы даем заключение и перспективы.

2. КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША–ГОРДАНА

Коэффициенты Клебша–Гордана $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle$ могут быть определены с помощью следующего выражения [2], [3]:

$$\psi_{jm} = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \psi_{j_1 m_1}^{(1)} \psi_{j_2 m_2}^{(2)}, \quad (1)$$

где $m_1 + m_2 = m$. Здесь ψ_{jm} – волновая функция системы со спином j и его проекцией m , $\psi_{j_1 m_1}^{(1)}$ и $\psi_{j_2 m_2}^{(2)}$ – волновые функции подсистем со спинами j_1 и j_2 и их проекциями m_1 и m_2 .

$3j$ -Символ Вигнера $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}$ определяется следующим образом (см., например, книгу [2]):

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = (-1)^{j_1 - j_2 + m} \sqrt{2j + 1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Свойства $3j$ -символов и коэффициентов Клебша–Гордана давно изучены и рассмотрены, например, в работах [1], [7], [20]. Одним из них является свойство ортогональности:

$$\begin{aligned} (2j + 1) \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & -m' \end{pmatrix} &= \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \\ \sum_{j, m} (2j + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m'_1 & m'_2 & -m \end{pmatrix} &= \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Такие же соотношения можно записать и для коэффициентов Клебша–Гордана:

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j' m' \rangle &= \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \\ \sum_{j, m} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | j m \rangle &= \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Явное выражение для $3j$ -символов и коэффициентов Клебша–Гордана имеет следующий вид [2]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \left[\frac{(j_1 + j_2 - j_3)! (j_1 - j_2 + j_3)! (-j_1 + j_2 + j_3)!}{(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times [(j_1 + m_1)! (j_1 - m_1)! (j_2 + m_2)! (j_2 - m_2)! (j_3 + m_3)! (j_3 - m_3)!]^{1/2} \times \\ &\times \sum_z \{ [(-1)^{z+j_1-j_2-m_3}] [z! (j_1 + j_2 - j_3 - z)! (j_1 - m_1 - z)! \times \\ &\times (j_2 + m_2 - z)! (j_3 - j_2 + m_1 + z)! (j_3 - j_1 - m_2 + z)!]^{-1} \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Физический смысл коэффициентов Клебша–Гордана обсуждается, например, в обзоре [7]. В работах [21], [22] было введено томографическое представление спиновых состояний. В этом представлении состояния спина описываются распределением вероятностей $\omega(m, \alpha, \beta)$ проекций спина $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$ на направления, задаваемые единичным вектором $\vec{n} = (\sin \beta \cos \alpha, \sin \beta \sin \alpha, \cos \beta)$. Это распределение вероятностей, называемое спиновой томограммой, определяет матрицу плотности квантового состояния $\rho_{mm'}$ и содержит полную информацию о состоянии системы, эквивалентную информации, содержащейся в матрице плотности. В томографическом подходе к описанию спиновых состояний коэффициенты Клебша–Гордана и $3j$ -символы играют важную роль, поскольку входят в явные формулы, связывающие томограммы, которые могут быть получены экспериментально. А именно, с помощью $3j$ -символов и D-функций Вигнера можно выразить взаимосвязь между томографическим распределением вероятностей

$$\omega(m_1, \alpha, \beta) = \sum_{m'_1 = -j}^j \sum_{m'_2 = -j}^j D_{m_1 m'_1}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \Big|_{\gamma=0} \rho_{m'_1 m'_2}^{(j)} D_{m_1 m'_2}^{(j)*}(\alpha, \beta, \gamma) \Big|_{\gamma=0}$$

и матрицей плотности спинового состояния $\rho_{m'_1 m'_2}^{(j)}$ [21]:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j_3=0}^{2j} \sum_{m_3=-j_3}^{j_3} (2j_3+1)^2 \times \\
 & \times \sum_{m_1=-j}^j \int (-1)^{m_1} \omega(m_1, \alpha, \beta) D_{0m_3}^{(j_3)}(\alpha, \beta, \gamma) \big|_{\gamma=0} \times \\
 & \times \begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m_1 & -m_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & j_3 \\ m'_1 & -m'_2 & m_3 \end{pmatrix} \frac{d\omega}{8\pi^2} = (-1)^{m'_2} \rho_{m'_1 m'_2}^{(j)}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Также с помощью коэффициентов Клебша–Гордана можно записать соотношения, которые связывают неприводимый тензорный оператор $\hat{T}_{LM}^{(j)}$ группы $SU(2)$ и оператор $|jm\rangle\langle jm'|$ (см., например, монографию [1]):

$$\begin{aligned}
 \hat{T}_{LM}^{(j)} &= \sum_{m_1, m_2=-j}^j (-1)^{j-m_1} \langle jm_2 j(-m_1) | LM \rangle |jm_2\rangle \langle jm_1|, \\
 |jm\rangle \langle jm'| &= \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^L (-1)^{j-m'} \langle jm j(-m') | LM \rangle \hat{T}_{LM}^{(j)}.
 \end{aligned}$$

Неприводимый тензорный оператор, записанный в такой форме, позволяет получить явное выражение для ядра звездочного произведения томографических символов физических наблюдаемых для спиновых систем [23]. Ядро такого звездочного произведения используется для вычисления статистических характеристик (средних значений, высших моментов и корреляций) спиновых наблюдаемых.

Для любых фиксированных значений спинов j_1 и j_2 можно построить матрицу коэффициентов Клебша–Гордана, в которой по столбцам меняются значения j и m , а по строкам меняются значения m_1 и m_2 . Полученная матрица, которую мы обозначаем как U , является унитарной матрицей размера $N = (2j_1+1)(2j_2+1)$. Фактически, поскольку $3j$ -символы и коэффициенты Клебша–Гордана действительны, матрица U – это действительная ортогональная матрица. Любые соотношения для коэффициентов Клебша–Гордана, как известные [1], [3], [5], [7], так и полученные в настоящей работе, позволяют прояснить физические свойства измеряемых статистических характеристик состояний спина, задаваемых квантовыми томограммами.

3. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СИСТЕМ С ДВУМЯ ПОДСИСТЕМАМИ. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КЛЕБША–ГОРДАНА

Матрицу, элементы которой суть квадраты соответствующих элементов матрицы U коэффициентов Клебша–Гордана, обозначим как $\mathcal{B}$:

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \mathcal{B} | jm \rangle \equiv |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle|^2.$$

Введем новые обозначения для индексов элементов матрицы $\mathcal{B}$: сделаем замены $j_1 m_1 j_2 m_2 \leftrightarrow r$, $jm \leftrightarrow s$. Индекс $r = 1, 2, \dots, N$, где $N = (2j_1+1)(2j_2+1)$, обозначает номера строк матрицы $\mathcal{B}$, индекс $s = 1, 2, \dots, N$ отвечает номерам столбцов. Указанная замена может быть представлена формулой

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \mathcal{B} | jm \rangle \equiv \langle r | \mathcal{B} | s \rangle = \mathcal{B}_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots, N.$$

Полученная матрица является бистохастической: суммы элементов каждого столбца и каждой строки дают единицу,

$$\sum_{r=1}^N \mathcal{B}_{rs} = \sum_{s=1}^N \mathcal{B}_{rs} = 1,$$

кроме того, $\mathcal{B}_{rs} \geq 0$. Это означает, что каждый столбец и каждая строка могут быть интерпретированы как распределения вероятностей.

Напомним, что для распределения вероятностей p_i , $i = 1, \dots, M$, определена энтропия Шеннона [24]

$$H(p_i) = - \sum_{i=1}^M p_i \log p_i \quad (7)$$

(здесь и далее $\log$ означает логарифм по основанию 2). Эта энтропия неотрицательна и характеризует степень упорядоченности в системе с флуктуирующими наблюдаемыми.

Если система содержит подсистемы, то ее энтропия удовлетворяет ряду неравенств. Одно из них – свойство субаддитивности

$$H(A) + H(B) \geq H(AB), \quad (8)$$

где A и B являются двумя подсистемами составной системы AB . Распределения вероятностей подсистем могут быть найдены как маргинальные распределения вероятностей составной системы AB . Размерности подсистем A , B и системы AB в случае спиновых наблюдаемых таковы: $n_1 = 2j_1 + 1$, $n_2 = 2j_2 + 1$ и $N = n_1 n_2$ соответственно. Энтропии подсистем A , B и системы AB определяются формулой (7) с соответствующими размерностями $M = n_1$, $M = n_2$ и $M = N = n_1 n_2$.

Энтропия Шеннона может быть выражена в терминах коэффициентов Клебша–Гордана для любой строки или столбца матрицы $\mathcal{B}$. Свойство субаддитивности (8) для коэффициентов Клебша–Гордана имеет вид

$$\begin{aligned} & - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle|^2 \log \left[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle|^2 \right] - \\ & - \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle|^2 \log \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle|^2 \right] \geq \\ & \geq - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle|^2 \log \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle|^2 \right]. \end{aligned}$$

Это неравенство является новой характеристикой коэффициентов Клебша–Гордана, дополняющей известные в литературе [1], [6]–[8].

Понятие совместной информации связано со свойством субаддитивности и определяется выражением (см., например, монографию [17])

$$I = H(A) + H(B) - H(AB) \geq 0. \quad (9)$$

Значение совместной информации характеризует степень корреляций в системе из двух подсистем. Используя выражение (9), мы вводим понятие совместной информации I в терминах коэффициентов Клебша–Гордана:

$$\begin{aligned}
 I = & \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 \log \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 \right] - \\
 & - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 \log \left[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 \right] - \\
 & - \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 \log \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 \right] \geq 0. \quad (10)
 \end{aligned}$$

В соответствии с общими свойствами информации, если совместная информация равна нулю, в системе отсутствуют корреляции. Для спиновых систем степень корреляций, описываемых коэффициентами Клебша–Гордана в (10), определяется значением совместной информации I . Таким образом, физический смысл получаемых энтропийно-информационных неравенств заключается в том, что они характеризуют наличие и степень квантовых корреляций в системе двух спинов.

Для системы с двумя подсистемами известно неравенство Араки–Либа [25]:

$$H(AB) \geq |H(A) - H(B)|. \quad (11)$$

Данное неравенство также можно представить в терминах коэффициентов Клебша–Гордана:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 \log \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 \right] \geq \\
 & \geq \left| - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 \log \left[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 \log \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 \right] \right|.
 \end{aligned}$$

Это новая энтропийная характеристика коэффициентов Клебша–Гордана.

Одним из наиболее известных обобщений энтропии Шеннона является энтропия Тсаллиса [26], определяемая для распределения вероятностей p_i , $i = 1, \dots, M$, формулой

$$T_q(p_i) = \frac{1}{1-q} \left(\sum_{i=1}^M p_i^q - 1 \right),$$

где q называется энтропийным индексом. В пределе $q \rightarrow 1$ значение энтропии Тсаллиса стремится к энтропии Шеннона. Для системы с двумя подсистемами энтропия Тсаллиса также обладает свойством субаддитивности

$$T_q(AB) \leq T_q(A) + T_q(B). \quad (12)$$

Рис. 1. Зависимость информации Тсаллиса I_q от энтропийного индекса q для систем с квантовыми числами $j_1 = 5/2$, $j_2 = 2$, $j = 9/2$, $m = 1/2$.

В случае систем двух спинов неравенство субаддитивности для энтропии Тсаллиса можно записать через коэффициенты Клебша–Гордана. Таким образом, мы получаем неравенство, являющееся новой характеристикой коэффициентов Клебша–Гордана, дополняющей известные [1], [6]–[8]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-q} \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle|^{2q} - 1 \right] &\leq \\ &\leq \frac{1}{1-q} \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \left(\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle|^2 \right)^q - 1 \right] + \\ &+ \frac{1}{1-q} \left[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \left(\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} |\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle|^2 \right)^q - 1 \right]. \end{aligned}$$

На рис. 1 показана зависимость информации Тсаллиса $I_q = T_q(A) + T_q(B) - T_q(AB)$ от энтропийного индекса q для системы двух частиц со спинами $j_1 = 5/2$, $j_2 = 2$ и состояния $j = 9/2$, $m = 1/2$. Как и совместная информация Шеннона, информация Тсаллиса не принимает отрицательные значения. В данном случае в пределе $q \rightarrow 1$ информация Тсаллиса совпадает с совместной информацией для энтропии Шеннона: $I_q \rightarrow I = 1.176$. Полученное значение, соответствующее совместной информации, вдвое меньше ее максимального для рассматриваемого примера значения $I_{\max} = \min\{H(A), H(B)\} = \log 5 = 2.32$, но не равно нулю, что сигнализирует о корреляции в данной системе двух спинов.

4. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХАНА

Полиномы Хана $h_n^{(\alpha\beta)}(x, N)$ могут быть определены с помощью последовательности гипергеометрических функций

$${}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k (a_3)_k}{(b_1)_k (b_2)_k} \frac{z^k}{k!},$$

где $(x)_k = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)} = x(x+1)\dots(x+k-1)$ – символ Похгаммера, следующим образом:

$$h_n^{(\alpha\beta)}(x, N) = \frac{(-1)^n (N-n)_n (\beta+1)_n}{n!} {}_3F_2(-n, -x, \alpha + \beta + n + 1; \beta + 1, 1 - N; 1).$$

Коэффициенты Клебша–Гордана в терминах полиномов Хана задаются следующей формулой [19], [27]:

$$\begin{aligned} (-1)^{j_1-m_1} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle &= \frac{\sqrt{\rho(x)}}{d_n} h_n^{(\alpha\beta)}(x, N) = \\ &= \frac{\sqrt{\rho(j_2 - m_2)}}{d_{j-m}} h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)}(j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1), \end{aligned}$$

где $n = j - m$, $x = j_2 - m_2$, $N = j_1 + j_2 - m + 1$, $\alpha = m - j_1 + j_2$, $\beta = m + j_1 - j_2$. В определении полиномов Хана использованы весовая функция

$$\rho(x) = \frac{\Gamma(N + \alpha - x)\Gamma(\beta + 1 + x)}{\Gamma(x + 1)\Gamma(N - x)}, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1,$$

и квадратичная норма

$$d_n^2 = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)\Gamma(\beta + n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + n + N + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1)n!(N - n - 1)!\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}.$$

Квадрат коэффициентов Клебша–Гордана в терминах полиномов Хана имеет вид

$$|\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle|^2 = \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)}(j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2.$$

Используя данное выражение, связывающее коэффициенты Клебша–Гордана и полиномы Хана, мы можем переписать свойство субаддитивности (8) как

$$\begin{aligned} & - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)}(j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \times \\ & \times \log \left[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)}(j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \right] - \\ & - \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)}(j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \times \\ & \times \log \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)}(j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \right] \geqslant \\ & \geqslant - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)}(j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \times \\ & \times \log \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)}(j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом находим выражение для неравенства Араки–Либа (11) в терминах полиномов Хана:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)} (j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \times \\
 & \quad \times \log \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)} (j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \right] \geq \\
 & \geq \left| - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)} (j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \times \right. \\
 & \quad \times \log \left[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)} (j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \right] + \\
 & \quad + \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)} (j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \times \\
 & \quad \left. \times \log \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)} (j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \right] \right|.
 \end{aligned}$$

Неравенство субаддитивности для энтропии Тсаллиса (12) в терминах полиномов Хана записывается как

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1-q} \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)} (j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^{2q} - 1 \right] \leq \\
 & \leq \frac{1}{1-q} \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \left(\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)} (j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \right)^q - 1 \right] + \\
 & + \frac{1}{1-q} \left[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \left(\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \rho(j_2 - m_2) d_{j-m}^{-2} [h_{j-m}^{(m-j_1+j_2, m+j_1-j_2)} (j_2 - m_2, j_1 + j_2 - m + 1)]^2 \right)^q - 1 \right].
 \end{aligned}$$

Выражая полиномы Хана через гипергеометрические функции, также можно получить аналоги неравенств Араки–Либа, свойства субаддитивности для энтропии Шеннона и свойства субаддитивности для энтропии Тсаллиса в терминах гипергеометрических функций. В частности, свойство субаддитивности (8) для гипергеометрической функции ${}_3F_2$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \left\{ \left[\frac{(j_1 + j_2 - j)! (2j + 1) \Gamma(j + j_1 - j_2 + 1) \Gamma(m + j + 1) \Gamma(j_2 + m_2 + 1) \Gamma(j_1 + m_1 + 1)}{(j - m)! \Gamma(j - j_1 + j_2 + 1) \Gamma(j + j_1 + j_2 + 2) \Gamma(j_2 - m_2 + 1) \Gamma(j_1 - m_1 + 1)} \right] \times \right. \\
 & \quad \times \left[\frac{\Gamma(j_1 + j_2 - m + 1)}{\Gamma(-j + j_1 + j_2 + 1)} \frac{{}_3F_2(m - j, m_2 - j_2, m + j + 1; m + j_1 - j_2 + 1, m - j_1 - j_2; 1)}{\Gamma(m + j_1 - j_2 + 1)} \right]^2 \Big\} \times \\
 & \quad \times \log \left[\sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \left\{ \left[\frac{(j_1 + j_2 - j)! (2j + 1) \Gamma(j + j_1 - j_2 + 1) \Gamma(m + j + 1) \Gamma(j_2 + m_2 + 1) \Gamma(j_1 + m_1 + 1)}{(j - m)! \Gamma(j - j_1 + j_2 + 1) \Gamma(j + j_1 + j_2 + 2) \Gamma(j_2 - m_2 + 1) \Gamma(j_1 - m_1 + 1)} \right] \times \right. \right. \\
 & \quad \times \left[\frac{\Gamma(j_1 + j_2 - m + 1)}{\Gamma(-j + j_1 + j_2 + 1)} \frac{{}_3F_2(m - j, m_2 - j_2, m + j + 1; m + j_1 - j_2 + 1, m - j_1 - j_2; 1)}{\Gamma(m + j_1 - j_2 + 1)} \right]^2 \Big\} \Big] - \\
 & - \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \left\{ \left[\frac{(j_1 + j_2 - j)! (2j + 1) \Gamma(j + j_1 - j_2 + 1) \Gamma(m + j + 1) \Gamma(j_2 + m_2 + 1) \Gamma(j_1 + m_1 + 1)}{(j - m)! \Gamma(j - j_1 + j_2 + 1) \Gamma(j + j_1 + j_2 + 2) \Gamma(j_2 - m_2 + 1) \Gamma(j_1 - m_1 + 1)} \right] \times \right. \\
 & \quad \times \left[\frac{\Gamma(j_1 + j_2 - m + 1)}{\Gamma(-j + j_1 + j_2 + 1)} \frac{{}_3F_2(m - j, m_2 - j_2, m + j + 1; m + j_1 - j_2 + 1, m - j_1 - j_2; 1)}{\Gamma(m + j_1 - j_2 + 1)} \right]^2 \Big\} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \log \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \left\{ \left[\frac{(j_1+j_2-j)!(2j+1)\Gamma(j+j_1-j_2+1)\Gamma(m+j+1)\Gamma(j_2+m_2+1)\Gamma(j_1+m_1+1)}{(j-m)!\Gamma(j-j_1+j_2+1)\Gamma(j+j_1+j_2+2)\Gamma(j_2-m_2+1)\Gamma(j_1-m_1+1)} \right] \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left[\frac{\Gamma(j_1+j_2-m+1)}{\Gamma(-j+j_1+j_2+1)} \frac{{}_3F_2(m-j, m_2-j_2, m+j+1; m+j_1-j_2+1, m-j_1-j_2; 1)}{\Gamma(m+j_1-j_2+1)} \right]^2 \right\} \right] \geq \\
 & \geq - \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \left\{ \left[\frac{(j_1+j_2-j)!(2j+1)\Gamma(j+j_1-j_2+1)\Gamma(m+j+1)\Gamma(j_2+m_2+1)\Gamma(j_1+m_1+1)}{(j-m)!\Gamma(j-j_1+j_2+1)\Gamma(j+j_1+j_2+2)\Gamma(j_2-m_2+1)\Gamma(j_1-m_1+1)} \right] \times \right. \\
 & \times \left. \left[\frac{\Gamma(j_1+j_2-m+1)}{\Gamma(-j+j_1+j_2+1)} \frac{{}_3F_2(m-j, m_2-j_2, m+j+1; m+j_1-j_2+1, m-j_1-j_2; 1)}{\Gamma(m+j_1-j_2+1)} \right]^2 \right\} \times \\
 & \times \log \left[\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \left\{ \left[\frac{(j_1+j_2-j)!(2j+1)\Gamma(j+j_1-j_2+1)\Gamma(m+j+1)\Gamma(j_2+m_2+1)\Gamma(j_1+m_1+1)}{(j-m)!\Gamma(j-j_1+j_2+1)\Gamma(j+j_1+j_2+2)\Gamma(j_2-m_2+1)\Gamma(j_1-m_1+1)} \right] \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left[\frac{\Gamma(j_1+j_2-m+1)}{\Gamma(-j+j_1+j_2+1)} \frac{{}_3F_2(m-j, m_2-j_2, m+j+1; m+j_1-j_2+1, m-j_1-j_2; 1)}{\Gamma(m+j_1-j_2+1)} \right]^2 \right\} \right].
 \end{aligned}$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным результатом представленной работы являются новые информационно-энтропийные неравенства для коэффициентов Клебша–Гордана группы $SU(2)$. Полученные неравенства и введенная в терминах коэффициентов Клебша–Гордана совместная информация характеризуют степень квантовых корреляций в системе двух спинов. Получены новые неравенства для полиномов Хана и для гипергеометрических функций ${}_3F_2$. Использованный метод может быть применен при выведении новых соотношений для коэффициентов Клебша–Гордана в случае других групп Ли и квантовых групп. На основе развитого в настоящей работе подхода можно вывести новые неравенства для $6j$ -символов на основе известного свойства сильной субаддитивности энтропии системы, содержащей три подсистемы.

Список литературы

- [1] L. C. Biedenharn, J. D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics. Theory and application*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, **8**, Addison–Wesley, Reading, MA, 1981.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматлит, М., 2004.
- [3] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1958.
- [4] N. Ja. Vilenkin, A. U. Klimyk, *Representation of Lie Groups and Special Functions: Recent Advances*, Mathematics and Its Applications, **316**, Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [5] E. P. Wigner, “On the matrices which reduce the Kronecker products of representations of S. R. groups”, *The Collected Works of Eugene Paul Wigner. Part A. The Scientific Papers*, eds. A. S. Wightman, Springer, Berlin, 1993, 608–654.
- [6] Yu. F. Smirnov, S. K. Suslov, J. M. Shirokov, “Clebsch–Gordan coefficients and Racah coefficients for the $SU(2)$ and $SU(1, 1)$ groups as the discrete analogs of the Pöschl–Teller potential wavefunctions”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **17**:11 (1984), 2157–2175.
- [7] Я. А. Смородинский, Л. А. Шелепин, “Коэффициенты Клебша–Гордана с разных сторон”, *УФН*, **106**:1 (1972), 3–45.
- [8] Z. Plunaf, Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy, “Clebsch–Gordan coefficients of $SU(3)$ with simple symmetry properties”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **19**:1 (1986), 21–28.

- [9] W. Hahn, “Über orthogonalpolynome, die q -differenzgleichungen genügen”, *Math. Nachr.*, **2**:1–2 (1949), 4–34.
- [10] Г. Бейтман, А. Эрдейн, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2: *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.
- [11] S. Karlin, J. R. McGregor, “The Hahn polynomials, formulas and applications”, *Scr. Math.*, **26** (1961), 33–46.
- [12] V. N. Chernega, O. V. Man’ko, “No signaling and strong subadditivity condition for tomographic q -entropy of single qudit states”, *Phys. Scr.*, **90**:7 (2015), 074052.
- [13] M. A. Man’ko, V. I. Man’ko, “No-signaling property of the single-qudit-state tomogram”, *J. Russ. Laser Res.*, **35**:6 (2014), 582–589.
- [14] V. N. Chernega, O. V. Man’ko, “Tomographic and improved subadditivity conditions for two qubits and a qudit with $j = 3/2$ ”, *J. Russ. Laser Res.*, **35**:1 (2014), 27–38.
- [15] M. A. Man’ko, V. I. Man’ko, “The quantum strong subadditivity condition for systems without subsystems”, *Phys. Scr.*, **2014**:T160 (2014), 014030.
- [16] V. N. Chernega, O. V. Manko, V. I. Manko, “New inequality for density matrices of single qudit states”, *J. Russ. Laser Res.*, **35**:5 (2014), 457–461.
- [17] A. S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, North-Holland Series in Statistics and Probability, **1**, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [18] L. E. Vicent, K. B. Wolf, “Unitary transformation between Cartesian- and polar-pixelated screens”, *J. Opt. Soc. Am. A*, **25**:8 (2008), 1875–1884.
- [19] А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, Наука, М., 1985.
- [20] Р. М. Аскерова, У. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой, “Об общей аналитической формуле для $U_q(su(3))$ -коэффициентов Клебша–Гордана”, *ЯФ*, **64**:12 (2001), 2170–2175.
- [21] В. И. Манько, О. В. Манько, “Томография спиновых состояний”, *ЖЭТФ*, **112**:3(9) (1997), 796–804.
- [22] V. V. Dodonov, V. I. Man’ko, “Positive distribution description for spin states”, *Phys. Lett. A*, **229**:6 (1997), 335–339.
- [23] O. Castaños, R. López-Peña, M. A. Man’ko, V. I. Man’ko, “Kernel of star-product for spin tomograms”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:16 (2003), 4677–4688.
- [24] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication”, *Bell System Tech. J.*, **27**:3 (1948), 379–423; **27**:4 (1948), 623–656.
- [25] H. Araki, E. H. Lieb, “Entropy Inequalities”, *Commun. Math. Phys.*, **18**:2 (1970), 160–170.
- [26] C. Tsallis, “Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: historical background and present status”, *Nonextensive Generalization of Boltzmann–Gibbs Statistical Mechanics and Its Applications* (Okazaki, February 15–18, 1999), *Lecture Notes in Physics*, **560**, eds. S. Abe, Y. Okamoto, Springer, Berlin, 2001, 3–98.
- [27] N. M. Atakishiyev, S. K. Suslov, “The Hahn and Meixner polynomials of an imaginary argument and some of their applications”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18**:10 (1985), 1583–1596.

Поступила в редакцию 26.07.2016,
после доработки 10.12.2016