Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Л. Пэрси, Н. А. Свешников, А. М. Широков, Электрический диполь в магнитном поле – связанные состояния без классических точек поворота, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 2, 189–205

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf926>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:29:42

© 1998 г. Д. Л. Пэрси*, Н. А. Свешников, А. М. Широков†

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ – СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ БЕЗ КЛАССИЧЕСКИХ ТОЧЕК ПОВОРОТА

Показано, что в классической механике внешнее однородное магнитное поле может играть роль ловушки как для жесткого, так и для нежесткого диполей. Захваченный магнитным полем диполь представляет собой классический аналог квантового связанного состояния, погруженного в континуум. В частности, классическое движение диполя является финитным, хотя система не имеет классических точек поворота. Рассмотрено квантовое движение диполя в магнитном поле и показано, что при наиболее естественном выборе параметров, характеризующих систему, квантовые решения, соответствующие связанному состоянию, погруженному в континуум, отсутствуют. Обсуждаются возможности экспериментального исследования рассмотренных состояний.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая система может иметь связанные состояния с нормируемыми волновыми функциями и состояния непрерывного спектра (состояния рассеяния), волновые функции которых ненормируемы. Обычно считается, что энергии всех связанных состояний $E_i < 0$, в то время как состояния непрерывного спектра характеризуются энергиями $E > 0$, т.е. связанные состояния и непрерывный спектр разделены по энергии. Тем не менее еще в 1929 г. фон Нейман и Вигнер показали [1], что квантовая система может иметь “связанные состояния, погруженные в континуум” (ССПК), т.е. связанные состояния с энергиями $E_i > 0$. Недавно ССПК были обнаружены экспериментально [2]. Возросший интерес к исследованию ССПК обуславливается также теоретической интерпретацией [3, 4] узких пиков в сечении рождения электрон-позитронных пар, наблюдавшихся в экспериментах по столкновению тяжелых ионов, как ССПК в системе e^+e^- . Исследованию ССПК был посвящен ряд недавних публикаций [5]. В работах [6] предложены также так называемые изолированные состояния, которые обобщают понятия ССПК и являются по определению связанными состояниями, которым не соответствуют полюсы S -матрицы.

*D. L. Pursey. Department of Physics and Astronomy, Iowa State University, Ames, IA, USA

†Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета, Москва, Россия. E-mail: shirokov@anna19.npi.msu.su

ССПК обычно рассматриваются как некие экзотические квантовые состояния, не имеющие классических аналогов. Тем не менее решения типа ССПК естественно возникают в классической механике. Так, например, если потенциальная энергия классической системы имеет пару барьеров, то любое состояние с положительной энергией, в котором частица оказывается захваченной барьерами, представляет пример ССПК. В то же время соответствующая квантовая система не имеет ССПК: в квантовой механике потенциал с конечным числом барьеров может порождать только резонансы, но не ССПК.

Квантовое ССПК можно получить в системе с локальным взаимодействием только в том случае, если потенциал имеет бесконечное число осцилляций, затухающих на больших расстояниях [1, 7]. Классическая частица с положительной энергией может быть захвачена потенциальной ямой на осциллирующем хвосте дальнегодействующего потенциала фон нейман-вигнеровского типа. Эта ситуация была подробно проанализирована в работе [8] в трехмерном случае для состояний с нулевым угловым моментом. Следует, однако, отметить, что волновая функция квантового ССПК в этом случае очень медленно затухает на бесконечности. В результате получается, что вероятность нахождения частицы за пределами потенциальной ямы, которой она могла бы быть захвачена в классическом случае, намного превышает вероятность ее нахождения в потенциальной яме. Более того, квантовое ССПК в потенциале фон нейман-вигнеровского типа может иметь энергию, превышающую максимальное значение потенциальной энергии. Таким образом, соответствующее классическое движение не имеет классических точек поворота и не является финитным. Если же угловой момент $L > 0$, то в локальных потенциалах могут образоваться даже классические ССПК с энергией, превышающей максимальное значение потенциальной энергии при условии, что угловой момент имеет достаточно большое значение [9]. Это возможно только потому, что существенная доля энергии связана с вращательным движением – энергия радиального движения при этом не превышает высоты потенциального барьера. Таким образом, классические ССПК в потенциалах фон нейман-вигнеровского типа существенно отличаются по своим свойствам от квантовых ССПК и не могут рассматриваться как их аналоги. В частности, эти потенциалы не приводят к решениям уравнений движения, которые являлись бы классическими аналогами квантовых ССПК без классических точек поворота.

ССПК также возникают естественным образом в квантовых задачах с нелокальным взаимодействием [6, 10], а также в случае многоканального рассеяния [11, 12]. Однако такие квантовые системы не имеют явных классических аналогов.

В целом ситуация выглядит таким образом, что когда квантовая система имеет ССПК, то соответствующая классическая система не имеет ССПК, и наоборот. Это обусловлено тем, что механизмы образования ССПК в классической и квантовой механике совершенно различны. В классическом случае движение частицы становится финитным из-за наличия потенциальных барьеров и обусловленных ими классических точек поворота. В квантовом случае затухание волновой функции ССПК на больших расстояниях обуславливается интерференцией волн, отраженных от бесконечного числа потенциальных барьеров потенциала фон нейман-вигнеровского типа или же специфическими особенностями квантового нелокального взаимодействия, или многоканального рассеяния. Таким образом, интересно найти пример классической системы, в ко-

торой имелись бы решения типа ССПК, но не было бы классических точек поворота, т.е. локализация классического движения частицы в конечной области пространства не была бы обусловлена наличием потенциальных барьеров. Именно такие классические ССПК могут служить аналогами квантовых ССПК и дать наглядную интерпретацию механизма формирования квантовых ССПК.

Классические ССПК обсуждались в контексте теории реакций в физической химии. В работе [13] показано, что классическая система может иметь решения типа ССПК, если поверхность потенциальной энергии обладает седловой точкой. ССПК работы [13] имеют много общего с неустойчивым равновесием физического маятника. Неустойчивое равновесие классической системы, когда частица задерживается на бесконечное время на максимуме потенциального барьера, действительно представляет пример классического ССПК определенного типа. Тем не менее подобные ССПК мы рассматриваем как малоинтересные, т.к., во-первых, эти состояния являются неустойчивыми и любое малое возмущение разрушает их и, во-вторых, соответствующая квантовая система не имеет ССПК при той же или близкой энергии.

Недавно мы предложили [14] другой пример классического ССПК, которое имеет определенные свойства квантового ССПК. В частности, было показано, что для классического жесткого электрического диполя внешнее магнитное поле может играть роль своеобразной ловушки. Захват диполя магнитным полем не связан ни с каким потенциалом, и, следовательно, эта система представляет собой нетривиальный пример классического ССПК без классических точек поворота. Тем не менее квантовая задача для диполя в магнитном поле нами до сих пор не обсуждалась. Таким образом, остается неясным, является ли электрический диполь в магнитном поле первым примером системы, для которой имеются решения типа ССПК одновременно в квантовом и классическом случаях. Эта проблема обсуждается в данной статье. Сначала мы выписываем классические уравнения движения для диполя в магнитном поле в форме, которая допускает простое обобщение на квантовый случай, и доказываем существование классических решений типа ССПК. В отличие от работы [14] мы не обсуждаем общие классические уравнения движения жесткого диполя в магнитном поле, а сосредотачиваем внимание на частном случае, решения в котором могут быть получены аналитически. Кроме того, мы выписываем классические уравнения движения и доказываем существование классических решений типа ССПК для частного случая движения нежесткого диполя, который также допускает аналитическое решение. Затем мы переходим к обсуждению решения квантовой задачи для обоих вышеприведенных примеров.

2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ КАК ЛОВУШКА ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ

2.1. Жесткий вращающийся диполь. Наша модель жесткого диполя – это две частицы массы m каждая, расположенные на расстоянии $2a$ друг от друга. Заряд одной из частиц $-e$, другой $+e$. Однородное магнитное поле $\mathbf{B}$ параллельно оси Y . Наши ограничения на движение диполя заключаются в предположении, что движение центра масс диполя возможно только в направлении оси Z , а вращение – только в плоскости XY . Эти ограничения согласуются с результатами исследования [14] общего случая

классического трехмерного движения жесткого диполя в магнитном поле, и, таким образом, мы рассматриваем частный случай этого общего движения.

Гамильтониан в нашем случае имеет вид

$$H = \frac{1}{4m}(P + \beta a \cos \varphi)^2 + \frac{1}{4ma^2}(\pi + \beta Ra \sin \varphi)^2, \quad (1)$$

где R – координата центра масс диполя, а P – соответствующий канонически-сопряженный импульс, φ – угол, который в данный момент времени составляет радиус-вектор относительного движения частиц $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ с осью X , $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ – радиусы-векторы частиц, π – импульс, канонически-сопряженный углу φ , $\beta = eB/c$.

Легко проверяется, что имеется дополнительный интеграл движения

$$J = P - \beta a \cos \varphi. \quad (2)$$

Важно отметить, что J остается интегралом движения и в квантовом случае, т.к. из уравнений (1) и (2) следует, что коммутатор $[\hat{H}, \hat{J}] = 0$ (здесь и далее мы используем буквы со шляпкой для обозначения операторов). Конечно, и в классическом случае соответствующие скобки Пуассона равны нулю: $\{H, J\} = 0$.

Канонические уравнения движения имеют вид

$$\dot{R} = \frac{1}{2m}(P + \beta a \cos \varphi), \quad (3)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2ma^2}(\pi + \beta Ra \sin \varphi), \quad (4)$$

$$\dot{P} = -\frac{\beta}{2ma}(\pi + \beta Ra \sin \varphi) \sin \varphi, \quad (5)$$

$$\dot{\pi} = \frac{\beta}{2m} \left[aP \sin \varphi - \frac{R}{a} \pi \cos \varphi - \beta(R^2 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi \right]. \quad (6)$$

Из соотношений (3)–(6) легко получить уравнения движения в форме

$$2m\ddot{R} = -2\beta a \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad (7)$$

$$2ma^2\ddot{\varphi} = \beta a \dot{R} \sin \varphi. \quad (8)$$

Правые части уравнений (7) и (8), очевидно, представляют собой суммарную силу и суммарный вращательный момент, приложенные к диполю.

Используя (2), мы можем переписать выражение (3) как

$$\dot{R} = \frac{1}{2m}(J + 2\beta a \cos \varphi). \quad (9)$$

Полная энергия диполя представляет собой кинетическую энергию. Следовательно, с учетом (9) полную энергию системы можно представить в виде

$$ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4m}(J + 2\beta a \cos \varphi)^2 = E. \quad (10)$$

Рис. 1

Классическое связанное состояние (т.е. состояние, в котором диполь захватывается магнитным полем) соответствует случаю, когда среднее значение скорости центра масс диполя равно нулю

$$\langle \dot{R} \rangle_t = 0. \quad (11)$$

Таким образом, классические ССПК — это такие решения уравнения (10), которые удовлетворяют соотношению

$$\langle \dot{R} \rangle_t = \frac{1}{2m} \langle J + 2\beta a \cos \varphi \rangle_t = \frac{1}{2mT} \int_0^T (J + 2\beta a \cos \varphi) dt = 0, \quad (12)$$

где T — период движения.

Если $J < -2\beta a$ или $J > 2\beta a$, то, как видно из (12), $\langle \dot{R} \rangle_t \neq 0$ и диполь не может быть захвачен магнитным полем. Поэтому рассмотрим подробнее случай $|J| \leq 2\beta a$.

Пусть $0 < J \leq 2\beta a$. Из уравнения (10) мы имеем, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{E}{ma^2} - \frac{1}{4(ma)^2} (J + 2\beta a \cos \varphi)^2} \quad (13)$$

или

$$dt = \frac{\sqrt{m} a d\varphi}{\sqrt{E - \frac{1}{4m} (J + 2\beta a \cos \varphi)^2}}. \quad (14)$$

Уравнение (10) описывает движение частицы в эффективном потенциале

$$w(\varphi) = \frac{1}{4m} (J + 2\beta a \cos \varphi)^2.$$

На рис. 1 изображен этот потенциал как функция φ при $0 < J < 2\beta a$. В случае $|J| < 2\beta a$ у эффективного потенциала $w(\varphi)$ имеются два максимума:

$$E_1 = \frac{1}{4m} (J + 2\beta a)^2$$

в точке $\varphi = 0$ и

$$E_2 = \frac{1}{4m} (J - 2\beta a)^2$$

в точке $\varphi = \pi$. Если $E > E_1$, то вращательное движение диполя не меняет своего направления со временем. Если же $E < E_1$, то направление вращения диполя изменяется на противоположное в точках φ_1 и φ_r – классических точках поворота. В случае $E_2 < E < E_1$ левая и правая классические точки поворота связаны соотношением $\varphi_1 + \varphi_r = 2\pi$. Когда $E < E_2$, то, как видно из рис. 1, осцилляции вращательного движения происходят в одной из двух ям эффективного потенциала. Энергии $E = E_1$ соответствует неустойчивое равновесие системы в точке $\varphi = 0$, а энергии $E = E_2$ – неустойчивое равновесие в точке $\varphi = \pi$.

Таким образом, уравнение (12) с помощью уравнения (14) сводится к

$$\langle \dot{R} \rangle_t = \frac{a}{\sqrt{m}T} \int_{\varphi_1}^{\varphi_r} \frac{(J + 2\beta a \cos \varphi) d\varphi}{\sqrt{E - \frac{1}{4m}(J + 2\beta a \cos \varphi)^2}}, \quad (15)$$

где T – период осцилляции вращательного движения в случае $E < E_1$, а в случае $E > E_1$ в качестве T следует использовать период одного полного оборота диполя и для φ_1 и φ_r использовать значения 0 и π , соответственно. Если $E > E_1$, то в точке $\varphi = 0$ числитель подынтегрального выражения в (15) принимает максимальное, причем положительное, значение, а знаменатель – минимальное значение. В результате мы приходим к выводу, что $\langle \dot{R} \rangle_t > 0$ в случае $E > E_1$. Более того, $\langle \dot{R} \rangle_t \rightarrow +\infty$ при стремлении E к E_1 как сверху, так и снизу. Аналогичные рассуждения показывают, что $\langle \dot{R} \rangle_t \rightarrow -\infty$ при $E \rightarrow E_2 \pm 0$, т.к. значение интеграла в этом случае определяется в основном поведением подынтегральной функции в окрестности точки $\varphi = \pi$, где $J + 2\beta a \cos \varphi < 0$. Таким образом, величина $\langle \dot{R} \rangle_t$ является непрерывной функцией E , отрицательной при $E = E_2 + \varepsilon$ и положительной при $E = E_1 - \varepsilon$. Следовательно, $\langle \dot{R} \rangle_t = 0$ при некоторой энергии $E(J) \in (E_2, E_1)$, и диполь захватывается магнитным полем. Точно так же, для любой энергии $E \in (0, 2\beta a)$ существует такое значение $J(E)$, при котором диполь захватывается магнитным полем. Анализируя выражение (15), легко показать, что магнитное поле не может захватить диполь при любом $E > E_1$ и при любом $E < E_2$ за исключением тривиального случая $E = 0$, когда диполь покоится. Анализ случая $-2\beta a \leq J < 0$ приводит к совершенно аналогичным результатам – захвату диполя магнитным полем при $J = -J(E)$.

Нам осталось рассмотреть случай $J = 0$, который является тривиальным. При $J = 0$ подынтегральное выражение в (15) антисимметрично относительно точки $\varphi = \pi/2$ и $\varphi_r = \pi - \varphi_1$. Следовательно, $\langle \dot{R} \rangle_t = 0$, и диполь захватывается магнитным полем при любой энергии $E \neq E_1$ (энергия $E = E_1$ соответствует положению статического неустойчивого равновесия).

Итак, мы приходим к следующим заключениям:

- 1) если $J = 0$, то классический диполь захватывается магнитным полем при любой энергии $E > 0$ за исключением значения $E = \beta^2 a^2 / m$;
- 2) при любом $J \neq 0$ и $E > \beta^2 a^2 / m$ магнитное поле не может захватить диполь;
- 3) для любого E из интервала $0 < E < \beta^2 a^2 / m$ существует $J(E) \in (0, 2\beta a)$ такое, что при $J = \pm J(E)$ классический диполь захватывается магнитным полем. $J(E) \rightarrow 0$ при $E \rightarrow \beta^2 a^2 / m$ и $J(E) \rightarrow 2\beta a$ при $E \rightarrow 0$.

Рис. 2

Рис. 2, где приведен качественный график функции $J(E)$, дает наглядное представление о том, при каких комбинациях значений энергии E и интеграла движения J образуются классические ССПК. Жирные линии демонстрируют значения J , которые соответствуют захвату диполя магнитным полем при заданном значении энергии E .

2.2. Нежесткий диполь. Наша модель нежесткого диполя — это две частицы массы m каждая, связанные потенциалом $W(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ — координата относительного движения. Заряды частиц $+e$ и $-e$. Однородное магнитное поле $\mathbf{B}$ параллельно оси Y . Как и в случае жесткого диполя, мы полагаем, что движение центра масс диполя возможно только в направлении оси Z , а относительное движение частиц происходит в плоскости XU . Таким образом, относительная координата $\mathbf{r}$ всегда перпендикулярна вектору скорости центра масс $\dot{\mathbf{R}}$, параллельному оси Z . Эти ограничения не противоречат полной картине трехмерного классического движения нежесткого диполя в общем случае, и, таким образом, наши модельные ограничения соответствуют частному случаю этого общего движения.

Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{4m} \left(P + \frac{1}{2} \beta x \right)^2 + \frac{1}{m} \left(p_x - \frac{1}{2} \beta R \right)^2 + \frac{1}{m} p_y^2 + W(x, y), \quad (16)$$

где x и y — проекции координаты относительного движения $\mathbf{r}$ на оси X и Y , соответственно, p_x и p_y — импульсы, канонически-сопряженные координатам x и y , соответственно, $W(x, y)$ — потенциальная энергия относительного движения частиц.

Имеется дополнительный интеграл движения J , определяемый соотношением

$$J = P - \frac{1}{2} \beta x, \quad (17)$$

которое является аналогом соотношения (2) для нежесткого диполя. Как и в случае жесткого диполя, J — интеграл движения как в классическом, так и в квантовом случаях.

Для упрощения задачи сделаем некоторые предположения относительно потенциала $W(x, y)$, связывающего частицы. В частности, мы предположим, что в потенциале $W(x, y)$ можно выделить два слагаемых, зависящих только от x или только от y , т.е. $W(x, y)$ можно представить в виде $W(x, y) = V(x) + \tilde{V}(y)$. Таким свойством обладает,

например, потенциал двумерного гармонического осциллятора. С учетом этого предположения можно отделить движение в направлении оси Y и рассмотреть его независимо. Для исключения из рассмотрения движения в направлении оси Y можно также ограничиться частным случаем, в котором вектор относительного движения $\mathbf{r}$ все время остается параллельным оси X ; это эквивалентно приближению, в котором не учитываются вращательные степени свободы диполя. Таким образом, далее мы исключаем из рассмотрения движение в направлении оси Y и рассматриваем только упрощенный гамильтониан

$$H = \frac{1}{4m} \left(P + \frac{1}{2} \beta x \right)^2 + \frac{1}{m} \left(p_x - \frac{1}{2} \beta R \right)^2 + V(x). \quad (18)$$

Канонические уравнения движения, соответствующие гамильтониану (18), имеют вид

$$\dot{R} = \frac{1}{2m} \left(P + \frac{1}{2} \beta x \right), \quad (19)$$

$$\dot{x} = \frac{2}{m} \left(p_x - \frac{1}{2} \beta R \right), \quad (20)$$

$$\dot{P} = \frac{\beta}{m} \left(p_x - \frac{1}{2} \beta R \right), \quad (21)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\beta}{4m} \left(P + \frac{1}{2} \beta x \right) - \frac{dV(x)}{dx}. \quad (22)$$

Из (19)–(22) легко получить уравнения движения в форме

$$2m\ddot{R} = \beta\dot{x}, \quad (23)$$

$$\frac{m}{2} \ddot{x} = -\beta\dot{R} - \frac{dV(x)}{dx}, \quad (24)$$

которые, очевидно, представляют собой уравнения второго закона Ньютона для движения центра масс диполя и относительного движения составляющих его частиц.

Используя (17), преобразуем (19) к виду

$$\dot{R} = \frac{1}{2m} (J + \beta x). \quad (25)$$

Полная энергия системы E представляет собой сумму кинетической энергии и потенциальной энергии $V(x)$, связывающей частицы. Таким образом, используя (25), представим полную энергию системы как

$$\frac{m}{4} \dot{x}^2 + \frac{1}{4m} (J + \beta x)^2 + V(x) = E. \quad (26)$$

В случае, когда диполь захватывается магнитным полем, $\langle \dot{R} \rangle_t = 0$, что с учетом уравнения (25) эквивалентно условию

$$J + \beta \langle x \rangle_t = 0. \quad (27)$$

Среднее значение $\langle x \rangle_t$ является функцией E и J , которую следует искать, решая уравнение (26). Для произвольного потенциала $V(x)$ нельзя гарантировать, что можно найти решение, удовлетворяющее условию (27). Ниже мы обсуждаем несколько частных случаев выбора потенциала $V(x)$.

Отметим, что если $J = 0$, то для любого симметричного потенциала $V(x) = V(-x)$ такого, что эффективный потенциал

$$w(x) = V(x) + \frac{\beta^2 x^2}{4m}$$

представляет собой возрастающую функцию при $x > 0$, диполь захватывается магнитным полем при любой энергии E .

Рассмотрим теперь случай осцилляторного потенциала

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{4}(x - x_0)^2.$$

Хотя этот потенциал и не удовлетворяет необходимому с физической точки зрения условию $V(x) = V(-x)$, он может служить хорошим приближением для истинного потенциала, если при движении координата x изменяется в достаточно малом интервале $x \in [x_0 - \delta x_0, x_0 + \delta x_0]$. В этом случае выражение (26) сводится к

$$\frac{m}{4} \dot{x}^2 + \left(\frac{m\omega^2}{4} + \frac{1}{4m} \beta^2 \right) \left(x + \frac{\beta J - m^2 \omega^2 x_0}{m^2 \omega^2 + \beta^2} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{4(m\omega^2 + \beta^2)} (J + \beta x_0)^2 = E, \quad (28)$$

и очевидно, что

$$\langle x \rangle_t = \frac{m^2 \omega^2 x_0 - \beta J}{\beta^2 + m^2 \omega^2}. \quad (29)$$

Из (27) и (29) получаем, что диполь захватывается магнитным полем при любой энергии E , если

$$J = -\beta x_0. \quad (30)$$

Если условие (30) выполняется, то $\langle x \rangle_t = x_0$, энергия

$$E = \frac{m}{4} \dot{x}^2 + \frac{1}{4m} (\beta^2 + m^2 \omega^2) (x - x_0)^2,$$

а амплитуда изменения x равна $\sqrt{4mE/(\beta^2 + m^2 \omega^2)}$. Таким образом, если аппроксимация потенциала $V(x)$ параболой возможна только внутри интервала $|x - x_0| \leq \delta x_0$, то наше заключение о том, что при выполнении условия (30) диполь захватывается магнитным полем, остается справедливым только для энергий

$$E \leq \frac{1}{4m} (\beta^2 + m^2 \omega^2) \delta x_0^2.$$

Перейдем теперь к рассмотрению потенциала, имеющего горизонтальное плато в некотором интервале значений x , т.е. мы полагаем, что $V(x) = V_0 = \text{const}$ при $x \in [x_0 - L, x_0 + L]$, где $L > 0$. Внутри этого интервала

$$w(x) = V_0 + \frac{(J + \beta x)^2}{4m}$$

и эффективный потенциал $w(x)$ имеет минимум в точке $x_1 = -J/\beta$. Если $x_1 \equiv -J/\beta \in [x_0 - L, x_0 + L]$, что соответствует $J \in [-\beta x_0 - \beta L, -\beta x_0 + \beta L]$, и если при движении диполя x не выходит за пределы интервала $[x_0 - L, x_0 + L]$, то $\langle x \rangle_t = -J/\beta = x_1$ и из уравнения (25) получаем, что $\langle \dot{R} \rangle_t = 0$, т.е. классический диполь захватывается магнитным полем. Амплитуда изменения x равна $\sqrt{4m(E - V_0)}/\beta^2$. Таким образом, в процессе движения переменная x не выходит за пределы интервала $[x_0 - L, x_0 + L]$, если

$$\frac{\sqrt{4m(E - V_0)}}{\beta} \leq \inf \left(L - x_0 - \frac{J}{\beta}, L + x_0 + \frac{J}{\beta} \right). \quad (31)$$

Отметим, что $L - x_0 - J/\beta \geq 0$, т.к. предполагается, что точка $x_1 \equiv -J/\beta$ лежит внутри интервала $[x_0 - L, x_0 + L]$.

В результате мы приходим к выводу, что классический диполь захватывается магнитным полем при любой энергии E из интервала $[V_0, V_0 + \beta^2 L^2/4m]$ при условии, что J принимает любое значение из интервала

$$-\beta(L + x_0) + \sqrt{4m(E - V_0)} \leq J \leq \beta(L - x_0) - \sqrt{4m(E - V_0)}. \quad (32)$$

На рис. 3 заштрихованная область демонстрирует область значений E и J , при которых диполь захватывается магнитным полем в случае потенциала $V(x)$, имеющего плато.

Рис. 3

Этот пример представляет особый интерес, поскольку показывает, что диполь может быть захвачен магнитным полем в достаточно широком непрерывном интервале значений энергии E и интеграла движения J или, другими словами, в широком и непрерывном интервале начальных условий.

3. КВАНТОВАНИЕ

Для обеих задач мы имеем гамильтониан и дополнительный интеграл движения, коммутирующий с гамильтонианом. В квантовом случае мы должны искать общее решение уравнения Шредингера

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \quad (33)$$

где $\hat{H}$ задается уравнением (1) или (18), и дополнительного уравнения на собственные значения для оператора $\hat{J}$,

$$\hat{J}\Psi = J\Psi, \quad (34)$$

где оператор $\hat{J}$ задается уравнением (2) или (17), соответственно. Мы используем систему единиц, в которой $\hbar = 1$.

3.1. Жесткий диполь. Используем следующий прием для упрощения гамильтониана (1). Введем волновую функцию ψ , связанную с Ψ соотношением

$$\Psi(R, \varphi) = e^{i\beta R a \cos \varphi} \psi(R, \varphi). \quad (35)$$

Очевидно, что функция $\Psi(R, \varphi)$ будет описывать финитное квантовое движение (т.е. квантовое ССПК) в том и только в том случае, если

$$\int |\psi(R, \varphi)|^2 dR < \infty.$$

Используя (1), (2) и (35), преобразуем уравнения (33) и (34) к виду

$$\left[\frac{1}{4m} (\hat{P} + 2\beta a \cos \varphi)^2 + \frac{1}{4ma^2} \hat{\pi}^2 \right] \psi = E\psi, \quad (36)$$

$$\hat{P}\psi = J\psi. \quad (37)$$

Уравнение (37) имеет непрерывный спектр собственных значений, а соответствующие волновые функции – вид $\exp(iJR)$. Оператор $\hat{P}$ в уравнении (36) можно заменить его собственным значением J , после чего это уравнение можно разрешить относительно единственной переменной φ . Мы должны использовать периодические граничные условия $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$ для уравнения (36), и, следовательно, спектр собственных значений E при любом значении J будет дискретным. Каждому данному значению J будет соответствовать бесконечное число дискретных уровней энергии $E_n(J)$. Тем не менее при достаточно больших значениях J нижайшее собственное значение $E_0(J) \sim J^2$. Таким образом, при любой конечной энергии E мы имеем лишь конечное число плоских волн с импульсами J . Нормируемую волновую функцию невозможно построить в виде линейной комбинации конечного числа плоских волн. Следовательно, задача о жестком диполе в магнитном поле не имеет решений типа квантовых ССПК.

3.2. Нежесткий диполь. Для упрощения уравнений (33) и (34) с гамильтонианом $\hat{H}$, определяемым соотношением (18), и интегралом движения $\hat{J}$, определяемым соотношением (17), применим прием, аналогичный тому, который использовался в случае жесткого диполя. Положим

$$\Psi = e^{i\beta R x/2} \psi. \quad (38)$$

В результате получаем уравнения

$$\left[\frac{1}{4m} (\hat{P} + \beta x)^2 + \frac{1}{m} \hat{p}_x^2 + V(x) \right] \psi = E\psi, \quad (39)$$

$$\hat{P}\psi = J\psi. \quad (40)$$

Учитывая (40), оператор $\hat{P}$ в (39) можно заменить его собственным значением J .

Наиболее естественный выбор потенциала $V(x)$ – это осцилляторный потенциал

$$V(x) = \frac{1}{4}m\omega^2(x - x_0)^2.$$

Уравнение Шредингера (39) легко решается в этом случае и дает бесконечное число энергетических уровней

$$E_n = \sqrt{\omega^2 + \frac{\beta^2}{m^2}} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{m\omega^2(J + \beta x_0)^2}{4(\beta^2 + m^2\omega^2)} \quad (41)$$

для любого значения интеграла движения J . Для любого значения энергии $E = E_n$ уравнение (41) определяет функциональное соотношение между J и n . Из (41) видно, что каждому данному значению энергии E соответствует некоторое максимальное значение n . Таким образом, каждому конечному значению энергии E соответствует конечное число собственных значений J оператора $\hat{J}$, т.е. при каждом конечном значении энергии реализуется лишь конечное число плоских волн e^{iJR} . Следовательно, задача о нежестком диполе, в котором частицы связаны осцилляторным потенциалом, также не имеет решений типа квантовых ССПК.

Как и в классическом случае, если аппроксимация потенциала $V(x)$ параболой справедлива только в области $|x - x_0| < \delta x_0$, мы должны потребовать выполнения дополнительного условия $\langle (x - x_0)^2 \rangle^{1/2} < \delta x_0$. Из этого неравенства получим значение $n_{\max}$, определяющего условие применимости уравнения (41) в форме $n < n_{\max}$.

Рассмотрим также случай потенциала $V(x)$, имеющего плато, т.е. будем полагать, что $V(x) = V_0$ на интервале $x_0 - L < x < x_0 + L$. В простом, но физически малоинтересном случае $L = \infty$ уравнение Шредингера имеет дискретный набор собственных значений

$$E_n = V_0 + \frac{\beta}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (42)$$

не зависящих от J , причем нет никаких ограничений на величину J . Потенциал $V(x)$ в этом случае не может связать систему из двух зарядов. Более реалистичным выглядит предположение, что величина L конечна. Тогда соотношение (42) может оказаться хорошим приближением для энергий уровней при условии, что $x_1 \equiv -J/\beta \in [x_0 - L, x_0 + L]$ и $\langle (x - x_1)^2 \rangle^{1/2} < \inf(L - x_0 - J/\beta, L + x_0 + J/\beta)$. Для состояния с энергией E_n гармонического осциллятора в квантовом случае имеем $\langle (x - x_1)^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{2m(E_n - V_0)/\beta^2}$. В результате получаем следующие ограничения на величину J :

$$-\beta(L + x_0) + \sqrt{4m(E_n - V_0)} < J < \beta(L - x_0) - \sqrt{4m(E_n - V_0)}, \quad (43)$$

которые аналогичны условиям (32) в классическом случае. В частности, этим условиям можно удовлетворить, только если

$$E_n - V_0 < \frac{\beta^2 L^2}{4m}$$

или, что то же самое,

$$n + \frac{1}{2} < \frac{\beta L^2}{4\hbar},$$

где мы восстановили постоянную Планка $\hbar$. Поскольку в этом случае мы имеем непрерывный набор собственных значений J в некотором интервале, то можем построить бесконечное число нормируемых волновых пакетов, причем все они будут представлять собой собственные функции, соответствующие одной и той же собственной энергии E_n . Эти волновые пакеты имеют вид

$$\Psi(R, x) = e^{\frac{1}{2}i\beta x R} \int_{J_1}^{J_2} e^{iJR} \chi_n\left(x + \frac{J}{\beta}\right) f(J) dJ, \quad (44)$$

где $\chi_n(x)$ – собственная функция гармонического осциллятора с частотой β/m , соответствующая энергии E_n , $f(J)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию нормировки

$$\int_{J_1}^{J_2} |f(J)|^2 dJ = 1,$$

а пределы интегрирования J_1 и J_2 следует выбирать внутри интервала, задаваемого неравенствами (43). Поскольку существует бесконечное счетное множество функций $f(J)$, ортонормированных на интервале (J_1, J_2) , мы можем построить бесконечное счетное множество ССПК (т.е. собственных состояний с нормируемыми волновыми функциями) с энергией E_n .

Следует, однако, отметить, что волновые функции состояний (42) имеют малые, но ненулевые амплитуды при $x \notin [x_0 - L, x_0 + L]$, где $V(x) \neq V_0$. Легко показать, что если потенциал $V(x)$ имеет вид прямоугольной ямы, то спектр собственных значений J является дискретным при любой данной энергии E . Таким образом, в этом случае благодаря ограничениям (43) только конечное число плоских волн e^{iJR} можно построить при любой заданной энергии E и квантовые ССПК разрушаются. Тем не менее при достаточно низких энергиях число допустимых значений J может оказаться очень большим, и тогда следует ожидать, что ССПК превратятся в очень узкие резонансы, практически не отличимые от ССПК в приложениях. Мы также надеемся, что можно найти физически приемлемый потенциал $V(x)$, связывающий частицы, для которого можно будет построить квантовые решения типа ССПК для диполя в однородном магнитном поле.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Мы показали, что классический диполь может быть захвачен не зависящим от времени однородным магнитным полем. Захват диполя оказывается возможным во всех случаях, рассмотренных нами, при условии, что значения интегралов движения E и J удовлетворяют некоторым условиям. Захват диполя представляет интересный и нетривиальный пример классического ССПК, который имеет некоторые свойства, характерные для квантовых ССПК: финитность движения диполя не обуславливается потенциальными барьерами и классическими точками поворота.

Мы также исследовали соответствующую квантовую задачу и обнаружили, что квантовые ССПК отсутствуют при наиболее естественном выборе параметров системы

— в случаях жесткого вращающегося диполя и нежесткого диполя, связанного осцилляторным потенциалом. Этот результат выглядит несколько странным. Мы уже упоминали во введении, что все известные квантовые системы, обладающие ССПК, либо не имеют классического аналога (как, например, системы с нелокальным взаимодействием), либо же соответствующая классическая система не имеет ССПК. С другой стороны, на основании всех известных до сих пор примеров классических систем, имеющих ССПК, мы можем заключить, что соответствующие квантовые системы не имеют ССПК и проведенное в данной работе исследование подтверждает это заключение даже для классических систем, обладающих ССПК без классических точек поворота.

Может создаться впечатление, что причиной отсутствия решений типа ССПК для диполя в квантовом случае является принцип неопределенности. Действительно, в рассмотренных нами случаях классические ССПК возникают только при условии, что значения интегралов движения E и J удовлетворяют определенным ограничениям. В частности, для жесткого диполя или диполя, связанного осцилляторным потенциалом, классические ССПК возникают, только если J принимает некоторое определенное значение (зависящее от E в случае жесткого диполя). В то же время из уравнений (2) и (17) следует, что в квантовом случае $[\hat{J}, \hat{R}] = [\hat{P}, \hat{R}] = -i$. Таким образом, вследствие соотношения неопределенности имеем

$$\Delta J \Delta R \geq \frac{1}{2}. \quad (45)$$

Поскольку J принимает определенное значение, то $\Delta J = 0$ и, следовательно, $\Delta R = \infty$, т.е. квантовое состояние не является связанным.

На самом деле, реальная причина отсутствия квантовых ССПК несколько иная. Как показывает наш анализ, в квантовом состоянии диполя с энергией E реализуется не одно, а несколько собственных значений J оператора $\hat{J}$. Линейная комбинация соответствующих волновых функций представляет собой волновой пакет, который является собственной функцией гамильтониана $\hat{H}$, соответствующей той же самой энергии E . Тем не менее для жесткого диполя или диполя, связанного осцилляторным потенциалом, при данной собственной энергии E реализуется только конечное число собственных состояний с разными J , чего недостаточно, чтобы сформировать нормируемый волновой пакет. Таким образом, реальная причина отсутствия квантовых ССПК несколько сложнее, чем тривиальное следствие принципа неопределенности.

Отметим также пример классического потенциала с плато, обсуждавшийся выше (см. рис. 3). Как было показано, в этом случае диполь захватывается магнитным полем в достаточно широком и непрерывном интервале значений E и J , т.е. начальные условия заведомо могут не входить в противоречие с принципом неопределенности. Мы обсуждали выше возможность построения квантовых ССПК в этом случае. Дело выглядит таким образом, что единственным ограничением на собственные значения J оператора $\hat{J}$ являются неравенства, аналогичные соответствующим неравенствам в классическом случае. Таким образом, оказывается, что задача о нежестком квантовом диполе, который связан потенциалом $V(x)$, имеющим плоское плато в достаточно широком интервале значений x , весьма схожа с соответствующей классической задачей. Этот факт можно понять следующим образом. Если $V(x) = V_0 = \text{const}$, то “диполь” фактически состоит из двух невзаимодействующих (и, следовательно, независимых) заряженных

частиц, помещенных в магнитное поле. Как в классическом, так и в квантовом случаях движение обоих зарядов в плоскости, перпендикулярной полю, является финитным. Так как частицы не взаимодействуют друг с другом, то относительное положение их классических орбит (или их распределение плотностей вероятностей в квантовом случае) совершенно произвольно. Следовательно, как в классическом, так и в квантовом случаях существует бесконечное множество решений типа ССПК при данной энергии. С другой стороны, если $V(x) = V_0$ только в конечном интервале значений x , то, хотя и существует непрерывное множество классических решений типа ССПК, все эти решения соответствуют ограниченной области значений интегралов движения E и J , связанных определенным неравенством. Число квантовых решений типа ССПК становится при этом счетным или, более того, такие решения вообще перестают существовать, как это происходит в случае, когда потенциал $V(x)$ выбирается в форме прямоугольной потенциальной ямы.

Итак, квантовые решения типа ССПК в принципе возможны, если связывающий диполь потенциал отличен от потенциала гармонического осциллятора. Результаты данной работы настраивают на поиск потенциала $V(x)$, который допускает непрерывный спектр собственных значений J при некотором собственном значении энергии. Предельный случай такого потенциала можно получить непосредственно из выражения (41), полагая $\beta \rightarrow 0$ или более аккуратно $\beta \ll m\omega$. Это предел слабого магнитного поля. Отметим, что этот предельный случай противоположен рассмотренному выше предельному случаю потенциала, имеющего плато: потенциал $V(x) = 0$ получается из потенциала гармонического осциллятора в пределе $\omega \rightarrow 0$ и соответствует $\beta \gg m\omega$. Может создаться впечатление, что предел $\beta \ll m\omega$ соответствует классическому пределу и что квантовые ССПК, получаемые в этом пределе, переходят в рассмотренные нами классические ССПК. На самом деле ситуация не так проста. Даже в пределе $m \rightarrow \infty$ движение в нижайшем осцилляторном состоянии остается существенно квантовым. Истинным классическим пределом, в котором квантовые ССПК должны были бы переходить в классические, является предел $n \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$. Мы, однако, показали в пункте 3.2, что n может быть ограничено сверху значением $n_{\max}$, выше которого аппроксимация потенциала $V(x)$ гармоническим осциллятором становится неприменимой. Таким образом, предельный переход квантового ССПК в классический может зависеть от того, насколько широким является интервал значений x , в котором $V(x)$ аппроксимируется потенциалом гармонического осциллятора. Если n мало, то только движение центра масс является классическим, в то время как внутренние колебания остаются квантовыми. Если колебания по внутренней степени свободы заморожены в основном состоянии (среднеквадратичный радиус осцилляторного состояния с $n = 0$ равен $\sqrt{2/(m\omega)}$, следовательно, предел $m\omega \rightarrow \infty$ гарантирует замораживание внутреннего движения в основном состоянии), что является типичным для дипольной молекулы газа при нормальной комнатной температуре, то мы приходим к другому классическому пределу. В этом случае, восстанавливая вращательные степени свободы, которые не рассматривались в пунктах 2.2 и 3.2, мы приходим к выводу о возможности реализации классических ССПК для жесткого диполя типа тех, которые изучались в пункте 2.1.

Было бы интересно найти дополнительные нетривиальные и физически приемлемые потенциалы $V(x)$, которые связывают частицы, приводящие к решениям типа ССПК

для диполя в магнитном поле. Интересно, что поиск таких потенциалов можно осуществить методом, который использовался нами в классическом случае — решая уравнения (11) и (27). В квантовом случае $\dot{R} = i[\hat{H}, R]$. Если функция Ψ является нормируемой волновой функцией ССПК, то

$$\langle \Psi | \dot{R} | \Psi \rangle = i \langle \Psi | [\hat{H}, R] | \Psi \rangle = i(E \langle \Psi | R | \Psi \rangle - \langle \Psi | R | \Psi \rangle E) = 0. \quad (46)$$

Если Ψ — ненормируемая волновая функция непрерывного спектра, то $\langle \Psi | R | \Psi \rangle$ расходится и соотношение (46) не выполняется. Прямым расчетом коммутатора $[\hat{H}, R]$ мы получаем уравнение (27) из уравнения (46). Таким образом, мы можем свести задачу к поиску потенциала $V(x)$, а, точнее говоря, эффективного потенциала

$$w(x) = V(x) + \frac{1}{4m}(J + \beta x)^2,$$

который порождает волновые функции, удовлетворяющие уравнению (27).

Наше исследование квантовой задачи о нежестком диполе показывает, что мы должны искать такой потенциал, который допускает решения при одной и той же энергии, удовлетворяющие уравнению (27), по крайней мере на конечном интервале значений непрерывной переменной J . Мы надеемся, что найти такой физически приемлемый потенциал возможно. Отметим, что потенциал $V(x)$, связывающий, например, дипольную молекулу, может быть в определенной степени модифицирован внешним электрическим полем, направленным вдоль оси X . Мы полагаем, что решение задачи о нахождении реалистического потенциала $V(x)$, порождающего квантовые ССПК для диполя, будет представлять большой интерес, т.к. это покажет, что квантовые ССПК могут возникать в очень простых системах, взаимодействие в которых является локальным и хорошо известным; можно найти пример системы, в которой имеются как классические, так и квантовые ССПК, а также, возможно, систему, в которой ССПК можно будет изучать экспериментально.

Жесткий диполь, рассмотренный нами в данной статье, также может представлять интерес для экспериментального исследования. Мы ожидаем, что жесткая дипольная молекула будет вести себя классически в слабом магнитном поле, но при более сильных полях квантовые эффекты должны играть заметную роль. В газе из дипольных молекул при нормальных температурах вибрационные степени свободы заморожены в основном состоянии, т.е. диполь является жестким. В этих условиях часть молекул может быть захвачена магнитным полем. При увеличении поля или при понижении температуры, когда эффекты квантованности углового момента станут достаточно заметны, чтобы это могло проявиться в удельной теплоемкости, локализация молекул вследствие захвата их магнитным полем будет нарушаться в результате квантовых эффектов. Вполне возможно, что можно будет спланировать эксперимент для исследования этого эффекта, никогда прежде не обсуждавшегося в литературе. Классические ССПК, разрушенные магнитным полем, достаточно сильным, для того чтобы стали заметны квантовые эффекты, должны превратиться в очень узкие долгоживущие резонансы. Эти резонансы должны заметно видоизменить плотность состояний в системе, что, в свою очередь, может привести к любопытным особенностям дисперсии для тех или иных возбуждений.

ССПК, рассмотренные в данной статье, могут представлять также интерес для исследования хаоса. Классический гамильтониан общего вида для жесткого диполя является неинтегрируемым [14]. Это утверждение остается в силе и для нежесткого диполя. Таким образом, движение диполя может быть хаотическим. Классические решения типа ССПК соответствуют “островам интегрируемости” в фазовом пространстве системы. Было бы весьма любопытно исследовать влияние таких “островов интегрируемости” на хаотическое движение в системе.

Список литературы

- [1] *J. von Neumann, E. Wigner.* Z. Phys. 1929. V. 30. P. 465.
- [2] *F. Capasso et al.* Nature. 1992. V. 358. P. 565.
- [3] *Б. А. Арбузов, Э. Э. Боос, В. И. Саврин, С. А. Шичанин.* Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 50. С. 236; *B. A. Arbuzov, S. A. Shichanin, V. I. Savrin.* Phys. Lett. B. 1992. V. 275. P. 144.
- [4] *J. R. Spence, J. P. Vary.* Phys. Lett. B. 1990. V. 254. P. 1; 1991. V. 271. P. 27.
- [5] *J. Pappademos, U. Sukhatme, A. Pagnamenta.* Phys. Rev. A. 1993. V. 48. P. 3525; *T. A. Weber, D. L. Pursey.* Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 4478; Phys. Lett. B. 1994. V. 331. P. 430; *D. L. Pursey, T. A. Weber.* Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 3932; *A. A. Stahlhofen.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 8279; Phys. Rev. A. 1995. V. 51. P. 934.
- [6] *A. M. Shirokov, Yu. F. Smirnov, S. A. Zaytsev.* Rev. Mex. Fiz. 1994. V. 40. Supl. 1. P. 74; *С. А. Зайцев, Ю. Ф. Смирнов, А. М. Широков.* Изв. РАН, Сер. физ. 1992. Т. 56. С. 80.
- [7] *Б. Н. Захарьев, А. А. Сузько.* Потенциалы и квантовое рассеяние: прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- [8] *D. L. Pursey, T. A. Weber.* Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 4255; Quantum bound states with no classical turning points. In: Proc. of Xth Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory. Sept. 1995. Ред. Б.Б. Левченко, В.И. Саврин. М.: Изд-во МГУ, 1996. С. 371.
- [9] *D. L. Pursey, A. M. Shirokov, T. A. Weber.* Private communication, 1997.
- [10] *A. Martin.* Nuovo Cimento. 1958. V. 7. P. 607; *M. Gourden, A. Martin.* Nuovo Cimento. 1958. V. 8. P. 699; *Kh. Chadan.* Nuovo Cimento. 1958. V. 10. P. 892; *M. Bertero, G. Talenti, G. A. Viano.* Nucl. Phys. A. 1968. V. 113. P. 625; *B. Mulligan, L. G. Arnold, B. Bagchi, T. O. Krause.* Phys. Rev. C. 1976. V. 13. P. 2131; *B. Bagchi, T. O. Krause, B. Mulligan.* Phys. Rev. C. 1978. V. 15. P. 1623; *L. A. Roriz, A. Delfino.* Can. J. Phys. 1989. V. 67. P. 37; *T. A. Weber.* Nonlocal potentials and isolated states. In: Proc. of the XIth International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory. Sept. 1996. Ред. Б.Б. Левченко. М.: Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1997. С. 419.
- [11] *R. G. Newton.* Scattering Theory of Waves and Particles. 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [12] *L. Fonda, R. G. Newton.* Ann. Phys. (N.Y.). 1960. V. 10. P. 490; *H. Friedrich, D. Wintgen.* Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 3964; V. 33. P. 3231.
- [13] *E. Pollak, P. Pechukas.* J. Chem. Phys. 1978. V. 69. P. 1218.
- [14] *D. L. Pursey, A. M. Shirokov, N. A. Sveshnikov.* Classical analogs of bound quantum states with no classical turning points. In: Proc. of the XIth International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory. Sept. 1996. Ред. Б.Б. Левченко. М.: Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1997. P. 412; *A. M. Shirokov, N. A. Sveshnikov, D. L. Pursey.* Nontrivial classical analogs of quantum bound states with no classical turning points (to be published).

Поступила в редакцию 14.IV.1998 г.