Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ф. Хельминк, Интегрируемая иерархия, включающая иерархию Абловица–Каупа–Ньюэла–Сигура и ее строгую версию, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 3, 444–458

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:02:43

© 2017 г.

Г. Ф. Хельминк*

ИНТЕГРИРУЕМАЯ ИЕРАРХИЯ, ВКЛЮЧАЮЩАЯ ИЕРАРХИЮ АБЛОВИЦА– КАУПА–НЬЮЭЛА–СИГУРА И ЕЕ СТРОГУЮ ВЕРСИЮ

Представлена интегрируемая иерархия, которая включает в себя и иерархию Абловица–Каупа–Ньюэла–Сигура, и ее строгую версию. Проведено разложение пространства петель $\mathfrak{g}$ для алгебры gl_2 на подалгебры Ли $\mathfrak{g}_{\geq 0}$ и $\mathfrak{g}_{< 0}$ всех петель с положительными степенями петельного параметра и всех петель со строго отрицательными степенями петельного параметра соответственно. Выбрана коммутативная подалгебра Ли C во всем пространстве петель $\mathfrak{g}$ для алгебры sl_2 , она представлена как $C = C_{\geq 0} \oplus C_{< 0}$. Выполнена деформация подалгебры Ли $C_{\geq 0}$ группой, соответствующей $\mathfrak{g}_{< 0}$, а подалгебры Ли $C_{< 0}$ – группой, соответствующей $\mathfrak{g}_{\geq 0}$. Используется требование, чтобы эволюционные уравнения деформированных образующих элементов $C_{\geq 0}$ и $C_{< 0}$ имели форму Лакса, определяемую исходным разложением. Доказаны совместность этой системы уравнений Лакса и ее эквивалентность множеству соотношений нулевой кривизны для проекций определенных произведений образующих элементов. Также определены подходящие модули петель и множество уравнений в этих модулях, называемое линеаризацией системы, из которого могут быть получены уравнения Лакса для иерархии. Проведена полезная характеристизация особых элементов, появляющихся в линеаризации, – так называемых волновых матриц. Предлагается способ построения достаточно широкого класса решений смешанной иерархии Абловица–Каупа–Ньюэла–Сигура.

Ключевые слова: уравнения АКНС, совместные уравнения Лакса, иерархия АКНС, строгая версия, форма нулевой кривизны, линеаризация, осциллирующие матрицы, волновые матрицы, группы и алгебры петель.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9265>

Посвящается памяти Петра Петровича Кулиша

1. ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что интегрируемые иерархии часто могут быть описаны как эволюционные уравнения для деформированных образующих элементов коммутативной подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и многие из них названы по простейшему нетривиальному уравнению в системе. Для центральной иерархии настоящей работы такими

*Korteweg–de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands. E-mail: g.f.helminck@uva.nl

простейшими нетривиальными уравнениями являются уравнения Абловица–Каупа–Ньюэла–Сигура (АКНС) – система для двух комплексных функций, начальная задача для которой была решена с помощью метода обратной задачи рассеяния (см., например, [1]). В работе [2] было показано, что уравнения АКНС являются частью интегрируемой иерархии. Иерархия АКНС и ее строгая версия представляют собой примеры иерархий, допускающих описание посредством деформаций. Напомним [3], что подходящей алгеброй Ли здесь выступает пространство петель $sl_2(R)[z, z^{-1}]$, имеющих разветвление на полюс на бесконечности. А именно, оно состоит из элементов вида

$$X = \sum_{i=-\infty}^N X_i z^i, \quad X_i \in sl_2(R), \quad (1)$$

где R – комплексная коммутативная алгебра. Далее мы определим R как подходящую алгебру комплексных функций, зависящих от параметров. Пусть Q_0 – матрица $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. Коммутативной комплексной подалгеброй Ли алгебры $sl_2(R)[z, z^{-1}]$, которая деформируется в иерархии АКНС, является

$$C_0 = \left\{ \sum_{m \geq 0}^N a_m Q_0 z^m \mid a_m \in \mathbb{C} \right\}.$$

Так как все степени z центральные, то в алгебре $sl_2(R)[z, z^{-1}]$ достаточно рассмотреть деформации Q матрицы Q_0 вида

$$Q = (\text{Id} + Y_{<0}) Q_0 (\text{Id} + Y_{<0})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j z^{-j}, \quad Y_{<0} \in gl_2(R)[z, z^{-1}]_{<0}, \quad (2)$$

где $gl_2(R)[z, z^{-1}]_{<0} = \{ \sum_{i < 0} Y_i z^i \mid Y_i \in gl_2(R) \}$. В работе [3] было показано, что деформации вида (2) принадлежат $sl_2(R)[z, z^{-1}]$. Далее, пусть алгебра R наделена семейством $\{ \partial_m \mid m \geq 0 \}$ коммутирующих $\mathbb{C}$ -линейных операторов дифференцирования $\partial_m: R \rightarrow R$, где каждое ∂_m рассматривается как дифференцирование, отвечающее потоку, порожденному $Q_0 z^m$. Предположим, что каждое дифференцирование ∂_m действует покомпонентно на матрицы из $gl_2(R)$, это определяет дифференцирование этой алгебры. Аналогичное справедливо для расширения на $gl_2(R)[z, z^{-1}]$, определенного равенством

$$\partial_m(X) := \sum_{j=-\infty}^N \partial_m(X_j) z^j.$$

Теперь будем искать деформации Q вида (2) такие, что эволюция относительно $\{ \partial_m \}$ удовлетворяет следующим условиям: для любого $m \geq 0$

$$\partial_m(Q) = [(Q z^m)_{\geq 0}, Q] = -[(Q z^m)_{<0}, Q], \quad (3)$$

где $X_{\geq 0}$ означает проекцию $\sum_{i=0}^N X_i z^i$ для любого элемента $X = \sum_{i=-\infty}^N X_i z^i$, а $X_{<0}$ – проекцию $\sum_{i=-\infty}^{-1} X_i z^i$. Второе равенство в (3) следует из того факта, что все $\{ Q z^m \}$ коммутируют между собой. Уравнения (3) называются *уравнениями Лакса иерархии АКНС*, а Q называется *решением иерархии АКНС* в постановке $(R, \{ \partial_m \mid m \geq 0 \})$. Тривиальным решением является $Q = Q_0$.

Для строгой иерархии АКНС рассмотрим деформации коммутативной комплексной подалгебры Ли

$$C_1 = \left\{ \sum_{m \geq 1}^N b_m Q_0 z^m \mid b_m \in \mathbb{C} \right\}$$

группой, большей чем $G_{<0} = \{\text{Id} + Y \mid Y \in gl_2(R)[z, z^{-1}]_{<0}\}$. Как и выше, в алгебре $sl_2(R)[z, z^{-1}]$ достаточно рассмотреть деформации Z матрицы $Q_0 z$ вида

$$Z = (Y_0 + Y_{<0})Q_0 z(Y_0 + Y_0)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} Z_j z^{1-j}, \quad (4)$$

$$Y_{<0} \in gl_2(R)[z, z^{-1}]_{<0}, \quad Y_0 \in gl_2(R)^*,$$

где $gl_2(R)^*$ – группа матриц из $gl_2(R)$, имеющих в $gl_2(R)$ обратную матрицу. В работе [3] показано, что деформации вида (4) также лежат в $sl_2(R)[z, z^{-1}]$. Снова предположим, что алгебра R наделена семейством $\{\partial_m \mid m \geq 1\}$ коммутирующих $\mathbb{C}$ -линейных операторов дифференцирования $\partial_m: R \rightarrow R$, где каждый оператор ∂_m должен рассматриваться как инфинитезимальная образующая потока, порожденного $Q_0 z^m$, $m \geq 1$. Предположим также, что эти операторы дифференцирования действуют аналогичным образом на элементы $gl_2(R)[z, z^{-1}]$.

Среди деформаций Z вида (4) будем искать такие, что эволюция Z относительно $\{\partial_m\}$ удовлетворяет следующим условиям: для любого $m \geq 1$

$$\partial_m(Z) = [(Zz^{m-1})_{>0}, Z] = -[(Zz^{m-1})_{\leq 0}, Z], \quad (5)$$

где проекции $X_{>0}$ и $X_{\leq 0}$ элементов $X \in gl_2(R)[z, z^{-1}]$ определяются аналогично проекциям $X_{\geq 0}$, рассмотренным выше. Второе равенство в (5) является прямым следствием того факта, что все $\{Zz^{m-1}\}$ коммутируют между собой. Поскольку уравнения (5) соответствуют строгой обрезке, они называются *уравнениями Лакса строгой иерархии АКНС*, а деформация Z называется *решением строгой иерархии АКНС*. И в этом случае существует по крайней мере одно решение $Z = Q_0 z$. Оно называется *тривиальным* решением этой иерархии.

Целью настоящей работы является изучение естественного объединения этих двух систем. Его описанию посвящен раздел 2. Мы покажем, что комбинированные уравнения Лакса образуют совместное множество, т. е. проекции произведений образующих элементов, которые появляются в уравнениях Лакса, удовлетворяют множеству соотношений нулевой кривизны. Далее будет доказано, что этих соотношений нулевой кривизны достаточно, чтобы получить уравнения Лакса для каждой из образующих. Раздел 3 посвящен описанию линеаризации системы и обсуждению ее свойств. В разделе 4 мы представим конструкцию, дающую большой набор решений комбинированной иерархии АКНС.

2. КОМБИНИРОВАННАЯ ИЕРАХИЯ АКНС

Коммутативная подалгебра Ли, на которой базируется эта иерархия, представляет собой комплексную алгебру с базисом $\{Q_0 z^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Она является подалгеброй Ли и в алгебре $sl_2(R)[z, z^{-1}]$, и в алгебре $sl_2(R)[z^{-1}, z]$; последняя состоит из петель, имеющих разне что полюс в нуле:

$$sl_2(R)[z^{-1}, z] = \left\{ \sum_{i=-N}^{\infty} X_i z^i \mid X_i \in sl_2(R) \right\}.$$

Алгебра C может быть разложена как $C = C_{\geq 0} \oplus C_{< 0}$, где $C_{\geq 0}$ – подалгебра, натянутая на $\{Q_0 z^m \mid m \geq 0\}$, а $C_{< 0}$ – на $\{Q_0 z^m \mid m < 0\}$. Будем деформировать обе подалгебры $C_{\geq 0}$ и $C_{< 0}$, первую внутри $sl_2(R)[z, z^{-1}]$, вторую внутри $sl_2(R)[z^{-1}, z]$. Это может привести к тому, что деформации $C_{\geq 0}$ и $C_{< 0}$ перестанут быть коммутирующими. Поскольку степени z центральные, то достаточно рассмотреть деформации элементов Q_0 и $Q_0 z^{-1}$. Деформируем элемент Q_0 , как в случае иерархии АКНС, элементом группы

$$G_{< 0} = \{\text{Id} + Y_{< 0} \mid Y_{< 0} \in gl_2(R)[z, z^{-1}]_{< 0}\},$$

получим деформацию $Q = Q(z) = \sum_{j \geq 0} Q_j z^{-j}$, как в (2). Элемент $Q_0 z^{-1}$, наоборот, деформируем элементом из группы

$$G_{\geq 0} = \{X = X_0 + X_{\geq 1} \mid X_0 \in gl_2(R)^*, X_{\geq 1} \in gl_2(R)[z^{-1}, z]_{> 0}\},$$

получим

$$S = S(z) := X Q_0 z^{-1} X^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} S_j z^{j-1} \in sl_2(R)[z^{-1}, z]. \quad (6)$$

Если в $S(z)$ сделать замену $z \rightarrow z^{-1}$, то получится деформация $Z(z) = S(1/z)$, как и в случае (4) для строгой иерархии АКНС. Таким образом, после деформации базиса алгебры C получаем базис, состоящий из двух частей $\{Q z^m \mid m \geq 0\}$ и $\{S z^{m+1} \mid m < 0\}$, каждая из которых коммутативна, но не обязана коммутировать с другой.

Далее, обсудим, каким уравнениям Лакса должна удовлетворять пара (Q, S) . Для этого предположим, что алгебра R наделена семейством $\{\partial_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ коммутирующих $\mathbb{C}$ -линейных операторов дифференцирования $\partial_m: R \rightarrow R$; каждый ∂_m может рассматриваться как алгебраическая замена дифференцирования, отвечающего потоку, порожденному $Q_0 z^m$, $m \in \mathbb{Z}$. Для $X \in gl_2(R)[z, z^{-1}]$ или $X \in gl_2(R)[z^{-1}, z]$ действие каждого ∂_m определим соотношением

$$\partial_m(X) := \sum_j \partial_m(X_j) z^j,$$

где действие на элементы $gl_2(R)$ определено покомпонентно. Таким образом, получаем дифференцирование обеих алгебр. Следуя терминологии, использованной в работах [4] и [3], набор $(R, \{\partial_m \mid m \in \mathbb{Z}\})$ будем называть *постановкой для комбинированной иерархии АКНС*.

ПРИМЕР 1. Примерами постановок на данный момент могут служить алгебры комплексных полиномов $\mathbb{C}[t_m]$ от переменных $\{t_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ или формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[t_m]]$ от тех же переменных; обе алгебры с операторами дифференцирования $\partial_m = \partial/\partial t_m$, $m \in \mathbb{Z}$. Ниже при построении решений в качестве R мы будем рассматривать более сложные системы.

Потребуем теперь, чтобы пара (Q, S) удовлетворяла следующим эволюционным уравнениям:

$$\partial_m(Q) = [(Q z^m)_{\geq 0}, Q], \quad \partial_m(S) = [(Q z^m)_{\geq 0}, S], \quad m \geq 0, \quad (7)$$

$$\partial_m(S) = [(S z^{m+1})_{< 0}, S], \quad \partial_m(Q) = [(S z^{m+1})_{< 0}, Q], \quad m < 0. \quad (8)$$

Отметим, что первый набор уравнений в (7) означает, что Q удовлетворяет уравнениям Лакса иерархии АКНС относительно $\{\partial_m \mid m \geq 0\}$, а первый набор уравнений в (8) означает, что если перевести S обратно в $gl_2(R)[z, z^{-1}]$ посредством замены $Z(z) = S(1/z)$, то Z будет решением строгой иерархии АКНС относительно $\{\partial_m \mid m < 0\}$. Поэтому уравнения (7) и (8) мы будем называть *уравнениями Лакса комбинированной иерархии АКНС*, а пару (Q, S) , удовлетворяющую этим уравнениям, – *решением комбинированной иерархии АКНС*. Следует отметить, что пара $(Q_0, Q_0 z^{-1})$ удовлетворяет нашей системе, поскольку в случае отсутствия возмущений все элементы базиса C коммутируют и, более того, являются константами для всех операторов дифференцирования $\{\partial_m\}$. Эту пару мы будем называть *тривиальным решением*.

Система уравнений Лакса (7) и (8) совместна, поскольку имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть (Q, S) есть решение комбинированной иерархии АКНС. Тогда проекции $\{B_m := (Qz^m)_{\geq 0} \mid m \geq 0\}$ и $\{C_m := (Sz^{m+1})_{< 0} \mid m < 0\}$ в уравнениях Лакса для этой иерархии удовлетворяют следующим соотношениям нулевой кривизны:

$$\partial_{m_1}(B_{m_2}) - \partial_{m_2}(C_{m_1}) - [C_{m_1}, B_{m_2}] = 0, \quad m_1 < 0, \quad m_2 \geq 0, \quad (9)$$

$$\partial_{m_1}(B_{m_2}) - \partial_{m_2}(B_{m_1}) - [B_{m_1}, B_{m_2}] = 0, \quad m_1 \geq 0, \quad m_2 \geq 0, \quad (10)$$

$$\partial_{m_1}(C_{m_2}) - \partial_{m_2}(C_{m_1}) - [C_{m_1}, C_{m_2}] = 0, \quad m_1 < 0, \quad m_2 < 0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы приведем доказательство только для смешанного соотношения (9), доказательство двух других соотношений аналогично соответствующему доказательству, приведенному в работе [3]. Основная идея заключается в том, чтобы показать, что левая часть уравнения (9) принадлежит и $sl_2(R)[z, z^{-1}]_{\geq 0}$, и $sl_2(R)[z, z^{-1}]_{< 0}$, и поэтому должна равняться нулю.

Так как все степени z центральные и Q удовлетворяет второму набору уравнений в (8), то для любого $m_2 \geq 0$ и любого $m_1 < 0$ будет выполнено равенство

$$\partial_{m_1}(Qz^{m_2}) = [(Sz^{m_1+1})_{< 0}, Qz^{m_2}] = [C_{m_1}, Qz^{m_2}],$$

откуда, используя замену $B_{m_2} = Qz^{m_2} - (Qz^{m_2})_{< 0}$, получаем соотношение

$$\partial_{m_1}(B_{m_2}) - [C_{m_1}, B_{m_2}] = -\partial_{m_1}((Qz^{m_2})_{< 0}) + [C_{m_1}, (Qz^{m_2})_{< 0}],$$

правая часть которого, очевидно, принадлежит $sl_2(R)[z, z^{-1}]_{< 0}$. Поскольку $\partial_{m_2}(C_{m_1})$ также принадлежит этой подалгебре Ли, то и вся левая часть уравнения (9) лежит в $sl_2(R)[z, z^{-1}]_{< 0}$.

Чтобы получить второе включение, используем второе множество уравнений Лакса из (7) для S . Рассуждая аналогично, получим, что для любого $m_1 < 0$ и любого $m_2 \geq 0$ выполнено

$$\partial_{m_2}(Sz^{m_1+1}) = [(Qz^{m_2})_{\geq 0}, Sz^{m_1+1}] = [B_{m_2}, Sz^{m_1+1}].$$

Совместим это представление с равенством $C_{m_1} = Sz^{m_1+1} - (Sz^{m_1+1})_{\geq 0}$ и получим

$$-\partial_{m_2}(C_{m_1}) - [C_{m_1}, B_{m_2}] = \partial_{m_2}((Sz^{m_1+1})_{\geq 0}) + [(Sz^{m_1+1})_{\geq 0}, B_{m_2}].$$

Правая часть равенства, очевидно, принадлежит подалгебре Ли $sl_2(R)[z, z^{-1}]_{\geq 0}$. То же самое справедливо для слагаемого $\partial_{m_1}(B_{m_2})$, что и доказывает второе включение. ■

Обратное утверждение также имеет место.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть заданы деформации Q вида (2) и деформации S вида (6). Предположим, что проекции $\{B_m := (Qz^m)_{\geq 0} \mid m \geq 0\}$ и проекции $\{C_m := (Sz^{m+1})_{<0} \mid m < 0\}$ удовлетворяют соотношениям нулевой кривизны (9)–(11). Тогда пара (Q, S) является решением комбинированной иерархии АKNС.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя [3], можно показать, что из соотношений нулевой кривизны (10) получается первый набор уравнений Лакса (7). Также первый набор уравнений Лакса в (8) получается из соотношений нулевой кривизны (11). Предположим, что первое из оставшихся уравнений Лакса для Q не имеет места, тогда найдется такое $\ell_1 < 0$, что

$$\partial_{\ell_1}(Q) - [(Sz^{\ell_1+1})_{<0}, Q] = \partial_{\ell_1}(Q) - [C_{\ell_1}, Q] = \sum_{k \leq k_2} A_k z^k, \quad A_{k_2} \neq 0.$$

Отсюда следует, что для любого $\ell \geq 0$

$$\partial_{\ell_1}(Qz^\ell) - [C_{\ell_1}, Qz^\ell] = \sum_{k \leq k_2} A_k z^{k+\ell}. \quad (12)$$

Устремим ℓ в бесконечность, тогда в представлении (12) появятся ненулевые члены с бесконечно большими степенями z . С другой стороны, разбив это представление на части и используя тождество (9) с $m_1 = \ell_1$ и $m_2 = \ell$, получим соотношение

$$\begin{aligned} \partial_{\ell_1}(Qz^\ell) - [C_{\ell_1}, Qz^\ell] &= \partial_{\ell_1}(B_\ell) - [C_{\ell_1}, B_\ell] + \partial_{\ell_1}((Qz^\ell)_{<0}) - [C_{\ell_1}, (Qz^\ell)_{<0}] = \\ &= \partial_\ell(C_{\ell_1}) + \partial_{\ell_1}(Qz_{<0}^\ell) - [C_{\ell_1}, Qz_{<0}^\ell], \end{aligned}$$

в котором последнее выражение содержит только отрицательные степени z , что противоречит неограниченному росту этих степеней. Таким образом, все уравнения Лакса для Q должны выполняться. Предположим, что нарушается одно из оставшихся уравнений Лакса для S : пусть существует такое $s_1 \geq 0$, что

$$\partial_{s_1}(S) - [(Qz^{s_1})_{\geq 0}, S] = \partial_{s_1}(S) - [B_{s_1}, S] = \sum_{k \geq k_1} D_k z^k, \quad D_{k_1} \neq 0.$$

Аналогичным образом получаем, что для любого $s < 0$

$$\partial_{s_1}(Sz^{s+1}) - [B_{s_1}, Sz^{s+1}] = \sum_{k \geq k_1} D_k z^{k+s+1}, \quad (13)$$

и в пределе $s \rightarrow -\infty$ видим, что не существует нижней границы для степеней z в представлении (13) с ненулевыми коэффициентами. Разобьем это представление на части и воспользуемся соотношением (9) с $m_1 = s$ и $m_2 = s_1$. Получим

$$\begin{aligned} \partial_{s_1}(Sz^{s+1}) - [B_{s_1}, Sz^{s+1}] &= \\ &= \partial_{s_1}(C_s) - [B_{s_1}, C_s] + \partial_{s_1}((Sz^{s+1})_{\geq 0}) - [B_{s_1}, (Sz^{s+1})_{\geq 0}] = \\ &= \partial_s(B_{s_1}) + \partial_{s_1}((Sz^{s+1})_{\geq 0}) - [B_{s_1}, (Sz^{s+1})_{\geq 0}], \end{aligned}$$

где последнее выражение содержит только положительные степени z . Таким образом, снова имеем противоречие, следовательно, все уравнения Лакса для S также должны быть выполнены. ■

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ КОМБИНИРОВАННОЙ ИЕРАРХИИ АКНС

Форма нулевой кривизны комбинированной иерархии АКНС указывает на возможность существования линейной системы, для которой уравнения нулевой кривизны определяют условия совместности. В работе [3] были предложены линеаризации и для иерархии АКНС, и для ее строгой версии. Мы адаптируем эти линеаризации, учитывая наличие дополнительных переменных.

Итак, пусть пара (Q, S) – потенциальное решение комбинированной иерархии АКНС, а именно: Q является элементом $sl_2(R)[z, z^{-1}]$ вида (2), S – элементом $sl_2(R)[z^{-1}, z]$ вида (6). Как и в предыдущем разделе, ассоциируем с каждой такой парой проекции $\{B_m := (Qz^m)_{\geq 0} \mid m \geq 0\}$ и проекции $\{C_m := (Sz^{m+1})_{< 0} \mid m < 0\}$. Тогда линеаризация комбинированной иерархии АКНС представляет собой систему

$$\begin{aligned} Q\psi &= \psi Q_0, & \partial_m(\psi) &= B_m\psi & \text{для } m \geq 0, \\ & & \partial_m(\psi) &= C_m\psi & \text{для } m < 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} S\varphi &= \varphi Q_0 z^{-1}, & \partial_m(\varphi) &= C_m\varphi & \text{для } m < 0, \\ & & \partial_m(\varphi) &= B_m\varphi & \text{для } m \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Не уточняя, что представляют собой ψ и φ , мы покажем сначала, что необходимо для того, чтобы перейти от соотношений (14) и (15) к уравнениям Лакса для Q и S . Мы опишем все вычисления только для Q , для S процедура аналогична. Сначала подействуем оператором ∂_m , $m \geq 0$, на первое уравнение в (14) и воспользуемся первыми двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} \partial_m(Q\psi - \psi Q_0) &= \partial_m(Q)\psi + Q\partial_m(\psi) - \partial_m(\psi)Q_0 = 0 = \\ &= \partial_m(Q)\psi + QB_m\psi - B_m\psi Q_0 = \{\partial_m(Q) - [B_m, Q]\}\psi = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Далее, проделаем то же самое с ∂_m , $m < 0$, и, используя первое и третье уравнения в (14), получим

$$\begin{aligned} \partial_m(Q\psi - \psi Q_0) &= \partial_m(Q)\psi + Q\partial_m(\psi) - \partial_m(\psi)Q_0 = 0 = \\ &= \partial_m(Q)\psi + QC_m\psi - C_m\psi Q_0 = \{\partial_m(Q) - [C_m, Q]\}\psi = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Если мы сможем избавиться от ψ и в уравнении (16), и в уравнении (17), мы получим требуемые уравнения Лакса для Q . Таким образом, нам необходимо, прежде всего, чтобы было определено левое действие таких элементов, как Q , B_m и C_m , также должны быть определены правое действие Q_0 и подходящее левое действие всех операторов ∂_m , $m \in \mathbb{Z}$, которые подчиняются правилу Лейбница относительно действия всех элементов из $sl_2(R)[z, z^{-1}]$, и, наконец, нужна возможность исключения из уравнений ψ . Всего этого можно добиться с помощью выбора подходящего ψ из соответствующего $gl_2(R)[z, z^{-1}]$ -модуля. Аналогично уравнения Лакса для S можно вывести из (15), если φ будет подходящим вектором из определенного $gl_2(R)[z^{-1}, z]$ -модуля.

Чтобы понять, как определить упомянутые выше модули, рассмотрим сначала линеаризацию для тривиальных решений $Q = Q_0$ и $S = Q_0 z^{-1}$. В этом случае проекциями являются $B_m = Q_0 z^m$, $m \geq 0$, и $C_m = Q_0 z^m$, $m < 0$, а уравнения

линеаризации имеют вид

$$Q_0\psi_0 = \psi_0 Q_0, \quad \begin{array}{ll} \partial_m(\psi_0) = Q_0 z^m \psi_0 & \text{для } m \geq 0, \\ \partial_m(\psi_0) = Q_0 z^m \psi_0 & \text{для } m < 0, \end{array} \quad (18)$$

$$Q_0 z^{-1} \varphi_0 = \varphi_0 Q_0 z^{-1}, \quad \begin{array}{ll} \partial_m(\varphi) = Q_0 z^m \varphi & \text{для } m < 0, \\ \partial_m(\varphi) = Q_0 z^m \varphi & \text{для } m \geq 0. \end{array} \quad (19)$$

Предполагая, что каждое дифференцирование ∂_m есть $\partial/\partial t_m$, и используя t как краткое обозначение для всех параметров $\{t_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, приходим к решению (ψ_0, φ_0) для (18) и (19):

$$\psi_0 = \psi_0(t, z) = \exp\left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} t_m Q_0 z^m\right) = \varphi_0(t, z) = \varphi_0.$$

В общем случае функции ψ должны быть $gl_2(R)[z, z^{-1}]$ -возмущениями ψ_0 , т. е. они должны принадлежать множеству

$$\mathcal{M}_{\geq 0} = \left\{ \{g(z)\}\psi_0 = \left\{ \sum_{i=-\infty}^N g_i z^i \right\} \psi_0 \mid g(z) = \sum_{i=-\infty}^N g_i z^i \in gl_2(R)[z, z^{-1}] \right\}, \quad (20)$$

а φ должны быть $gl_2(R)[z^{-1}, z]$ -возмущениями φ_0 , т. е. принадлежать множеству

$$\mathcal{M}_{< 0} = \left\{ \{h(z)\}\varphi_0 = \left\{ \sum_{i=-N}^{\infty} h_i z^i \right\} \varphi_0 \mid h(z) = \sum_{i=-N}^{\infty} h_i z^i \in gl_2(R)[z^{-1}, z] \right\}, \quad (21)$$

где произведения $\{g(z)\}\psi_0$ и $\{h(z)\}\varphi_0$ понимаются формально и оба сомножителя необходимо разделять, чтобы не возникало вопросов, связанных со сходимостью. И на $\mathcal{M}_{\geq 0}$, и на $\mathcal{M}_{< 0}$ можно определить требуемые действия: для любых элементов $k_1(z) \in gl_2(R)[z, z^{-1}]$ и $k_2(z) \in gl_2(R)[z^{-1}, z]$ положим

$$k_1(z) \cdot \{g(z)\}\psi_0 := \{k_1(z)g(z)\}\psi_0 \quad \text{и} \quad k_2(z) \cdot \{h(z)\}\varphi_0 := \{k_2(z)h(z)\}\varphi_0$$

соответственно. Правое действие Q_0 на $\mathcal{M}_{\geq 0}$ и правое действие $Q_0 z^{-1}$ на $\mathcal{M}_{< 0}$ определим как

$$\{g(z)\}\psi_0 Q_0 := \{g(z)Q_0\}\psi_0 \quad \text{и} \quad \{h(z)\}\varphi_0 Q_0 z^{-1} := \{h(z)Q_0 z^{-1}\}\varphi_0,$$

а действие каждого ∂_m как

$$\begin{aligned} \partial_m(\{g(z)\}\psi_0) &= \left\{ \sum_{i=-\infty}^N \partial_m(g_i) z^i + \left\{ \sum_{i=-\infty}^N g_i Q_0 z^{i+m} \right\} \right\} \psi_0, \\ \partial_m(\{h(z)\}\varphi_0) &= \left\{ \sum_{i=-N}^{\infty} \partial_m(h_i) z^i + \left\{ \sum_{i=-N}^{\infty} h_i Q_0 z^{i+m} \right\} \right\} \varphi_0. \end{aligned}$$

Следуя терминологии, используемой в скалярном случае (см. [5]), будем называть элементы $\mathcal{M}_{\geq 0}$ *осциллирующими матрицами на бесконечности*, а элементы $\mathcal{M}_{< 0}$ — *осциллирующими матрицами в нуле*. Отметим, что $\mathcal{M}_{\geq 0}$ является свободным

$gl_2(R)[z, z^{-1})$ -модулем, а $\mathcal{M}_{<0}$ – свободным $gl_2(R)[z^{-1}, z)$ -модулем с образующими элементами ψ_0 и φ_0 соответственно, так как для любых $k_1(z) \in gl_2(R)[z, z^{-1})$ и $k_1(z) \in gl_2(R)[z^{-1}, z)$ выполнены равенства

$$k_1(z) \cdot \psi_0 = k_1(z) \cdot \{1\} \psi_0 = \{k_1(z)\} \psi_0 \quad \text{и} \quad k_2(z) \cdot \varphi_0 = k_2(z) \cdot \{1\} \varphi_0 = \{k_2(z)\} \varphi_0$$

соответственно. Следовательно, чтобы мы имели право исключить и $\psi = \{k_1(z)\} \psi_0$, и $\varphi = \{k_2(z)\} \varphi_0$, достаточно найти такие осциллирующие матрицы, что $k_1(z)$ будет обратимой в $gl_2(R)[z, z^{-1})$, а $k_2(z)$ – в $gl_2(R)[z^{-1}, z)$. Определим множество таких элементов, оно потребуется нам при построении решений иерархии.

Пусть для $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ матрица $\delta(m) \in gl_2(R)[z, z^{-1}) \cap gl_2(R)[z^{-1}, z)$ имеет вид

$$\delta(m) = \begin{pmatrix} z^{m_1} & 0 \\ 0 & z^{m_2} \end{pmatrix}.$$

Тогда обратной к $\delta(m)$ является матрица $\delta(-m) \in gl_2(R)[z, z^{-1}) \cap gl_2(R)[z^{-1}, z)$, и множество $\Delta = \{\delta(m) \mid m \in \mathbb{Z}^2\}$ образует группу. Элемент $\psi \in \mathcal{M}_{\geq 0}$ называется *осциллирующей матрицей на бесконечности типа $\delta(m)$* , если он имеет вид

$$\psi = \{k_1(z)\delta(m)\} \psi_0, \quad k_1(z) \in G_{<0}, \quad (22)$$

и является одним из образующих элементов $\mathcal{M}_{\geq 0}$. Аналогично элемент $\varphi \in \mathcal{M}_{<0}$ называется *осциллирующей матрицей в нуле типа $\delta(m)$* , если он имеет вид

$$\varphi = \{k_2(z)\delta(m)\} \varphi_0, \quad k_2(z) \in G_{\geq 0}, \quad (23)$$

и является образующим для $\mathcal{M}_{<0}$. Таким образом, для любой пары $(\psi, \varphi) \in \mathcal{M}_{\geq 0} \times \mathcal{M}_{<0}$, в которой ψ имеет вид (22), а φ имеет вид (23), исключение ψ и φ будет возможно.

Предположим теперь, что (Q, S) есть потенциальное решение комбинированной иерархии АКНС и что (ψ, φ) есть пара из $\mathcal{M}_{\geq 0} \times \mathcal{M}_{<0}$ с ψ вида (22) и φ вида (23), уравнениями линеаризации для которой являются уравнения (14) и (15). Тогда все действия, необходимые для получения уравнений Лакса (7) и (8), имеют смысл. Таким образом, (Q, S) является решением комбинированной иерархии АКНС; пару (ψ, φ) будем называть *множеством волновых матриц комбинированной иерархии АКНС типа $\delta(m)$* . В частности, пара (ψ, φ) полностью определяет решение (Q, S) , поскольку из первых уравнений в (14) и (15) вытекает соответственно

$$\begin{aligned} Qk_1(z)\delta(m) &= k_1(z)Q_0\delta(m) &\Rightarrow & Q = k_1(z)Q_0k_1(z)^{-1}, \\ Sk_2(z)\delta(m) &= k_2(z)Q_0z^{-1}\delta(m) &\Rightarrow & S = k_2(z)Q_0z^{-1}k_2(z)^{-1}. \end{aligned}$$

Менее жесткие условия, при которых пара осциллирующих матриц определенного типа является множеством волновых матриц комбинированной иерархии АКНС, выражает следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\psi = \{k_1(z)\delta(m)\} \psi_0$ – осциллирующая матрица типа $\delta(m)$ в $\mathcal{M}_{\geq 0}$, а $\varphi = \{k_2(z)\delta(m)\} \varphi_0$ – аналогичная матрица в $\mathcal{M}_{<0}$. Обозначим соответствующее потенциальное решение комбинированной иерархии АКНС через

$$(Q, S) := (k_1(z)Q_0k_1(z)^{-1}, k_2(z)Q_0z^{-1}k_2(z)^{-1}).$$

Тогда, если для любого $m \geq 0$ существует такой элемент $M_m \in gl_2(R)[z, z^{-1}]_{\geq 0}$, что

$$\partial_m(\psi) = M_m \psi \quad \text{и} \quad \partial_m(\varphi) = M_m \varphi,$$

а для любого $m < 0$ такой элемент $N_m \in gl_2(R)[z^{-1}, z]_{< 0}$, что

$$\partial_m(\psi) = N_m \psi \quad \text{и} \quad \partial_m(\varphi) = N_m \varphi,$$

то каждый элемент M_m равен $(Qz^m)_{\geq 0}$, каждый элемент N_m равен $(Sz^{m+1})_{< 0}$, и пара (ψ, φ) является множеством волновых матриц типа $\delta(m)$ для комбинированной иерархии АКНС.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $m \geq 0$ воспользуемся тем фактом, что $\mathcal{M}_{\geq 0}$ является свободным модулем с образующим элементом ψ_0 . Это свойство позволяет привести уравнение $\partial_m(\psi) = M_m \psi$ к уравнению в $gl_2(R)[z, z^{-1}]$:

$$\partial_m(k_1(z)) + k_1(z)Q_0z^m = M_mk_1(z) \Rightarrow \partial_m(k(z))k_1(z)^{-1} + Qz^m = M_m,$$

и, используя проекцию на $gl_2(R)[z, z^{-1}]_{\geq 0}$, получить формулу $M_m = (Qz^m)_{\geq 0}$. Для $m < 0$ воспользуемся тем фактом, что $\mathcal{M}_{< 0}$ есть свободный модуль с образующим элементом φ_0 . Приведем соотношения $\partial_m(\varphi) = N_m \varphi$ к уравнениям в $gl_2(R)[z^{-1}, z]$:

$$\partial_m(k_2(z)) + k_2(z)Q_0z^m = N_mk_2(z) \Rightarrow \partial_m(k_2(z))k_2(z)^{-1} + Sz^{m+1} = N_m.$$

Далее, проецируя правую часть на $gl_2(R)[z^{-1}, z]_{< 0}$, получим искомое равенство: $(Sz^{m+1})_{< 0} = N_m$. ■

Может так случиться, что различные пары волновых матриц типа $\delta(m)$ дают одно и то же решение комбинированной иерархии АКНС. Чтобы увидеть, как это происходит, рассмотрим решение (Q, S) , отвечающее двум множествам волновых матриц типа $\delta_m - (\psi_1, \varphi_1)$ и (ψ_2, φ_2) , т. е.

$$\begin{aligned} \psi_i &= u_i \delta(m) \psi_0 & \text{и} & & \phi_i &= p_i \delta(m) \varphi_0, & i &= 1, 2, \\ Q &= u_i Q_0 u_i^{-1}, & & & S &= p_i Q_0 z^{-1} p_i^{-1}, & i &= 1, 2, \end{aligned}$$

и $\partial_j(\psi_i) = B_j \psi_i$, $\partial_j(\phi_i) = B_j \phi_i$ для $j \geq 0$, $\partial_j(\psi_i) = C_j \psi_i$, $\partial_j(\phi_i) = C_j \phi_i$ для $j < 0$, где $B_j = (Qz^j)_{\geq 0}$ и $C_j = (Sz^{j+1})_{< 0}$. Прежде всего, можно заметить, что элемент $\psi_1^{-1} \psi_2 = \psi_0^{-1} \delta(-m) u_1^{-1} u_2 \delta(m) \psi_0$ коммутирует с Q_0 , и тогда то же самое будет верно для $u_1^{-1} u_2$. Поэтому получаем

$$u_1^{-1} u_2 = \text{Id} + \sum_{i < 0} d_i z^i = \psi_1^{-1} \psi_2, \quad d_i = \begin{pmatrix} a(i) & 0 \\ 0 & d(i) \end{pmatrix}.$$

Аналогично, элемент $\varphi_1^{-1} \varphi_2 = \varphi_0^{-1} \delta(-m) p_1^{-1} p_2 \delta(m) \varphi_0$ коммутирует с $Q_0 z^{-1}$, а значит, и с Q_0 . Следовательно, то же самое выполнено и для элемента $p_1^{-1} p_2$, поэтому получаем

$$p_1^{-1} p_2 = \sum_{i \geq 0} d_i z^i = \varphi_1^{-1} \varphi_2, \quad d_i = \begin{pmatrix} a(i) & 0 \\ 0 & d(i) \end{pmatrix}, \quad a(0)d(0) \in R^*.$$

Таким образом, осциллирующие матрицы связаны соотношениями

$$\psi_2 = \psi_1 \left(\text{Id} + \sum_{i < 0} d_i z^i \right) \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \varphi_1 \left(\sum_{i \geq 0} d_i z^i \right). \quad (24)$$

Что касается зависимости от t сомножителей $\text{Id} + \sum_{i < 0} d_i z^i$ и $\sum_{i \geq 0} d_i z^i$, то подействовав оператором ∂_j при каждом $j \geq 0$ на оба уравнения в (24), получим соответственно

$$\partial_j(\psi_2) = \partial_j \left(\psi_1 \left(\text{Id} + \sum_{i < 0} d_i z^i \right) \right) = B_j \psi_1 \left(\text{Id} + \sum_{i < 0} d_i z^i \right) + \psi_1 \left(\sum_{i < 0} \partial_j(d_i) z^i \right) = B_j \psi_2,$$

$$\partial_j(\varphi_2) = \partial_j \left(\varphi_1 \left(\sum_{i \geq 0} d_i z^i \right) \right) = B_j \varphi_1 \left(\sum_{i \geq 0} d_i z^i \right) + \varphi_1 \left(\sum_{i \geq 0} \partial_j(d_i) z^i \right) = B_j \varphi_2,$$

откуда следует соответственно

$$\psi_1 \left(\sum_{i < 0} \partial_j(d_i) z^i \right) = u_1 \left(\sum_{i < 0} \partial_j(d_i) z^i \right) \delta(m) \gamma = 0,$$

$$\varphi_1 \left(\sum_{i \geq 0} \partial_j(d_i) z^i \right) = p_1 \left(\sum_{i \geq 0} \partial_j(d_i) z^i \right) \delta(m) \gamma = 0,$$

т. е. все $d(i)$ являются константами для $\{\partial_j \mid j \geq 0\}$. То же самое можно получить и для $\{\partial_j \mid j < 0\}$, достаточно заменить B_j на C_j в полученных выше уравнениях. Итак, учитывая вышесказанное, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если (ψ_1, φ_1) и (ψ_2, φ_2) – две пары волновых матриц типа $\delta(m)$ для комбинированной иерархии АКНС, которые приводят к одному и тому же решению (Q, S) этой иерархии, то

$$\psi_2 = \psi_1 \left(\text{Id} + \sum_{i < 0} d_i z^i \right) \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \varphi_1 \left(\sum_{i \geq 0} d_i z^i \right)$$

соответственно, где все $d(i)$ – диагональные матрицы в $sl_2(R)$, которые являются постоянными для всех $\{\partial_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$, т. е. $\partial_j(d_i) = 0$.

Это утверждение завершает наше описание алгебраической структуры линейаризации комбинированной иерархии АКНС. В следующем разделе мы представим аналитический контекст, позволяющий строить множества волновых матриц этой иерархии, в рамках которого упомянутые произведения носят не формальный, а реальный характер.

4. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИЕРАРХИИ

В этом разделе мы покажем, как построить достаточно широкий класс решений комбинированной иерархии АКНС. Мы будем следовать при этом технике, описанной в работе [6]. Сначала определим группу петель, с которой будем работать. Пусть для каждого $0 < r < 1$ A_r есть кольцо

$$\left\{ z \mid z \in \mathbb{C}, r \leq |z| \leq \frac{1}{r} \right\}.$$

Следуя [7], обозначим через $L_{\text{an}}GL_2(\mathbb{C})$ семейство голоморфных отображений, действующих из некоторого кольца A_r в $GL_2(\mathbb{C})$. Это семейство является группой относительно операции поточечного умножения и естественным образом включает в себя множество постоянных отображений в $GL_2(\mathbb{C})$ как подгруппу группы $GL_2(\mathbb{C})$. Другими примерами элементов в $L_{\text{an}}GL_2(\mathbb{C})$ могут служить элементы из Δ . Однако $L_{\text{an}}GL_2(\mathbb{C})$ представляет собой больше, чем просто группу, она является бесконечномерной группой Ли. Ее структура, как многообразия, определяется ее алгеброй Ли $L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})$, которая состоит из всех голоморфных отображений $\gamma: U \rightarrow gl_2(\mathbb{C})$, где U – открытая окрестность некоторого кольца A_r , $0 < r < 1$. Так как $gl_2(\mathbb{C})$ является алгеброй Ли, то пространство $L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})$ является алгеброй Ли относительно поточечного коммутатора. С топологической точки зрения пространство $L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})$ представляет собой прямой предел всех пространств $L_{\text{an},r}gl_2(\mathbb{C})$, каждое из которых состоит из всех γ , соответствующих фиксированному кольцу A_r . Каждое пространство $L_{\text{an},r}gl_2(\mathbb{C})$ можно наделить топологией равномерной сходимости, относительно которой оно будет банаховым. В этом случае, пространство $L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})$ становится пространством Фреше. Поточечное экспоненциальное отображение задает локальный диффеоморфизм в окрестности нуля в $L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})$ (см., например, [8]).

Каждый элемент $\gamma \in L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})$ можно разложить в ряд Фурье:

$$\gamma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k, \quad \gamma_k \in gl_2(\mathbb{C}), \quad (25)$$

который сходится абсолютно на своей области определения:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\gamma_k\| r^{-|k|} < \infty.$$

Воспользуемся разложением в ряд Фурье, чтобы получить соответствующее разложение группы Ли $L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})$. А именно, рассмотрим подпространства

$$L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})_{\geq 0} := \left\{ \gamma \mid \gamma \in L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C}), \gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k \right\},$$

$$L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})_{< 0} := \left\{ \gamma \mid \gamma \in L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C}), \gamma = \sum_{k=-\infty}^{-1} \gamma_k z^k \right\}.$$

Они оба являются подалгебрами Ли алгебры $L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})$, и их прямая сумма совпадает со всей алгеброй. Первая алгебра Ли состоит из элементов $L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})$, которые можно продолжить до голоморфных отображений, определенных на некотором диске $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1/r\}$, $0 < r < 1$. Вторая алгебра Ли соответствует отображениям в $L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})$, которые имеют голоморфное продолжение на некоторый диск вокруг бесконечности $\{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid |z| \geq r\}$, $0 < r < 1$, и равны нулю на бесконечности. Каждая из этих двух подалгебр Ли содержит подгруппу из $L_{\text{an}}GL_2(\mathbb{C})$. Поточечная экспонента отображает элементы $L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})_{< 0}$ в элементы из

$$U_- = \left\{ \gamma \mid \gamma \in L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C}), \gamma = \text{Id} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \gamma_k z^k \right\},$$

а элементы $L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})_{\geq 0}$ – в элементы из

$$P_+ = \left\{ \gamma \mid \gamma \in L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C}), \gamma = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k z^k, \text{ где } \gamma_0 \in GL_2(\mathbb{C}) \right\}.$$

Легко проверить, что U_- и P_+ являются подгруппами $L_{\text{an}}GL_2(\mathbb{C})$, и, так как прямая сумма их алгебр Ли совпадает с $L_{\text{an}}gl_2(\mathbb{C})$, их произведение

$$\Omega = U_- P_+ \quad (26)$$

открыто в $L_{\text{an}}GL_2(\mathbb{C})$. Как и в конечномерном случае, оно называется *большой клеткой* относительно U_- и P_+ .

Следующая подгруппа $L_{\text{an}}SL_2(\mathbb{C})$ соответствует экспоненциальному сомножителю в линеаризации комбинированной иерархии АКНС. Коммутирующей группой, важной для этой иерархии, является группа

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \exp \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} t_i Q_0 z^i \right) \mid \gamma \in L_{\text{an}}SL_2(\mathbb{C}) \right\}.$$

Группа Δ коммутирует с Γ и содержит две подгруппы, которые нас интересуют: подгруппу

$$\Delta_c = \{ \delta^k \mid \delta = \delta((1, 1)), k \in \mathbb{Z} \},$$

которая является центральной в $L_{\text{an}}GL_2(\mathbb{C})$, и подгруппу

$$\Delta_1 = \Delta \cap L_{\text{an}}SL_2(\mathbb{C}) = \{ \delta_1^k \mid \delta_1 = \delta((1, -1)), k \in \mathbb{Z} \}.$$

Произведение $\Delta_1 \Gamma$ согласно теореме Биркгоффа (см. [7]) образует централизатор Γ в $L_{\text{an}}SL_2(\mathbb{C})$.

Теперь у нас есть все составляющие для того, чтобы описать, как строятся решения комбинированной иерархии АКНС. В произведении $L_{\text{an}}GL_2(\mathbb{C}) \times \Delta$ рассмотрим множество $\mathcal{S}$ всех пар $(g, \delta(m))$, для которых существует такое $\gamma(t)$, $\gamma \in \Gamma$, что

$$\delta(m)\gamma(t)g\gamma(t)^{-1}\delta(-m) \in \Omega = U_- P_+. \quad (27)$$

Для каждой пары $(g, \delta(m))$ в $\mathcal{S}$ найдем множество $\Gamma(g, \delta(m))$ всех $\gamma(t)$, удовлетворяющих условию (27). Оно представляет собой непустое открытое подмножество в Γ . Пусть $R(g, \delta(m))$ есть алгебра аналитических функций $\Gamma(g, \delta(m)) \rightarrow \mathbb{C}$. Это алгебра функций R , которые мы ассоциируем с точкой $(g, \delta(m)) \in \mathcal{S}$; в качестве коммутирующих операторов дифференцирования $R(g, \delta(m))$ возьмем

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Согласно свойству (27) для всех $\gamma(t) \in \Gamma(g, \delta(m))$ имеем

$$\delta(m)\gamma(t)g\gamma(t)^{-1}\delta(-m) = u_-(g, \delta(m))(t)^{-1}p_+(g, \delta(m))(t), \quad (28)$$

где $u_-(g, \delta(m))(t) \in U_-$ и $p_+(g, \delta(m))(t) \in P_+$. Тогда все матричные коэффициенты в разложениях в ряд Фурье элементов $u_-(g, \delta(m))$ и $p_+(g, \delta(m))$ принадлежат алгебре $R(g, \delta(m))$. Из уравнений (28) можно получить две осциллирующие матрицы

типа $\delta(m)$, одна из которых $\Psi_{g,\delta(m)} \in \mathcal{M}_{\geq 0}$, а вторая $\Phi_{g,\delta(m)} \in \mathcal{M}_{< 0}$. А именно, положим

$$\Psi_{g,\delta(m)}(t) := u_-(g, \delta(m))(t)\delta(m)\gamma(t), \quad (29)$$

$$\Phi_{g,\delta(m)}(t) := p_+(g, \delta(m))(t)\delta(m)\gamma(t); \quad (30)$$

заметим, что все произведения между различными сомножителями корректно определены. В силу соотношения (28) эти две осциллирующие матрицы типа $\delta(m)$ связаны равенством

$$\Psi_{g,\delta(m)}(t) = \Phi_{g,\delta(m)}(t)g^{-1}. \quad (31)$$

Непосредственно из (28) следует, что если $(g, \delta(m)) \in \mathcal{S}$, то и $(g, \delta(m)\delta^k) \in \mathcal{S}$ для любого $k \in \mathbb{Z}$, а множества осциллирующих матриц связаны соотношениями

$$\Psi_{g,\delta(m)\delta^k} = \Psi_{g,\delta(m)}\delta^k, \quad \Phi_{g,\delta(m)\delta^k} = \Phi_{g,\delta(m)}\delta^k.$$

Далее, используя утверждение 3, покажем, что каждая пара $(\Psi_{g,\delta(m)}, \Phi_{g,\delta(m)})$ есть множество волновых функций для комбинированной иерархии АKNС. Для этого вычислим двумя разными способами $\partial_j(\Psi_{g,\delta(m)})$, $j \geq 0$, сначала используя (29), а затем (30) и (31). Получим, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \partial_j(\Psi_{g,\delta(m)}) &= \{\partial_j(u_-(g, \delta(m))) + u_-(g, \delta(m))Q_0z^j\}\delta(m)\gamma = \\ &= \{\partial_j(u_-(g, \delta(m)))u_-(g, \delta(m))^{-1} + u_-(g, \delta(m))Q_0z^ju_-(g, \delta(m))^{-1}\}\Psi_{g,\delta(m)}, \end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} \partial_j(\Psi_{g,\delta(m)}) &= \{\partial_j(p_+(g, \delta(m))) + p_+(g, \delta(m))Q_0z^j\}\delta(m)\gamma g^{-1} = \\ &= \{\partial_j(p_+(g, \delta(m)))p_+(g, \delta(m))^{-1} + p_+(g, \delta(m))Q_0z^jp_+(g, \delta(m))^{-1}\}\Psi_{g,\delta(m)}. \end{aligned}$$

Сравнивая в этих выражениях коэффициенты при $\Phi_{g,\delta(m)}$, видим, что

$$M_j := \partial_m(u_-(g, \delta(m)))u_-(g, \delta(m))^{-1} + u_-(g, \delta(m))Q_0z^ju_-(g, \delta(m))^{-1}$$

принадлежит $gl_2(R)[z, z^{-1}]_{\geq 0}$. В силу соотношения (31) и для $\Phi_{g,\delta(m)}$ при всех $j \geq 0$ выполняется равенство

$$\partial_j(\Phi_{g,\delta(m)}) = M_j\Phi_{g,\delta(m)}.$$

Аналогичным образом вычислим $\partial_j(\Phi_{g,\delta(m)})$ для всех $j < 0$. Получим соотношения

$$\begin{aligned} \partial_j(\Phi_{g,\delta(m)}) &= \{\partial_j(p_+(g, \delta(m))) + p_+(g, \delta(m))Q_0z^j\}\delta(m)\gamma g^{-1} = \\ &= \{\partial_j(p_+(g, \delta(m)))p_+(g, \delta(m))^{-1} + p_+(g, \delta(m))Q_0z^jp_+(g, \delta(m))^{-1}\}\Phi_{g,\delta(m)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \partial_j(\Phi_{g,\delta(m)}) &= \{\partial_j(u_-(g, \delta(m))) + u_-(g, \delta(m))Q_0z^j\}\delta(m)\gamma g = \\ &= \{\partial_j(u_-(g, \delta(m)))u_-(g, \delta(m))^{-1} + u_-(g, \delta(m))Q_0z^ju_-(g, \delta(m))^{-1}\}\Phi_{g,\delta(m)}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при $\Phi_{g,\delta(m)}$ в этих соотношениях, видим, что

$$N_j := \partial_j(p_+(g, \delta(m)))p_+(g, \delta(m))^{-1} + p_+(g, \delta(m))Q_0z^jp_+(g, \delta(m))^{-1}$$

принадлежит $gl_2(R)[z^{-1}, z]_{<0}$. Согласно равенству (31) для $\Psi_{g,\delta(m)}$ при всех $j < 0$ также выполняется равенство

$$\partial_j(\Psi_{g,\delta(m)}) = N_j \Psi_{g,\delta(m)}.$$

Таким образом, мы показали, что все условия утверждения 3 выполнены, а значит, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим произведение пространств $\Pi := L_{\text{an}}GL_2(\mathbb{C}) \times \Delta$ и его подмножество $\mathcal{S}$, заданное в (27). Для каждой точки $(g, \delta(m)) \in \mathcal{S}$ определим пару осциллирующих матриц $(\Psi_{g,\delta(m)}, \Phi_{g,\delta(m)})$ в $\mathcal{M}_{\geq 0} \times \mathcal{M}_{< 0}$ соотношениями (29) и (30). Эта пара является множеством волновых матриц для комбинированной иерархии АКНС. В частности, пара деформаций $(Q_{g,\delta(m)}, S_{g,\delta(m)})$, определяемая равенствами*

$$\begin{aligned} Q_{g,\delta(m)} &= u_-(g, \delta(m))Q_0u_-(g, \delta(m))^{-1}, \\ S_{g,\delta(m)} &= p_+(g, \delta(m))Q_0z^{-1}p_+(g, \delta(m))^{-1}, \end{aligned}$$

есть решение комбинированной иерархии АКНС. Это решение не изменится, если заменить $\delta(m)$ на $\delta(m)\delta^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Список литературы

- [1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, “The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems”, *Studies Appl. Math.*, **53**:4 (1974), 249–315.
- [2] H. Flaschka, A. C. Newell, T. Ratiu, “Kac–Moody Lie algebras and soliton equations. II. Lax equations associated with $A_1^{(1)}$ ”, *Physica D*, **9**:3, 300–323.
- [3] G. F. Helminck, “The strict AKNS hierarchy: its structure and solutions”, *Adv. Math. Phys.*, **2016** (2016), 10, 3649205, 10 pp.
- [4] Г. Ф. Хельминк, А. Ф. Хельминк, Е. А. Панасенко, “Интегрируемые деформации в алгебре псевдодифференциальных операторов с точки зрения алгебраической теории Ли”, *ТМФ*, **174**:1 (2013), 154–176.
- [5] E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo, T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, *Nonlinear Integrable Systems – Classical Theory and Quantum Theory* (Kyoto, May 13–16, 1981), eds. M. Jimbo, T. Miwa, World Sci., Singapore, 1983, 39–119.
- [6] G. Segal, G. Wilson, “Loop groups and equations of KdV type”, *Publ. Math. IHES*, **61** (1985), 5–65.
- [7] A. Pressley, G. Segal, *Loop Groups*, Oxford Univ. Press, New York, 1986.
- [8] R. S. Hamilton, “The inverse function theorem of Nash and Moser”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **7**:1 (1982), 65–222.