Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. К. Козловски, Е. К. Складчин, А. Торриелли, Квантование уравнения Кадомцева–Петвиашвили, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 2, 259–283

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 18:28:11

© 2017 г. К. Козловский^{*†‡}, Е. К. Склянин[§], А. Торриелли[¶]

КВАНТОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ

Предложено квантование уравнения Кадомцева–Петвиашвили на цилиндре, которое эквивалентно бесконечной системе нерелятивистских одномерных бозонов, несущих массы $m = 1, 2, \dots$. Галилеево-инвариантный гамильтониан включает в себя члены $\Psi_{m_1}^\dagger \Psi_{m_2}^\dagger \Psi_{m_1+m_2}$, описывающие распад, и члены $\Psi_{m_1+m_2}^\dagger \Psi_{m_1} \Psi_{m_2}$, описывающие слияние, для всех комбинаций частиц с массами m_1 , m_2 и $m_1 + m_2$ при специальном выборе констант связи. Построены собственные функции Бете. Самосогласованность координатного анзаца Бете и, следовательно, квантовая интегрируемость модели проверены вплоть до сектора массы $M = 8$.

Ключевые слова: уравнение Кадомцева–Петвиашвили, квантование, анзац Бете, интегрируемые модели.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9266>

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) [1]

$$\varphi_{t\sigma} - \varphi_{xx} - 2\beta(\varphi\varphi_\sigma)_\sigma + \gamma\varphi_{\sigma\sigma\sigma\sigma} = 0 \quad (1.1)$$

является одним из наиболее изученных нелинейных интегрируемых уравнений от $2 + 1$ переменных $(\sigma, x; t)$. Цель настоящей статьи – построить квантовую версию уравнения КП, сохраняющую его интегрируемость.

По причинам, которые объясняются ниже, мы намеренно отклонились от стандартных обозначений [1], заменив переменные x и y на σ и x соответственно. Традиционно уравнение КП рассматривается как уравнение в $(2+1)$ -мерном пространстве-времени, где две переменные σ и x играют роль пространственных переменных. Однако для наших целей мы примем иную точку зрения, рассматривая только x как

^{*}Université de Lyon, Lyon, France

[†]École Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France

[‡]Laboratoire de Physique, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS, Lyon, France

[§]Department of Mathematics, University of York, York, UK. E-mail: evgeny.sklyanin@york.ac.uk

[¶]Department of Mathematics, University of Surrey, Guildford, UK

настоящую пространственную переменную и низводя σ до роли простой метки, индексующей континуум полей φ в $(1+1)$ -мерном пространстве-времени. Обозначения (σ, x) подчеркивают изменившуюся роль двух переменных. Пусть x пробегает действительную ось от $-\infty$ до ∞ , тогда как на σ мы наложим условие периодичности $\sigma \equiv \sigma + 2\pi$. Предполагается, что φ достаточно быстро стремится к 0 при $x \rightarrow \pm\infty$.

Мы ввели в уравнение две вещественные константы связи β и γ . Хотя в классическом случае их можно убрать перенормировкой переменных x , σ , φ , они будут полезны для квантования и при обсуждении предельных случаев. Заметим, что константы β и γ могут иметь произвольный знак, при этом случай $\gamma > 0$ отвечает так называемому уравнению КП-I, случай $\gamma < 0$ – уравнению КП-II, а $\gamma = 0$ – бездисперсионному уравнению КП [2]. Поскольку замена $\varphi := -\varphi$ меняет знак β , достаточно рассматривать $\beta \geq 0$.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описаны пуассонова структура и гамильтониан классической модели. В разделе 3 мы квантуем модель, используя простейший рецепт нормального упорядочения для гамильтониана. Перейдя от поля $\varphi(\sigma, x)$ к его фурье-компонентам по переменной σ , мы получаем описание системы в терминах бесконечного дискретного набора канонических полей $\Psi_m^\dagger(x)$, $\Psi_m(x)$ с индексом $m = 1, 2, 3, \dots$, описывающих скалярные нерелятивистские бозоны массы m . Гамильтониан галилеево-инвариантен и содержит члены, описывающие процессы распада $(\Psi_{m_1}^\dagger \Psi_{m_2}^\dagger \Psi_{m_1+m_2})$ и слияния $(\Psi_{m_1+m_2}^\dagger \Psi_{m_1} \Psi_{m_2})$ для всех троек частиц с массами m_1 , m_2 и $m_1 + m_2$ при специальном выборе констант связи.

В разделе 4 описывается пространство Фока $\mathcal{F}$ нашей системы и вводится удобная система обозначений для работы с бесконечным набором полей. Действие гамильтониана на N -частичное состояние реализовано как действие дифференциального оператора с сингулярными (содержащими дельта-функции) коэффициентами.

В силу сохранения полной массы M квантово-полевая задача сводится к серии квантово-механических задач в секторах фиксированной массы M . Структура сектора массы M проанализирована в разделе 5. Поскольку число частиц не сохраняется, сектор $\mathcal{F}_M$ расщепляется в ортогональную сумму подпространств $\mathcal{F}_M^{\mathbf{m}}$, индексруемых разложениями $\mathbf{m}$ числа M . Соответствующие волновые функции определены на камерах Вейля $x_1 < x_2 < \dots < x_N$, где N есть длина разложения $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_N)$.

В разделе 6 мы интерпретируем члены с дельта-функциями в гамильтониане как условия скачка производных компонент волновой функции и выписываем полный набор дифференциальных уравнений и граничных условий для волновой функции. В разделе 7 мы решаем задачу на собственные значения в секторе $M = 2$ и вычисляем двухчастичную S -матрицу как рациональную функцию с тремя полюсами и тремя нулями. Два возможных варианта расположения полюсов отвечают квантовым уравнениям КП-I и КП-II.

В разделе 8 строится анзац Бете в подсекторе $\mathcal{F}_M^{(1\dots 1)}$, содержащем только частицы массы 1. Волновая функция Бете записывается как линейная комбинация плоских волн с коэффициентами, которые воспроизводят правильные двухчастичные S -матрицы. В разделе 9 анзац Бете обобщается на произвольный сектор, содержащий частицы различных масс. Сформулирована гипотеза факторизации, которая позволяет ограничить проверку уравнений самосогласованности подсектором $\mathcal{F}_M^{(M)}$,

содержащим единственную частицу массы M . В разделе 10 мы анализируем полученные уравнения и предъявляем решение, которое проверено средствами компьютерной алгебры вплоть до массы $M \leq 8$. Технический анализ комбинаторных проблем вынесен в приложения.

В заключительном разделе 11 мы подводим итоги и обсуждаем нерешенные задачи и перспективы.

2. КЛАССИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КП

Мы используем следующие обозначения: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ для множества целых чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ для множества натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ для множества неотрицательных целых чисел, $\mathbb{R}$ для множества вещественных чисел, $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ для окружности.

Классическая интегрируемая иерархия КП [1] формулируется в терминах вещественного скалярного поля $\varphi(\sigma, x)$ на цилиндре $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Поле φ достаточно быстро убывает при $x \rightarrow \pm\infty$ и имеет скобки Пуассона

$$\{\varphi(\sigma, x), \varphi(\tau, y)\} = 2\pi\delta'(\sigma - \tau)\delta(x - y), \quad \sigma, \tau \in \mathbb{S}^1, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

В силу периодичности поля $\varphi(\sigma, x)$ по σ его среднее значение по окружности $\mathbb{S}^1$ принадлежит центру скобки (2.1). В дальнейшем мы всегда кладем его равным нулю, предполагая, что

$$\int_0^{2\pi} d\sigma \varphi(\sigma, x) = 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}; \quad (2.2)$$

при этом условием первообразная ∂_σ^{-1} на пространстве функций с нулевым средним по $\mathbb{S}^1$ корректно определена (константа интегрирования фиксируется единственным образом).

Существует бесконечная серия коммутирующих гамильтонианов H_p , $p = 0, 1, 2, \dots$,

$$\{H_p, H_q\} = 0, \quad (2.3)$$

которые выражаются как интегралы от локальных по x плотностей,

$$H_p = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx h_p(\sigma, x), \quad (2.4)$$

$$h_p(\sigma, x) = \frac{1}{2}(\partial_\sigma^{-p}\varphi)(\partial_x^p\varphi) + O(\beta) + O(\gamma), \quad \beta, \gamma \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

таких что

$$h_0(\sigma, x) = \frac{1}{2}\varphi^2(\sigma, x), \quad (2.6a)$$

$$h_1(\sigma, x) = \frac{1}{2}(\partial_\sigma^{-1}\varphi)(\partial_x\varphi), \quad (2.6б)$$

$$h_2(\sigma, x) = \frac{1}{2}(\partial_\sigma^{-2}\varphi)(\partial_x^2\varphi) + \frac{\beta}{3}\varphi^3 + \frac{\gamma}{2}(\partial_\sigma\varphi)^2. \quad (2.6в)$$

Соответствующие уравнения движения $\partial_{t_p}(\cdot) = \{\cdot, H_p\}$ имеют вид

$$\varphi_{t_0} = \varphi_\sigma, \quad (2.7a)$$

$$\varphi_{t_1} = -\varphi_x, \quad (2.7b)$$

$$\varphi_{t_2} = \partial_\sigma^{-1} \varphi_{xx} + 2\beta \varphi \varphi_\sigma - \gamma \varphi_{\sigma\sigma\sigma}. \quad (2.7b)$$

Отметим, что H_0 и H_1 являются генераторами сдвигов по σ и x соответственно. Дифференцируя (2.7b) по σ , мы получаем уравнение КП в виде (1.1).

Заметим, что уравнения движения (1.1) инвариантны относительно преобразования Галилея $x := x + 2vt$, $\sigma := \sigma + vx + v^2t$. Инфинитезимальный галилеев буст

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx x h_0(\sigma, x), \quad \{\varphi, B\} = x \varphi_\sigma, \quad (2.8)$$

коммутирует с гамильтонианами следующим образом:

$$\{H_p, B\} = -p H_{p-1}. \quad (2.9)$$

3. КВАНТОВАНИЕ

Используя принцип соответствия $[\cdot, \cdot] \simeq i\hbar\{\cdot, \cdot\}$ и полагая $\hbar = 1$, мы получаем из (2.1) коммутационные соотношения для поля $\varphi(\sigma, x)$:

$$[\varphi(\sigma, x), \varphi(\tau, y)] = 2\pi i \delta'(\sigma - \tau) \delta(x - y), \quad \varphi^\dagger = \varphi. \quad (3.1)$$

Соответствующие фурье-компоненты

$$\varphi(\sigma, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(x) e^{-in\sigma}, \quad a_n(x) = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \varphi(\sigma, x) e^{in\sigma}, \quad a_0(x) = 0, \quad (3.2)$$

образуют гейзенбергову (осцилляторную) алгебру Ли [3]

$$[a_m(x), a_n(y)] = m \delta_{m+n, 0} \delta(x - y), \quad a_n^\dagger(x) = a_{-n}(x). \quad (3.3)$$

Рассмотрим модуль старшего веса, порождаемый вектором старшего веса (вакуумом) $|0\rangle$ таким, что

$$a_n(x)|0\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (3.4)$$

Этот модуль старшего веса изоморфен бозонному пространству Фока $\mathcal{F}$, которое порождается каноническими операторами рождения/уничтожения $\Psi_n^\dagger(x)$ и $\Psi_n(x)$,

$$\Psi_n(x) = n^{-1/2} a_n(x), \quad \Psi_n^\dagger(x) = n^{-1/2} a_{-n}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

$$[\Psi_m(x), \Psi_n^\dagger(y)] = \delta_{mn} \delta(x - y), \quad \Psi_m(x)|0\rangle = 0, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Наш рецепт квантования гамильтонианов H_0 , H_1 и H_2 состоит в том, чтобы взять классические выражения (2.6), заменить φ на квантовые операторы и применить

нормальное упорядочение: $\Psi^\dagger$ налево, Ψ направо. Результат имеет вид

$$\mathbf{H}_0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx : \frac{1}{2} \varphi^2(\sigma, x) : = \sum_{m \in \mathbb{N}} m \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_m^\dagger(x) \Psi_m(x), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{H}_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx : \frac{1}{2} (\partial_\sigma^{-1} \varphi) (\partial_x \varphi) : = -i \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_m^\dagger(x) \partial_x \Psi_m(x), \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx : \frac{1}{2} (\partial_\sigma^{-2} \varphi) (\partial_x^2 \varphi) + \frac{\beta}{3} \varphi^3 + \frac{\gamma}{2} (\partial_\sigma \varphi)^2 : = \\ &= - \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_m^\dagger(x) \partial_x^2 \Psi_m(x) + \\ &+ \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{N}} \beta_{m_1 m_2} \int_{-\infty}^{\infty} dx [\Psi_{m_1+m_2}^\dagger(x) \Psi_{m_1}(x) \Psi_{m_2}(x) + \\ &- \Psi_{m_1}^\dagger(x) \Psi_{m_2}^\dagger(x) \Psi_{m_1+m_2}(x)] + \sum_{m \in \mathbb{N}} \gamma_m \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_m^\dagger(x) \Psi_m(x), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\beta_{m_1 m_2} = \beta_{m_2 m_1} = \beta \sqrt{(m_1 + m_2) m_1 m_2}, \quad \gamma_m = \gamma m^3. \quad (3.10)$$

Как и в классическом случае, гамильтонианы $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{H}_1$, являясь соответственно генераторами сдвигов по σ и x , коммутируют между собой и с $\mathbf{H}_2$. Квантовый галилеев буст

$$\mathbf{B} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x : \frac{1}{2} \varphi^2(\sigma, x) : = \sum_{m \in \mathbb{N}} m \int_{-\infty}^{\infty} dx x \Psi_m^\dagger(x) \Psi_m(x) \quad (3.11)$$

коммутирует с гамильтонианами следующим образом:

$$[\mathbf{H}_0, \mathbf{B}] = 0, \quad [\mathbf{H}_1, \mathbf{B}] = -i\mathbf{H}_0, \quad [\mathbf{H}_2, \mathbf{B}] = -2i\mathbf{H}_1. \quad (3.12)$$

С физической точки зрения гамильтониан $\mathbf{H}_2$ описывает нерелятивистскую галилеево-инвариантную систему одномерных частиц, помеченных целочисленным индексом m , который интерпретируется как масса частицы. Взаимодействие локально. Кубические члены с коэффициентом β описывают процессы слияния двух частиц масс m_1 и m_2 в одну частицу массы $m_1 + m_2$ и соответствующего распада. Унитарное преобразование $\Psi_m \mapsto -\Psi_m$, $\Psi_m^\dagger \mapsto -\Psi_m^\dagger$ попросту меняет знак β , так что можно считать $\beta \geq 0$. При $\beta = 0$ мы получаем теорию свободных частиц с массами m и энергией покоя γm^3 .

Модель с подобного рода взаимодействием была впервые предложена в работе [4], и ее варианты и обобщения были популярны в ядерной физике под общим названием “модель Ли” в 1950–60 гг. Наш вариант модели Ли выделяется в нескольких отношениях. Во-первых, это одномерная модель. Во-вторых, в модели фигурирует бесконечное число полей. В третьих, специальный выбор констант связи (3.10) делает, как мы ожидаем, нашу теорию интегрируемой. Другие примеры интегрируемых одномерных моделей типа Ли, изучавшихся ранее, включают модель N волн [5] и непрерывный магнетик [6].

Таким образом, ключевой вопрос состоит в том, сохраняется ли интегрируемость нашей модели в квантовом случае. Один из возможных способов проверки интегрируемости состоит в построении высших коммутирующих квантовых гамильтонианов H_n , $n \geq 3$, для которых уже нельзя ожидать, что сработает простой рецепт нормального упорядочения. Более того, хорошо известно, что проблема высших локальных квантовых гамильтонианов чрезвычайно сложна даже в гораздо более простом случае квантового нелинейного уравнения Шредингера [7], где высшие гамильтонианы оказываются крайне сингулярными и не имеют корректно определенных нормальных символов [8]–[10]. Вместо этого наш способ проверки интегрируемости состоит в построении явной формулы для совместных собственных функций операторов $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ с помощью координатного анзаца Бете и проверке возможности представить многочастичную S -матрицу как произведение двухчастичных.

4. ПРОСТРАНСТВО ФОКА

Канонические операторы $\Psi_m^\dagger(x)$ и $\Psi_m(x)$ нумеруются парами $(m, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Удобно рассматривать такую пару как единый композитный объект $\xi = (m, x)$ или $\eta = (n, y)$. Вводя обозначение $\delta_{\xi\eta} = \delta_{mn}\delta(x - y)$, мы можем таким образом переписать соотношения (3.6) в виде

$$[\Psi_\xi, \Psi_\eta^\dagger] = \delta_{\xi\eta}, \quad \Psi_\xi|0\rangle = 0. \quad (4.1)$$

Бозонное пространство Фока $\mathcal{F}$ разлагается на N -частичные компоненты, натянутые на векторы

$$|f\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^N} \int_{\mathbb{R}^N} dx_1 \dots dx_N f_N\left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{x}}\right) \prod_{j=1}^N \Psi_{m_j}^\dagger(x_j)|0\rangle, \quad (4.2)$$

которые определены в терминах N -частичных волновых функций

$$f_N\left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{x}}\right) = f_N\left(\begin{matrix} m_1, & m_2, & \dots & m_N \\ x_1, & x_2, & \dots & x_N \end{matrix}\right) = f_N(\xi_1, \dots, \xi_N) = f_N(\boldsymbol{\xi}); \quad (4.3)$$

эти функции зависят от N дискретных индексов $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^N$ и N непрерывных переменных $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ и симметричны относительно перестановок пар $\xi_i = (m_i, x_i)$. Мы будем использовать обозначение

$$(|f\rangle)_N(\boldsymbol{\xi}) \equiv f_N(\boldsymbol{\xi}) \quad (4.4)$$

для N -частичной компоненты вектора $|f\rangle$.

Используя сокращенные обозначения, можно переписать выражение (4.2) в виде

$$|f\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int d\boldsymbol{\xi}^N f_N(\boldsymbol{\xi}) \prod_{j=1}^N \Psi_{\xi_j}^\dagger|0\rangle, \quad (4.5)$$

где

$$\int d\boldsymbol{\xi}^N(\cdot) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^N} \int_{\mathbb{R}^N} dx_1 \dots dx_N (\cdot). \quad (4.6)$$

Норма вектора $|f\rangle$ равна

$$\|f\|^2 = \langle f|f\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int d\boldsymbol{\xi}^N |f_N(\boldsymbol{\xi})|^2. \quad (4.7)$$

Из соотношений (4.1) и (4.5) легко вычисляется действие канонических операторов на N -частичную волновую функцию:

$$(\Psi_\eta|f\rangle)_N(\xi_1, \dots, \xi_N) = f_{N+1}(\xi_1, \dots, \xi_N, \eta) \quad (4.8)$$

или просто

$$(\Psi_\eta|f\rangle)_N(\boldsymbol{\xi}) = f_{N+1}(\boldsymbol{\xi}, \eta). \quad (4.9)$$

Соответственно

$$(\Psi_\eta^\dagger|f\rangle)_N(\xi_1, \dots, \xi_N) = \sum_{j=1}^N \delta_{\eta\xi_j} f_{N-1}(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_N), \quad (4.10)$$

где $\hat{\xi}_j$ обозначает пропуск аргумента ξ_j .

Из соотношений (4.9) и (4.10) так же легко выводится действие гамильтонианов $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ на состояние $|f\rangle$ в терминах его N -частичных компонент. Из (3.7) следует, что оператор $\mathbf{H}_0$,

$$(\mathbf{H}_0|f\rangle)_N\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{x} \end{smallmatrix}\right) = |\mathbf{m}| f_N\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{x} \end{smallmatrix}\right), \quad |\mathbf{m}| = m_1 + \dots + m_N, \quad (4.11)$$

есть оператор полной массы N -частичной системы. Аналогично из (3.8) следует, что $\mathbf{H}_1$ есть оператор полного импульса (генератор инфинитезимальных сдвигов):

$$(\mathbf{H}_1|f\rangle)_N\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{x} \end{smallmatrix}\right) = -i(\partial_{x_1} + \dots + \partial_{x_N}) f_N\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{x} \end{smallmatrix}\right). \quad (4.12)$$

Из (3.9) получаем действие оператора $\mathbf{H}_2$ на $|f\rangle$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_2|f\rangle)_N\left(\begin{smallmatrix} m_1 & \dots & m_N \\ x_1 & \dots & x_N \end{smallmatrix}\right) &= -\left(\frac{1}{m_1}\partial_{x_1}^2 + \dots + \frac{1}{m_N}\partial_{x_N}^2\right) f_N\left(\begin{smallmatrix} m_1 & \dots & m_N \\ x_1 & \dots & x_N \end{smallmatrix}\right) + \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} \beta_{m_{i_1} m_{i_2}} f_{N-1}\left(\begin{smallmatrix} m_1 & \dots & \hat{m}_{i_1} & \dots & \hat{m}_{i_2} & \dots & m_N & m_{i_1} + m_{i_2} \\ x_1 & \dots & \hat{x}_{i_1} & \dots & \hat{x}_{i_2} & \dots & x_N & x_{i_1} \end{smallmatrix}\right) \delta(x_{i_1} - x_{i_2}) + \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \\ n_1 + n_2 = m_k}} \beta_{n_1 n_2} f_{N+1}\left(\begin{smallmatrix} m_1 & \dots & \hat{m}_k & \dots & m_N & n_1 & n_2 \\ x_1 & \dots & \hat{x}_k & \dots & x_N & x_k & x_k \end{smallmatrix}\right) + \\ &+ (\gamma_{m_1} + \dots + \gamma_{m_N}) f_N\left(\begin{smallmatrix} m_1 & \dots & m_N \\ x_1 & \dots & x_N \end{smallmatrix}\right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Как и в (4.10), шляпкой помечены опущенные аргументы. В силу симметрии волновой функции порядок аргументов неважен, и мы помещаем новые аргументы, замещающие пропущенные, в конец списка.

Рис. 1. Гиперкуб разложений.

В то время как операторы $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{H}_1$ сохраняют число частиц N , гамильтониан $\mathbf{H}_2$ таким свойством не обладает, поскольку содержит обменные члены $\Psi_{m_1+m_2}^\dagger \Psi_{m_1} \Psi_{m_2}$ и $\Psi_{m_1}^\dagger \Psi_{m_2}^\dagger \Psi_{m_1+m_2}$. Однако, коммутируя с $\mathbf{H}_0$, зато оператор $\mathbf{H}_2$ сохраняет массу $M = m_1 + \dots + m_N$. Таким образом, исходная квантово-полевая модель расщепляется в серию квантово-механических задач, ограниченных на собственные подпространства $\mathcal{F}_M$ оператора $\mathbf{H}_0$, которые мы называем секторами массы M . Согласно соотношению (4.13) в каждом секторе массы M гамильтониан $\mathbf{H}_2$ представляется как многокомпонентный дифференциальный оператор с сингулярными (содержащими дельта-функции) коэффициентами.

5. СТРУКТУРА СЕКТОРА МАССЫ M

Чтобы более детально описать структуру сектора массы M нашего пространства Фока, нам понадобится несколько определений из комбинаторики [11].

Разложение, или *композиция* $\mathbf{m}$ неотрицательного целого числа $M \in \mathbb{N}$ определяется как последовательность $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N)$ чисел $m_i \in \mathbb{N}$ таких, что

$$m_1 + \dots + m_N \equiv |\mathbf{m}| = M.$$

Число $N = \ell(\mathbf{m})$ называется *длиной* разложения, а $M = |\mathbf{m}|$ – его *весом*. Число разложений веса M равно 2^{M-1} .

Введем на множестве разложений частичный порядок $\succ$ следующим образом: $\mathbf{m} \succ \tilde{\mathbf{m}}$ означает, что $\ell(\tilde{\mathbf{m}}) = \ell(\mathbf{m}) - 1$ и $\tilde{\mathbf{m}}$ получается из $\mathbf{m}$ заменой пары соседей (m_i, m_{i+1}) для какого-то $i = 1, \dots, \ell(\mathbf{m}) - 1$ на $m_i + m_{i+1}$, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, m_{i+2}, \dots, m_N), \\ \tilde{\mathbf{m}} &= (m_1, \dots, m_{i-1}, m_i + m_{i+1}, m_{i+2}, \dots, m_N). \end{aligned}$$

Множество разложений $\mathbf{m}$ веса M становится при этом направленным графом с вершинами $\mathbf{m}$ и стрелками, указывающими от $\mathbf{m}$ на $\tilde{\mathbf{m}}$ для $\mathbf{m} \succ \tilde{\mathbf{m}}$. Такой граф топологически эквивалентен $(M-1)$ -мерному гиперкубу, имеющему 2^{M-1} вершин и $(M-1)2^{M-2}$ ребер, как показано на рис. 1. Вершина $(1, \dots, 1)$, не имеющая предшественников, является *источником* графа. Начиная с нее и проходя по стрелкам, можно разными путями достичь любой вершины и в конечном счете *стока* (M) . Сектор $\mathcal{F}_M$ нашего пространства Фока $\mathcal{F}$ есть собственное подпространство оператора массы $\mathbf{H}_0$, отвечающее собственному значению M . Он натянут на векторы

$$|f\rangle = \sum_{\mathbf{m}: |\mathbf{m}|=M} \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}^N} dx_1 \dots dx_N f_N \left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{x}} \right) \prod_{j=1}^N \Psi_{m_j}^\dagger(x_j) |0\rangle \in \mathcal{F}_M, \quad (5.1)$$

которые имеют норму

$$\|f\|^2 = \sum_{\mathbf{m}: |\mathbf{m}|=M} \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}^N} dx_1 \dots dx_N \left| f_N \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{x} \end{smallmatrix} \right) \right|^2 \quad (5.2)$$

(здесь и далее мы всегда предполагаем, что $N = \ell(\mathbf{m})$).

Камера Вейля $\mathcal{W}_N$ определяется как

$$\mathcal{W}_N = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N: x_1 < x_2 < \dots < x_N\}. \quad (5.3)$$

В силу симметрии волновой функции член $f_N(\xi)$ входит в сумму (5.1) с кратностью $N!$. Как следствие интеграл по $\mathbb{R}^N$ в (5.1) и в (5.2) можно заменить на интеграл по $\mathcal{W}_N$ с соответствующим комбинаторным коэффициентом:

$$|f\rangle = \sum_{\mathbf{m}: |\mathbf{m}|=M} \int_{\mathcal{W}_N} dx_1 \dots dx_N f_N \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{x} \end{smallmatrix} \right) \prod_{j=1}^N \Psi_{m_j}^\dagger(x_j) |0\rangle \in \mathcal{F}_M, \quad (5.4)$$

$$\|f\|^2 = \sum_{\mathbf{m}: |\mathbf{m}|=M} \int_{\mathcal{W}_N} dx_1 \dots dx_N \left| f_N \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{x} \end{smallmatrix} \right) \right|^2. \quad (5.5)$$

В результате $\mathcal{F}_M$ разлагается в ортогональную сумму:

$$\mathcal{F}_M = \bigoplus_{\mathbf{m}: |\mathbf{m}|=M} \mathcal{F}_M^{\mathbf{m}}, \quad \mathcal{F}_M^{\mathbf{m}} \simeq L^2(\mathcal{W}_N). \quad (5.6)$$

Векторы из $\mathcal{F}_M$, таким образом, отождествляются с наборами из 2^{M-1} функций $f_N(\xi)$, индексиремых разложениями $\mathbf{m}$, и с аргументами $\mathbf{x} \in \mathcal{W}_N$. Компонента $f_N(\xi)$ описывает систему из $N = \ell(M)$ одномерных частиц с массами m_i и координатами x_i , упорядоченными слева направо.

В следующем разделе мы переписываем задачу на собственные значения для дифференциального оператора (4.13) с дельта-функциями в коэффициентах, действующего на функции $f_N(\xi)$ с $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, в виде эквивалентной системы дифференциальных уравнений и граничных условий для функций $f_N(\xi)$ с $\mathbf{x} \in \mathcal{W}_N$.

6. ОТ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЙ К ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ

Замена членов с дельта-функцией на граничные условия представляет собой стандартную процедуру (см. например, [12]–[14] для случая скалярного бозе-газа (квантовое нелинейное уравнение Шредингера)). Нам потребуется только адаптировать вывод к случаю частиц с разными массами.

Разберем сначала простой двухчастичный пример. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ на $\mathbb{R}^2$ удовлетворяет уравнению Шредингера, описывающему две частицы с массами m_1 и m_2 и содержащему сингулярный неоднородный член (внешний источник),

$$\left(-\frac{1}{m_1} \partial_{x_1}^2 - \frac{1}{m_2} \partial_{x_2}^2 \right) f(x_1, x_2) + \sigma(x_1) \delta(x_1 - x_2) + \tau(x_1, x_2) = 0, \quad (6.1)$$

с гладкими плотностями $\sigma(x)$ и $\tau(x_1, x_2)$. Поскольку $\delta(x_1 - x_2)$ исчезает вне диагонали, мы немедленно получаем дифференциальное уравнение

$$-\left(\frac{1}{m_1} \partial_{x_1}^2 + \frac{1}{m_2} \partial_{x_2}^2 \right) f(x_1, x_2) + \tau(x_1, x_2) = 0, \quad x_1 \neq x_2. \quad (6.2)$$

Чтобы вывести граничные условия на диагонали $x_1 = x_2$, предположим, что функция f кусочно гладкая, т. е. дается двумя разными выражениями $f^{(+)}(x_1, x_2)$ в верхней полуплоскости $x_1 - x_2 > 0$ и $f^{(-)}(x_1, x_2)$ в нижней полуплоскости $x_1 - x_2 < 0$. Кроме того, мы предполагаем, что обе функции $f^{(\pm)}$ являются гладкими и заданными в открытой окрестности разреза $x_1 = x_2$, продолжая таким образом область определения каждой функции за пределы исходной полуплоскости.

Вводя функцию скачка

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

мы можем представить f в виде

$$f(x_1, x_2) = f^{(+)}(x_1, x_2)\theta(x_1 - x_2) + f^{(-)}(x_1, x_2)\theta(x_2 - x_1) \quad (6.3)$$

(мы рассматриваем f как измеримую функцию, определяющую распределение, так что ее значения на множестве $x_1 = x_2$ нулевой меры несущественны и могут быть оставлены неопределенными).

Подставим теперь выражение (6.3) в (6.1) и произведем дифференцирование, используя тождества

$$\begin{aligned} \omega(x_1, x_2)\delta(x_1 - x_2) &= \omega(x_1, x_1)\delta(x_1 - x_2), \\ \omega(x_1, x_2)\delta'(x_1 - x_2) &= (\partial_{x_2}\omega)(x_1, x_1)\delta(x_1 - x_2) + \omega(x_1, x_1)\delta'(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (6.4)$$

которые выполняются для любой гладкой функции $\omega(x_1, x_2)$. Тогда коэффициенты при θ - и δ -функциях в получающейся сумме зависят только от x_1 . Коэффициенты при $\theta(x_1 - x_2)$ и $\theta(x_2 - x_1)$ дают основное уравнение (6.2) для $f^{(+)}$ и $f^{(-)}$ соответственно. Коэффициент при $\delta'(x_1 - x_2)$ дает условие непрерывности

$$f^{(+)}(x_1, x_1) = f^{(-)}(x_1, x_1). \quad (6.5)$$

Наконец, коэффициент при $\delta(x_1 - x_2)$ дает, после упрощений с помощью формулы (6.5), граничное условие

$$\left[\frac{1}{m_1} \partial_{x_1}(f^{(+)} - f^{(-)}) + \frac{1}{m_2} \partial_{x_2}(-f^{(+)} + f^{(-)}) \right](x_1, x_1) = \sigma(x_1). \quad (6.6)$$

Пусть $g(x \pm 0)$ обозначает односторонний предел $g(x \pm \varepsilon)$ при $\varepsilon \searrow 0$. Тогда условие непрерывности (6.5) переписывается как

$$f(x + 0, x - 0) = f(x - 0, x + 0) \equiv f(x, x), \quad (6.7)$$

а условие на скачок поперечной производной (6.6) – как

$$\begin{aligned} -[(m_2 \partial_{x_1} - m_1 \partial_{x_2})f](x + 0, x - 0) + \\ + [(m_2 \partial_{x_1} - m_1 \partial_{x_2})f](x - 0, x + 0) + m_1 m_2 \sigma(x) = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В этом уравнении предполагается, что сначала к функции двух переменных (x_1, x_2) применяется дифференциальный оператор, а затем в $(x_1, x_2) = (x \pm \varepsilon, x \mp \varepsilon)$ берется предел $\varepsilon \searrow 0$.

Приведенное выше рассуждение применимо и к многочастичному случаю, поскольку в окрестности разреза $x_i = x_j$ функции непрерывно зависят от остальных переменных, которые тем самым можно игнорировать. Кроме того, когда переменные упорядочены согласно (5.3), остаются только граничные условия для соседних частиц, при $x_i = x_{i+1}$.

Рассмотрим задачу на собственные значения $\mathbf{H}_2|f\rangle = \lambda|f\rangle$. Применяя к (4.13) соотношения (6.2), мы получаем систему основных уравнений, индексированных вершинами $\mathbf{m}$ гиперкуба,

$$\lambda f_N(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{m_i} \partial_{x_i}^2 + \gamma_{m_i} \right) f_N(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{\mathbf{m}' \succ \mathbf{m}} \beta_{n_1 n_2} f_{N+1}(\boldsymbol{\xi}'). \quad (6.9)$$

Сумма по разложениям $\mathbf{m}'$ таким, что $\mathbf{m}' \succ \mathbf{m}$, есть не что иное, как двойная сумма по целым числам k, n_1, n_2 с $n_1 + n_2 = m_k$, которые индексируют эти разложения и соответствующие векторы $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}'$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_{k-1} & m_k & m_{k+1} & \dots & m_N \\ x_1 & \dots & x_{k-1} & x_k & x_{k+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\xi}' = \begin{pmatrix} \mathbf{m}' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_{k-1} & n_1 & n_2 & m_{k+1} & \dots & m_N \\ x_1 & \dots & x_{k-1} & x_k & x_k & x_{k+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Отметим, что в (6.10) нет необходимости различать пределы $x_k \pm 0$ ввиду непрерывности функции f_{N+1} .

Соответственно из (6.8) получается множество граничных условий, индексированных стрелками гиперкуба, исходящими из $\mathbf{m}$, т.е. парами

$$(m_1, \dots, m_k, m_{k+1}, \dots, m_N) \rightarrow (m_1, \dots, m_k + m_{k+1}, \dots, m_N), \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Применяя условие (6.8) к (4.13), мы получаем скачок поперечной производной на линии $x_k = x_{k+1}$:

$$\begin{aligned} & - [(m_{k+1} \partial_{x_k} - m_k \partial_{x_{k+1}}) f_N] \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_{k-1} & m_k & m_{k+1} & m_{k+2} & \dots & m_N \\ x_1 & \dots & x_{k-1} & x_{k+1} + 0 & x_{k+1} - 0 & x_{k+2} & \dots & x_N \end{pmatrix} + \\ & + [(m_{k+1} \partial_{x_k} - m_k \partial_{x_{k+1}}) f_N] \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_{k-1} & m_k & m_{k+1} & m_{k+2} & \dots & m_N \\ x_1 & \dots & x_{k-1} & x_k - 0 & x_k + 0 & x_{k+2} & \dots & x_N \end{pmatrix} + \\ & + 2m_k m_{k+1} \beta_{m_k, m_{k+1}} \times \\ & \times f_{N-1} \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_{k-1} & \hat{m}_k & \hat{m}_{k+1} & m_{k+2} & \dots & m_N \\ x_1 & \dots & x_{k-1} & \hat{x}_k & \hat{x}_{k+1} & x_{k+2} & \dots & x_N \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Чтобы выразить результат в виде функции от аргументов, лежащих в камере Вейля ($x_1 < \dots < \hat{x}_{k+1} < \dots < x_N$), остается использовать симметрию функций f_N и f_{N-1} и совершить перестановку $x_k \leftrightarrow x_{k+1}$ в первом слагаемом в (6.11), а также переставить x -переменные в порядке возрастания в последнем слагаемом. Окончательно

граничное условие может быть записано в компактном виде с использованием разложений $\mathbf{m}', \mathbf{m}'' \succ \mathbf{m}$ веса $\mathbf{m}$ и связанных с ними векторов ξ', ξ'' и ξ ,

$$\begin{aligned}\xi' &= \begin{pmatrix} \mathbf{m}' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_k & m_{k+1} & \dots & m_N \\ x_1 & \dots & x_k - 0 & x_k + 0 & \dots & x_N \end{pmatrix}, \\ \xi'' &= \begin{pmatrix} \mathbf{m}'' \\ \mathbf{x}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_{k+1} & m_k & \dots & m_N \\ x_1 & \dots & x_k - 0 & x_k + 0 & \dots & x_N \end{pmatrix}, \\ \xi &= \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_{k-1} & m_k + m_{i+1} & m_{k+2} & \dots & m_N \\ x_1 & \dots & x_{k-1} & x_k & x_{k+2} & \dots & x_N \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (6.12)$$

Мы имеем

$$\begin{aligned}&[(m_k \partial_{x_k} - m_{k+1} \partial_{x_{k+1}}) f_N](\xi'') + \\ &+ [(m_{k+1} \partial_{x_k} - m_k \partial_{x_{k+1}}) f_N](\xi') + 2m_k m_{k+1} \beta_{m_k, m_{k+1}} f_{N-1}(\xi) = 0.\end{aligned}\quad (6.13)$$

Заметим, что перестановка $m_k \leftrightarrow m_{k+1}$ приводит к идентичному уравнению. Кроме того, при $m_k = m_{k+1}$ первый и второй члены в (6.13) равны друг другу.

В итоге задача на собственные значения для гамильтониана $\mathbf{H}_2$ в секторе массы M может быть сформулирована в терминах набора функций $f_N(\xi)$, индексруемых разложениями $\mathbf{m}$ веса M и длины $N = \ell(\mathbf{m})$, определенных на камерах Вейля $\mathcal{W}_N$. Уравнения на $f_N(\xi)$ делятся на два класса: “основные” дифференциальные уравнения второго порядка (6.9), индексруемые вершинами $\mathbf{m}$ гиперкуба разложений, и граничные условия для скачков (6.13) поперечных производных, индексруемые стрелками того же гиперкуба, которые соответствуют процессам слияния $(m_k, m_{k+1}) \rightarrow (m_k + m_{k+1})$ соседних частиц.

7. РЕШЕНИЕ В СЕКТОРЕ $M = 2$

Число $M = 2$ допускает два разложения: $1 + 1$ и 2 (см. рис. 1). Соответственно, сектор массы 2 расщепляется как $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2^{(11)} \oplus \mathcal{F}_2^{(2)}$, таким образом, всякий вектор $|f\rangle \in \mathcal{F}_2$ представляется в виде

$$|f\rangle = \int_{x_1 < x_2} dx_1 dx_2 f_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \Psi_1^\dagger(x_1) \Psi_1^\dagger(x_2) |0\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 f_1 \begin{pmatrix} 2 \\ x_1 \end{pmatrix} \Psi_2^\dagger(x_1) |0\rangle, \quad (7.1)$$

при этом

$$\|f\|^2 = \int_{x_1 < x_2} dx_1 dx_2 \left| f_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \right|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \left| f_1 \begin{pmatrix} 2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right|^2. \quad (7.2)$$

Основное уравнение общего вида (6.9) порождает два уравнения, отвечающие вершинам графа на рис. 1:

$$\lambda f_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = (-\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 + 2\gamma_1) f_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad (7.3a)$$

$$\lambda f_1 \begin{pmatrix} 2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2} \partial_{x_1}^2 + \gamma_2 \right) f_1 \begin{pmatrix} 2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \beta_{11} f_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}. \quad (7.3b)$$

Уравнение (6.13) порождает граничное условие, отвечающее единственной стрелке (11) $\rightarrow$ (2) графа на рис. 1:

$$2[(\partial_{x_1} - \partial_{x_2})f_2] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix} + 2\beta_{11} f_1 \begin{pmatrix} 2 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.3в)$$

(оба члена с производными дают идентичный вклад в силу симметрии $m_1 = m_2 = 1$).

В духе анзаца Бете [12], [13] мы будем искать решение краевой задачи (7.3) в подсекторе $\mathbf{m} = (11)$ в виде линейной комбинации плоских волн: падающей $e^{i(u_2x_1+u_1x_2)}$ и рассеянной $e^{i(u_1x_1+u_2x_2)}$ с коэффициентом рассеяния S_{21} :

$$f_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = e^{i(u_2x_1+u_1x_2)} + S_{21}e^{i(u_1x_1+u_2x_2)}, \quad x_1 < x_2. \quad (7.4а)$$

Из условия (7.3в) следует, что волновая функция f_1 в подсекторе $\mathbf{m} = (2)$ должна задаваться как $e^{i(u_1+u_2)x_1}$ с точностью до неопределенного коэффициента R :

$$f_1 \begin{pmatrix} 2 \\ x_1 \end{pmatrix} = R \cdot e^{i(u_1+u_2)x_1}. \quad (7.4б)$$

Подставляя анзац (7.4) в (7.3а) и (7.3б), мы получаем соответственно основное уравнение в секторе (11)

$$u_1^2 + u_2^2 + 2\gamma_1 = \lambda \quad (7.5а)$$

и основное уравнение в секторе (2)

$$\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)^2 + \gamma_2 \right) R + \beta_{11}(1 + S_{21}) = \lambda R, \quad (7.5б)$$

а также условие стыковки этих двух секторов (11) $\rightarrow$ (2):

$$i(u_2 - u_1) + i(u_1 - u_2)S_{21} + \beta_{11}R = 0. \quad (7.5в)$$

Полученная система трех уравнений (7.5) относительно λ , S_{21} , R легко решается. Уравнение (7.5а) напрямую дает значение λ , а из оставшихся уравнений находим

$$S_{21} = S(u_2 - u_1), \quad S(u) = -\frac{P(iu)}{P(-iu)}, \quad (7.6)$$

где P есть кубический полином,

$$P(v) = v^3 + (2\gamma_2 - 4\gamma_1)v - 2\beta_{11}^2, \quad (7.7)$$

который после подстановки $\beta_{11} = \sqrt{2}\beta$, $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = 8\gamma$ из (3.10) может быть записан как

$$P(v) = v^3 + 12\gamma v - 4\beta^2. \quad (7.8)$$

Далее,

$$R = \frac{4i\beta_{11}u_{21}}{P(-iu_{21})} = \frac{4\sqrt{2}i\beta u_{21}}{P(-iu_{21})}, \quad u_{21} \equiv u_2 - u_1. \quad (7.9)$$

Как и должно быть для галилеево-инвариантной теории, S -матрица инвариантна относительно сдвигов всех скоростей $u_a \mapsto u_a + c$, $a = 1, 2$.

Рис. 2. Нули функции $P(u)$. Рис. 3. Нули и полюсы функции $S(u)$.

Заметим, что сумма всех нулей кубического полинома P равна нулю в силу отсутствия квадратного члена. Так как P имеет вещественные коэффициенты и отрицательный свободный член $-4\beta^2$, полином имеет ровно один положительный корень. Два оставшихся корня лежат в левой полуплоскости, и их положение определяется дискриминантом $D = -432(16\gamma^3 + \beta^4)$. При $D < 0$ они комплексно сопряжены, а при $D > 0$ оба нуля вещественны и отрицательны, как показано на рис. 2.

Представляется естественным назвать случай $D < 0$, или $16\gamma^3 + \beta^4 > 0$ случаем квантового уравнения КП-I, а случай $D > 0$, или $16\gamma^3 + \beta^4 < 0$ – случаем квантового уравнения КП-II. Отметим, что граница между этими двумя областями дается не уравнением $\gamma = 0$, как в классическом случае, а уравнением $16\gamma^3 + \beta^4 = 0$, когда P имеет двойной отрицательный корень. Член β^4 играет при этом роль квантовой поправки. Вопрос, что называть *бездисперсионным* квантовым уравнением КП, остается спорным: то ли это случай $16\gamma^3 + \beta^4 = 0$, то ли случай $\gamma = 0$. Последнее уравнение соответствует $P(u) = u^3 - 4\beta^2$, когда нули образуют равносторонний треугольник.

Соответствующий коэффициент рассеяния $S(u)$, дающийся формулой (7.6), есть рациональная функция, имеющая три нуля и три полюса. Их положение ($\circ$ для нулей, $\bullet$ для полюсов) в зависимости от D показано на рис. 3.

8. АНЗАЦ БЕТЕ В СЕКТОРЕ $\mathcal{F}_M^{(1\dots 1)}$

Известные многочастичные интегрируемые модели имеют две общие черты: отсутствие дифракции (сохранение асимптотических импульсов частиц после столкновения) и представление многочастичной S -матрицы в виде произведения двух-частичных [12], [13]. Для моделей с дельтаобразным взаимодействием, подобных квантовому нелинейному уравнению Шредингера [14], [15], такое поведение можно получить при помощи координатного анзаца Бете [12], [13], или сделав предположение, что собственная функция может быть записана как сумма плоских волн с коэффициентами, отличающимися на двухчастичный S -множитель при перестановке двух моментов.

В этом разделе мы описываем анзац Бете для нашей модели в подсекторе $\mathcal{F}_M^{(1\dots 1)}$ сектора $\mathcal{F}_M$, содержащем M частиц единичной массы и отвечающем разложению $\mathbf{m} = (1, \dots, 1)$ веса M .

Обозначим через $\mathfrak{S}_{[1,M]}$ группу перестановок чисел $(1, \dots, M)$. Введем вектор импульсов $\mathbf{u} \equiv (u_1, \dots, u_M)$ и положим $\mathbf{v} \equiv i\mathbf{u}$. Пусть $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_M) \in \mathfrak{S}_{[1,M]}$ действует на функциях от $\mathbf{v}$ подстановками, $\mathbf{s}: v_j \mapsto v_{s_j}$. Тогда для плоской волны

$$\exp(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) \equiv \exp(v_1 x_1 + \dots + v_M x_M) \quad (8.1)$$

имеем

$$\mathbf{s}(\exp(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})) = (\exp(\mathbf{s}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x})) = \exp(v_{s_1} x_1 + \dots + v_{s_M} x_M). \quad (8.2)$$

Мы предпочитаем нормировать волновую функцию Бете, сделав коэффициенты при плоских волнах полиномами по v_j . Такая нормировка была впервые предложена для квантового нелинейного уравнения Шредингера в монографии [13] (глава 4, уравнение (4.8)); см. также книгу [12] (глава 1, уравнение (1.24)). Выбор нормировки мотивируется удобством алгебраических манипуляций с полиномами по сравнению с рациональными функциями.

ГИПОТЕЗА 1 (анзац Бете для $\mathbf{m} = (1, \dots, 1)$). *Компонента собственной функции оператора $\mathbf{H}_2$ в подсекторе $\mathcal{F}_M^{(1\dots 1)}$ может быть выбрана на $\mathbf{x} \in \mathcal{W}_{1\dots 1}$ в виде*

$$f_M \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_M \end{pmatrix} = \sum_{\mathbf{s} \in \mathfrak{S}_{[1,M]}} \text{sgn}(\mathbf{s}) \left(\prod_{j < k} P(v_{s_k} - v_{s_j}) \right) \mathbf{s}(\exp(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})), \quad (8.3)$$

где $\text{sgn}(\mathbf{s})$ есть знак перестановки $\mathbf{s}$, а полином $P(u)$ дается формулой (7.8).

По построению волновая функция Бете (8.3) антисимметрична по импульсам $\mathbf{v}$. Заметим, что отношение коэффициентов для двух плоских волн в (8.3), отличающихся перестановкой двух соседних моментов v_{s_j} и $v_{s_{j+1}}$, равно $S(v_{s_j} - v_{s_{j+1}})$ в силу (7.6), как и требовалось.

Две более употребительные волновые функции $f^{(\text{in})}$ и $f^{(\text{out})}$, имеющие унитарные множители при плоских волнах, определяются из соотношения

$$f_M \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_M \end{pmatrix} = f^{(\text{in})}(-1)^{M(M-1)/2} \prod_{j < k} P(v_j - v_k) = f^{(\text{out})} \prod_{j < k} P(v_k - v_j). \quad (8.4)$$

Предполагая, что $u_1 < \dots < u_M$ и $x_1 < \dots < x_M$, можно интерпретировать $\mathbf{t}(\exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}))$ с $\mathbf{t} \equiv (M, \dots, 1)$ как падающую волну, а $\exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})$ – как рассеянную

волну. Это отвечает упорядочению частиц, несущих импульсы u_i , при $t \rightarrow -\infty$ или соответственно при $t \rightarrow +\infty$. Функция $f^{(\text{in})}$ при этом нормируется на единичный коэффициент при входящей волне $t(\exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}))$, а функция $f^{(\text{out})}$ – на единичный коэффициент при выходящей волне $\exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})$. Функции $f^{(\text{in})}$ и $f^{(\text{out})}$ различаются только множителем,

$$f^{(\text{out})} = \mathbb{S} f^{(\text{in})}, \quad \mathbb{S} = \prod_{1 \leq j < k \leq M} S(u_j - u_k) \quad (8.5)$$

(многочастичной S -матрицей), который представляется как произведение множителей, отвечающим двухчастичным столкновениям, в духе анзаца Бете.

В силу антисимметрии по $\mathbf{v}$ вся волновая функция (8.3) может быть восстановлена из единственного члена, содержащего $\exp(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})$. Пусть $1 \leq a < b \leq M$. Для сегмента $(a, \dots, b) \subset (1, \dots, M)$ определим полином

$$\mathbb{P}_{[a,b]}(\mathbf{v}) \equiv \prod_{a \leq j < k \leq b} P(v_k - v_j) \quad (8.6)$$

и линейный оператор $\mathfrak{P}_{[a,b]}$, действующий на функции от $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_M)$, антисимметризуя их с весовым множителем $\mathbb{P}_{[a,b]}$ по группе $\mathfrak{S}_{[a,b]}$ перестановок индексов $(a, \dots, b)$, действующей на $(v_a, \dots, v_b)$:

$$\mathfrak{P}_{[a,b]}: g(\mathbf{v}) \mapsto \sum_{\mathbf{s} \in \mathfrak{S}_{[a,b]}} \text{sgn}(\mathbf{s}) \mathbb{P}_{[a,b]}(\mathbf{s}(\mathbf{v})) g(\mathbf{s}(\mathbf{v})). \quad (8.7)$$

Оператор $\mathfrak{P}_{[a,b]}$ для подсегмента из $(1, \dots, M)$ встретится только в приложениях. В основном тексте мы используем сокращение $\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}_{[1,M]}$.

В терминах оператора $\mathfrak{P}$ формула (8.3) для функции Бете принимает исключительно простой вид:

$$f_M \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_M \end{pmatrix} = \mathfrak{P}(\exp(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})). \quad (8.8)$$

9. АНЗАЦ БЕТЕ В СЕКТОРЕ ОБЩЕГО ВИДА

Граничные условия (6.13) можно рассматривать как рекуррентные соотношения, позволяющие получить волновую функцию $f_N(\boldsymbol{\xi})$, дифференцируя волновые функции $f_{N+1}(\boldsymbol{\xi})$, которые отвечают предшествующим разложениям в смысле отношения порядка $\succ$. Таким образом, начав с источника $\mathbf{m} = (1, \dots, 1)$ и двигаясь вдоль стрелок графа разложений, можно в принципе получить волновые функции для всех остальных разложений веса M . Проблема, однако, в том, что разные пути приводят, вообще говоря, к разным выражениям. В результате мы приходим к системе *условий совместности* для волновой функции. Чтобы доказать применимость анзаца Бете, необходимо проверить, что эти условия имеют совместное решение. Кроме того, остаются еще основные уравнения (6.9), которые необходимо проверить отдельно. Дифференцирования ∂_{x_i} при действии на экспоненту в (8.8) замещаются множителями v_i , и соответствующие условия совместности принимают вид (очень переопределенной) системы алгебраических уравнений на коэффициенты волновой функции Бете.

Всякому разложению $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N)$ веса M и длины $\ell(\mathbf{m}) = N$ соответствует расщепление последовательности импульсов v_i

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_M) = (\mathbf{w}_1^{\mathbf{m}}; \dots; \mathbf{w}_N^{\mathbf{m}}) \quad (9.1)$$

в серию сегментов $\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}}$ длины m_j таких, что

$$\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}} = (v_{m_1+\dots+m_{j-1}+1}, \dots, v_{m_1+\dots+m_j}), \quad j = 1, \dots, N, \quad (9.2)$$

или

$$(\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}})_i = v_{m_1+\dots+m_{j-1}+i}, \quad i = 1, \dots, m_j. \quad (9.3)$$

В вершине $\mathbf{m}$ исходные координаты $(x_1, \dots, x_M)$ после серии слияний преобразуются в последовательность групп длины m_i :

$$(x_1, \dots, x_M) \mapsto \mathbf{X}^{\mathbf{m}} = (\overbrace{x_1, \dots, x_1}^{m_1}, \overbrace{x_2, \dots, x_2}^{m_2}, \dots, \overbrace{x_N, \dots, x_N}^{m_N}), \quad (9.4)$$

где теперь $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$.

Пусть $\langle \mathbf{w} \rangle$ обозначает сумму компонент вектора $\mathbf{w}$, например $\langle \mathbf{v} \rangle = v_1 + \dots + v_M$. Пусть также

$$\mathbf{W}^{\mathbf{m}} = (\langle \mathbf{w}_1^{\mathbf{m}} \rangle, \dots, \langle \mathbf{w}_N^{\mathbf{m}} \rangle), \quad (9.5)$$

так что

$$\mathbf{W}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{w}_1^{\mathbf{m}} \rangle x_1 + \dots + \langle \mathbf{w}_N^{\mathbf{m}} \rangle x_N \quad (9.6)$$

и

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{X}^{\mathbf{m}} = \mathbf{W}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}. \quad (9.7)$$

ГИПОТЕЗА 2 (анзац Бете для произвольного $\mathbf{m}$). *Собственные функции Бете в подсекторе общего вида $\mathcal{F}_M^{\mathbf{m}}$ могут быть записаны в форме*

$$f_N \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_N \\ x_1 & \dots & x_N \end{pmatrix} = \mathfrak{P}(Q^{\mathbf{m}}(\mathbf{v}) \exp(\mathbf{W}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x})), \quad (9.8)$$

где $Q^{\mathbf{m}}(\mathbf{v})$ есть полином по $\mathbf{v}$. В частности, $Q^{(1\dots 1)}(\mathbf{v}) \equiv 1$.

Если $\mathfrak{P}: g \mapsto 0$ для некоторой функции $g(\mathbf{v})$, то мы будем говорить, что $g(\mathbf{v})$ является $\mathfrak{P}$ -приводимой и писать $g \stackrel{\mathfrak{P}}{\equiv} 0$. Если $g_1 - g_2 \stackrel{\mathfrak{P}}{\equiv} 0$, то будем говорить, что функции g_1 и g_2 являются $\mathfrak{P}$ -эквивалентными и писать $g_1 \stackrel{\mathfrak{P}}{\equiv} g_2$. Как следствие все величины под знаком $\mathfrak{P}$ определены только с точностью до $\mathfrak{P}$ -эквивалентности.

Рассмотрим основное уравнение (6.9). Поскольку вершина $\mathbf{m} = (1, \dots, 1)$, не имея предшественников, является истоком графа разложений (см. рис. 1), соответствующее основное уравнение (6.9) не содержит β -членов, и его решение, очевидно, дается анзацем (8.3) с собственным значением оператора $\mathbf{H}_2$, равным

$$\lambda = -v_1^2 - \dots - v_M^2 + M\gamma_1. \quad (9.9)$$

Пусть $K(\mathbf{w})$ обозначает сумму квадратов компонент вектора $\mathbf{w}$. Вспоминая, что $\gamma_1 = \gamma$, в силу (3.10) мы получаем выражение $\lambda = -K(\mathbf{v}) + M\gamma_1$ или, разбивая сумму на группы размера m_j , выражение

$$\lambda = \sum_{j=1}^N (m_j \gamma - K(\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}})). \quad (9.10)$$

Каждый оператор ∂_{x_j} в (6.9) заменяется на $\langle \mathbf{w}_j^{\mathbf{m}} \rangle$. Пронся член λ в правую часть, мы находим, что коэффициент перед $f_N(\boldsymbol{\xi})$ порождает множитель

$$\sum_{j=1}^N \tilde{K}(\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}}) + (m_j^3 - m_j)\gamma, \quad (9.11)$$

где мы используем обозначение

$$\tilde{K}(\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}}) = K(\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}}) - \frac{\langle \mathbf{w}_j^{\mathbf{m}} \rangle^2}{m_j} \quad (9.12)$$

для “кинетической энергии” кластера $\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}}$ относительно центра масс. Как проявление галилеевой инвариантности мы имеем инвариантность функции $\tilde{K}(\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}})$ относительно сдвигов $\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}} \mapsto \mathbf{w}_j^{\mathbf{m}} + (c, \dots, c)$.

После суммирования по разложениям $\mathbf{m}' \succ \mathbf{m}$, введенным в (6.10), основное уравнение (6.9) принимает окончательный вид

$$\left[\left(\sum_{j=1}^N \tilde{K}(\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}}) + (m_j^3 - m_j)\gamma \right) Q^{\mathbf{m}}(\mathbf{v}) + \sum_{\mathbf{m}' \succ \mathbf{m}} \beta_{n_1 n_2} Q^{\mathbf{m}'}(\mathbf{v}) \right] \exp(\mathbf{W}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}) \stackrel{\mathfrak{P}}{=} 0. \quad (9.13)$$

После дифференцирования экспоненты граничное условие (6.13) может быть переписано в терминах разложений $\mathbf{m}', \mathbf{m}'' \succ \mathbf{m}$, введенных в (6.12):

$$\begin{aligned} & [V_{m_k m_{k+1}}(\mathbf{w}_k^{\mathbf{m}}) \cdot Q^{\mathbf{m}'}(\mathbf{v}) + V_{m_{k+1} m_k}(\mathbf{w}_k^{\mathbf{m}}) \cdot Q^{\mathbf{m}''}(\mathbf{v}) + \\ & + 2m_k m_{k+1} \beta_{m_k, m_{k+1}} Q^{\mathbf{m}}(\mathbf{v})] \exp(\mathbf{W}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}) \stackrel{\mathfrak{P}}{=} 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Здесь

$$V_{n_1 n_2}(\mathbf{u}) = n_2(u_1 + \dots + u_{n_1}) - n_1(u_{n_1+1} + \dots + u_{n_1+n_2}) \quad (9.15)$$

для любого $(n_1 + n_2)$ -мерного вектора $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n_1+n_2})$

ГИПОТЕЗА 3 (свойство факторизации). *Полином $Q^{\mathbf{m}}(\mathbf{v})$ в (9.8) может быть выбран с точностью до $\mathfrak{P}$ -эквивалентного выражения в факторизованном виде*

$$Q^{\mathbf{m}}(\mathbf{v}) = \prod_{k=1}^N Q^{(m_k)}(\mathbf{w}_k^{\mathbf{m}}). \quad (9.16)$$

Обоснование вышеперечисленных гипотез содержится в приложении А.

10. АНЗАЦ БЕТЕ В СЕКТОРЕ $\mathcal{F}_M^{(M)}$

Согласно гипотезе 3 достаточно анализировать уравнения совместности только для разложений $\mathbf{m} = (M)$ единичной длины $N = 1$. В этом случае экспонента

$$\exp(\mathbf{W}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}) = \exp((v_1 + \dots + v_M)x_1)$$

становится полностью симметричной и может быть вынесена из-под знака $\mathfrak{P}$. Уравнения для $Q^{(M)}(\mathbf{v})$, таким образом, чисто полиномиальны.

Для основного уравнения (9.13) теперь имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{m}' &= (n_1, n_2), & n_1 + n_2 &= M, & \beta_{n_1 n_2} &= \sqrt{n_1 n_2 M} \beta, \\ \mathbf{w}_1^{\mathbf{m}'} &= (v_1, \dots, v_m), & \mathbf{w}_2^{\mathbf{m}'} &= (v_{m+1}, \dots, v_M),\end{aligned}$$

и уравнение принимает вид

$$\begin{aligned}(\tilde{K}(\mathbf{v}) + (M^3 - M)\gamma)Q^{(M)}(v_1, \dots, v_M) + \\ + \beta \sum_{\substack{n_1, n_2 \geq 1, \\ n_1 + n_2 = M}} \sqrt{n_1 n_2 M} Q^{(n_1)}(v_1, \dots, v_{n_1}) Q^{(n_2)}(v_{n_1+1}, \dots, v_M) \stackrel{\mathfrak{P}}{=} 0.\end{aligned}\quad (10.1)$$

Для граничного уравнения (9.14) введем разложения

$$\mathbf{m}' = (m_1, m_2), \quad \mathbf{m}'' = (m_2, m_1), \quad \mathbf{m} = (m_1 + m_2)$$

и положим $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{m_1+m_2})$. Уравнение тогда приобретает вид

$$\begin{aligned}V_{m_1 m_2}(\mathbf{v})Q^{(m_1)}(v_1, \dots, v_{m_1})Q^{(m_2)}(v_{m_1+1}, \dots, v_{m_1+m_2}) + \\ + V_{m_2 m_1}(\mathbf{v})Q^{(m_2)}(v_1, \dots, v_{m_2})Q^{(m_1)}(v_{m_2+1}, \dots, v_{m_1+m_2}) + \\ + 2m_1 m_2 \beta_{m_1 m_2} Q^{(m_1+m_2)}(v_1, \dots, v_{m_1+m_2}) \stackrel{\mathfrak{P}}{=} 0.\end{aligned}\quad (10.2)$$

Уравнения (10.1) и (10.2) вместе с $Q^{(1)}(v) = 1$ образуют полный набор условий на полиномы $Q^{(M)}(v_1, \dots, v_M)$, $M = 1, 2, \dots$, определенные с точностью до $\mathfrak{P}$ -эквивалентности. Многочисленные эксперименты на компьютере привели нас к следующему явному решению для уравнений (10.1) и (10.2).

ГИПОТЕЗА 4 (решение). Положим $Q^{(1)}(v) = 1$ и для $M \geq 2$ определим полином $Q^{(M)}(\mathbf{v})$ как однородный полином степени $M - 1$,

$$Q^{(M)}(\mathbf{v}) = \frac{2\sqrt{M}}{M!(M-1)} (2\beta)^{1-M} \sum_{1 \leq i < j \leq M} (-1)^{j-i} \binom{M-1}{j-i-1} (v_i - v_j)^{M-1}, \quad (10.3)$$

инвариантный относительно сдвигов $v_i \mapsto v_i + c$. Тогда такие $Q^{(M)}(\mathbf{v})$ удовлетворяют всем уравнениям (10.1) и (10.2).

Заметим, что $Q^{(M)}(\mathbf{v})$ не содержит явно констант связи β , γ , которые на самом деле спрятаны внутри оператора $\mathfrak{P}$. Гипотеза 4 была подтверждена для $M \leq 8$ средствами компьютерной алгебры. Следует отметить, что вместо проверки самбй гипотезы 4 мы проверяли более сильную гипотезу 5 (см. приложение Б).

11. ОБСУЖДЕНИЕ

В качестве проверки квантовой интегрируемости системы мы продемонстрировали непротиворечивость анзаца Бете для $M \leq 8$, что является довольно убедительным, хотя и не окончательным результатом. Строгое доказательство гипотезы 4 или перекрывающей ее гипотезы 5 остается открытой задачей. Введенные нами новые комбинаторные объекты, оператор $\mathfrak{P}$ и понятие 2- и 3-приводимости (см. приложение Б), возможно, представляют самостоятельный интерес.

Альтернативным способом установления квантовой интегрируемости мог бы стать алгебраический анзац Бете [12], основанный на квантовом операторе Лакса и R -матрице. Это помогло бы также идентифицировать квантовую алгебру, ответственную за интегрируемость нашей модели. Работа в этом направлении ведется.

За исключением случая $M = 2$, мы не занимались ни исчерпывающим изучением ортогональности и полноты системы собственных функций Бете, ни исследованием структуры связанных состояний. В случае квантового нелинейного уравнения Шредингера (бозе-газ с точечным взаимодействием) известно, что связанные состояния квантовой модели соответствуют в классическом пределе солитонам [16]. Было бы интересно проследить такое соответствие и для модели КП.

Изучаемая нами модель ассоциирована с кубическим полиномом P (7.7) с нулевой суммой корней, через который выражается двухчастичная S -матрица (7.6) и, в свою очередь, факторизованная многочастичная S -матрица. Возникает вопрос, какие квантово-полевые модели могли бы быть ассоциированы с полиномами P высших степеней, с ограничением на корни или без такового. В работе [17] свойства уравнений Бете, ассоциированных с полиномом P общего вида, изучались абстрактным образом, без выяснения природы соответствующей квантово-полевой модели. В недавней работе [18] предложен возможный пример модели из этого класса.

Наша модель является нерелятивистской и галилеево-инвариантной. Заметим, что она соответствует нерелятивистскому пределу релятивистской интегрируемой модели, известной как аффинная A_{N-1} квантово-полевая теория Тоды [19], [20], которая задается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \partial_\mu \varphi_i \cdot \partial^\mu \varphi_i - \frac{2M^2}{\beta^2} \sum_{i=1}^N \exp \left[\frac{\beta}{\sqrt{2}} (\varphi_i - \varphi_{i+1}) \right]. \quad (11.1)$$

Действительно, S -матрица для пары основных частиц теории поля Тоды, как показано в работе [19], дается формулой

$$S_{11}(\theta) = \frac{\text{sh}(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi}{N}) \text{sh}(\frac{\theta}{2} - \frac{i\pi}{N} + \frac{ib}{2}) \text{sh}(\frac{\theta}{2} - \frac{ib}{2})}{\text{sh}(\frac{\theta}{2} - \frac{i\pi}{N}) \text{sh}(\frac{\theta}{2} + \frac{i\pi}{N} - \frac{ib}{2}) \text{sh}(\frac{\theta}{2} + \frac{ib}{2})}. \quad (11.2)$$

После замены переменных

$$\theta = \frac{2\kappa^{-1}\pi u}{N}, \quad b = \frac{2\kappa^{-1}\tau\pi}{N} \quad (11.3)$$

и перехода к пределу $N \rightarrow +\infty$ получаем

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{11}(\theta) = \tilde{S}_{11}(u) = \frac{u^3 + u(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau) - i\kappa\tau(\kappa - \tau)}{u^3 + u(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau) + i\kappa\tau(\kappa - \tau)}. \quad (11.4)$$

Таким образом, выбирая τ и κ в виде $\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau = -12\gamma$ и $\kappa\tau(\kappa - \tau) = 4\beta^2$, мы приходим к скалярной S -матрице квантового уравнения КП или, точнее, уравнения КП-II, поскольку $0 < b < 2\pi/N$:

$$\tilde{S}_{11}(u) = S_{\text{qKP}}(u) = \frac{u^3 - 12\gamma u - 4i\beta^2}{u^3 - 12\gamma u + 4i\beta^2}. \quad (11.5)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В приложениях мы будем использовать несокращенные обозначения $\mathbb{P}_{[a,b]}$ (8.6) и $\mathfrak{P}_{[a,b]}$ (8.7) для объектов, ассоциированных с сегментом $(a, \dots, b) \subset (1, \dots, M)$. Сначала установим несколько элементарных свойств оператора $\mathfrak{P}_{[a,b]}$. Ниже предполагается, что $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_M)$.

ЛЕММА 1. *Если функция $F(\mathbf{v})$ $\mathfrak{P}_{[a,b]}$ -приводима, а функция $G(\mathbf{v})$ симметрична относительно перестановок $\mathfrak{S}_{[a,b]} \subset \mathfrak{S}_{[1,M]}$, то произведение $F(\mathbf{v})G(\mathbf{v})$ тоже $\mathfrak{P}_{[a,b]}$ -приводимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $G(\mathbf{v})$ инвариантна относительно $\mathfrak{S}_{[a,b]}$, ее можно вынести из-под знака суммы по $\mathfrak{S}_{[a,b]}$ в (8.7).

ЛЕММА 2. *Если функция $F(\mathbf{v})$ $\mathfrak{P}_{[a,b]}$ -приводима, то $F(\mathbf{v})$ также $\mathfrak{P}_{[1,M]}$ -приводима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведение $\mathbb{P}_{[1,M]}$ факторизуется как $\mathbb{P}_{[1,M]} = \mathbb{P}_{[a,b]} \cdot \tilde{\mathbb{P}}$, где дополнительный множитель $\tilde{\mathbb{P}}$ $\mathfrak{S}_{[a,b]}$ -симметричен, следовательно, произведение $F(\mathbf{v})\tilde{\mathbb{P}}$ $\mathfrak{P}_{[a,b]}$ -приводимо в силу леммы 1.

Сумма по группе $\mathfrak{S}_{[1,M]}$ может быть переписана как двойная сумма: сначала по подгруппе $\mathfrak{S}_{[a,b]} \subset \mathfrak{S}_{[1,M]}$, потом по классу смежности $\mathfrak{S}_{[1,M]}/\mathfrak{S}_{[a,b]}$. Сумма с чередующимися знаками по $\mathfrak{S}_{[a,b]}$ с весом $\mathbb{P}_{[a,b]}$ тогда аннулирует $F(\mathbf{v})\tilde{\mathbb{P}}$.

Теперь мы можем оправдать гипотезу 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть последовательность полиномов $Q^{(m)}(v_1, \dots, v_m)$ при $m = 1, 2, \dots$ дает решения уравнений (10.1) и (10.2). Тогда полиномы $Q^{\mathbf{m}}(\mathbf{v})$, заданные в (9.16), являются решениями уравнений (9.13) и (9.14).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данного $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{k-1}, m_k, m_{k+1}, \dots, m_N)$ разобьем последовательность $(1, \dots, M)$ на цепочку подсегментов $(a_i, \dots, b_i)$ длины m_i или, явным образом,

$$a_i = m_1 + \dots + m_{i-1} + 1, \quad b_i = m_1 + \dots + m_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{A.1})$$

Используя факторизацию полинома $Q^{\mathbf{m}}$, можно переписать приведенную ниже сумму в виде

$$\begin{aligned} & \left[\left(\sum_{j=1}^N \tilde{K}(\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}}) + (m_j^3 - m_j)\gamma \right) Q^{\mathbf{m}}(\mathbf{v}) + \sum_{\mathbf{m}': \mathbf{m}' \succ \mathbf{m}} \beta_{n_1 n_2} Q^{\mathbf{m}'}(\mathbf{v}) \right] e^{\mathbf{W}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}} = \\ & = \sum_{j=1}^N \left\{ [\tilde{K}(\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}}) + (m_j^3 - m_j)\gamma] Q^{(m_j)}(\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}}) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n_1 + n_2 = m_j} \beta_{n_1 n_2} Q^{(n_1)}(w_{j,1}^{\mathbf{m}}, \dots, w_{j,n_1}^{\mathbf{m}}) Q^{(n_2)}(w_{j,n_1+1}^{\mathbf{m}}, \dots, w_{j,m_j}^{\mathbf{m}}) \right\} \times \\ & \quad \times e^{\mathbf{W}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}} \prod_{\substack{a=1, \\ a \neq j}}^N Q^{(m_j)}(\mathbf{w}_a^{\mathbf{m}}). \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\mathbf{W}^{\mathbf{m}}$ определены в (9.5), а векторы $\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}}$, введенные в (9.2), имеют компоненты

$$\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}} = (w_{j,1}^{\mathbf{m}}, \dots, w_{j,m_j}^{\mathbf{m}}).$$

Произведение в правой части равенства (A.2), вынесенное за скобки, симметрично относительно перестановок координат $\mathbf{w}_j^{\mathbf{m}}$ под действием группы $\mathfrak{S}_{[a_j, b_j]}$. Функции внутри скобок $\mathfrak{P}_{[a_j, b_j]}$ -приводимы по построению. Таким образом, полиномы $Q^{\mathbf{m}}(\mathbf{v})$, определенные формулой (9.16), являются решениями основного уравнения (9.13) в силу леммы 1.

Остается разобраться с граничными условиями. Введем вспомогательные разложения $\mathbf{m}' \succ \mathbf{m}$, $\mathbf{m}'' \succ \mathbf{m}$

$$\begin{aligned}\mathbf{m}' &= (m_1, \dots, m_{k-1}, n_1, n_2, m_{k+1}, \dots, m_N), \\ \mathbf{m}'' &= (m_1, \dots, m_{k-1}, n_2, n_1, m_{k+2}, \dots, m_N),\end{aligned}$$

где $n_1 + n_2 = m_k$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}& [V_{n_1 n_2}(\mathbf{w}_k^{\mathbf{m}}) \cdot Q^{\mathbf{m}'}(\mathbf{v}) + V_{n_2 n_1}(\mathbf{w}_k^{\mathbf{m}}) \cdot Q^{\mathbf{m}''}(\mathbf{v}) + 2n_1 n_2 \beta_{n_1, n_2} Q^{\mathbf{m}}(\mathbf{v})] \cdot e^{\mathbf{W}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}} = \\ &= [2n_1 n_2 \beta_{n_1, n_2} Q^{(m_k)}(\mathbf{w}_k^{\mathbf{m}}) + \\ &+ V_{n_1 n_2}(\mathbf{w}_k^{\mathbf{m}}) \cdot Q^{(n_1)}(w_{k,1}^{\mathbf{m}}, \dots, w_{k,n_1}^{\mathbf{m}}) Q^{(n_2)}(w_{k,n_1+1}^{\mathbf{m}}, \dots, w_{k,m_k}^{\mathbf{m}}) + \\ &+ V_{n_2 n_1}(\mathbf{w}_k^{\mathbf{m}}) \cdot Q^{(n_2)}(w_{k,1}^{\mathbf{m}}, \dots, w_{k,n_2}^{\mathbf{m}}) Q^{(n_1)}(w_{k,n_2+1}^{\mathbf{m}}, \dots, w_{k,m_k}^{\mathbf{m}})] \times \\ &\quad \times e^{\mathbf{W}^{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}} \prod_{\substack{a=1, \\ a \neq k}}^N Q^{(m_j)}(\mathbf{w}_a^{\mathbf{m}}).\end{aligned}$$

Произведение за скобками снова симметрично относительно перестановок координат $\mathbf{w}_k^{\mathbf{m}}$ под действием $\mathfrak{S}_{[a_j, b_j]}$. Функции внутри скобок $\mathfrak{P}_{[a_j, b_j]}$ -приводимы по построению. В результате полиномы $Q^{\mathbf{m}}(\mathbf{v})$, определенные формулой (9.16), удовлетворяют граничному условию (9.14) в силу леммы 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Прямая проверка $\mathfrak{P}$ -эквивалентности полиномов затруднительна даже с помощью компьютера, поскольку она содержит суммирование по $M!$ перестановкам, которое приводит к экспоненциальному росту сложности вычислений по мере роста M . При проверке гипотезы 4 на самом деле использовались более сильные условия, которые мы называем 2- и 3-приводимостью. Эти условия обладают тем преимуществом, что их вычислительная сложность полиномиальна.

Пусть $P(v)$ задается формулой (7.8) и $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_M)$. Введем обозначения $v_{ij} = v_i - v_j$ и $P_{ij} = P(v_i - v_j)$. Предполагая $M \geq 2$, мы будем называть полином $F(\mathbf{v})$ 2-приводимым и писать $F \stackrel{2}{=} 0$, если $F(\mathbf{v})$ допускает разложение

$$F(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{M-1} P_{i,i+1} G_i(\mathbf{v}), \quad (\text{Б.1})$$

где полином $G_i(\mathbf{v})$ симметричен относительно перестановки $v_i \leftrightarrow v_{i+1}$ для каждого i . Отметим, что такое разложение не обязательно единственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если полином F 2-приводим, то он также $\mathfrak{P}_{[1,M]}$ -приводим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $P_{i,i+1}$ является $\mathfrak{P}_{[i,i+1]}$ -приводимым, поскольку полином $P_{i,i+1}\mathbb{P}_{[i,i+1]} = P_{i,i+1}P_{i+1,i}$ является $\mathfrak{S}_{[i,i+1]}$ -симметричным, а следовательно, аннулируется при антисимметризации. Тогда i -й член в выражении (Б.1) является $\mathfrak{P}_{[i,i+1]}$ -приводимым в силу леммы 1, а следовательно, и $\mathfrak{P}_{[1,M]}$ -приводимым по лемме 2.

Свойство 2-приводимости не всегда оказывается достаточным для того, чтобы доказать $\mathfrak{P}$ -приводимость, поэтому мы также будем использовать понятие 3-приводимости, определенное ниже.

ЛЕММА 3. Полином $v_{12} - v_{23} = v_1 - 2v_2 + v_3$ является $\mathfrak{P}_{[1,3]}$ -приводимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что P_{12} $\mathfrak{P}_{[1,2]}$ -приводим и P_{23} $\mathfrak{P}_{[2,3]}$ -приводим, как было отмечено в доказательстве предложения 2. По лемме 2 полиномы P_{12} , P_{23} , а следовательно, и $P_{12} - P_{23}$ являются $\mathfrak{P}_{[1,3]}$ -приводимыми. Заметим теперь, что разность

$$P_{12} - P_{23} = v_{12}^3 - v_{23}^3 + 12\gamma(v_{12} - v_{23})$$

может быть представлена как произведение $v_{12} - v_{23}$ и квадратичного полинома J , который $\mathfrak{S}_{[1,3]}$ -симметричен:

$$\begin{aligned} P_{12} - P_{23} &= (v_{12} - v_{23})J, \\ J &= v_{12}^2 + v_{12}v_{23} + v_{23}^2 + 12\gamma = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - v_1v_2 - v_1v_3 - v_2v_3 + 12\gamma. \end{aligned}$$

Из симметрии полинома J следует, что

$$0 = \mathfrak{P}_{[1,3]}(P_{12} - P_{23}) = \mathfrak{P}_{[1,3]}((v_{12} - v_{23})J) = J \mathfrak{P}_{[1,3]}(v_{12} - v_{23})$$

и, таким образом, $\mathfrak{P}_{[1,3]}(v_{12} - v_{23}) = 0$, поскольку $J \neq 0$.

По лемме 2 отсюда немедленно следует, что $v_{i,i+1} - v_{i+1,i+2}$ является $\mathfrak{P}_{[1,M]}$ -приводимым для всех M и $i = 1, \dots, M - 2$.

Замечательным образом, условие, что отношение

$$J = \frac{P_{12} - P_{23}}{v_{12} - v_{23}}$$

есть $\mathfrak{S}_{[1,3]}$ -симметричный полином, однозначно фиксирует полином $P(v)$ в классе кубических полиномов с нулевым коэффициентом при v^2 . Для доказательства достаточно использовать однородность и, проверив мономы v^p , убедиться, что решение существует только для $p \in \{0, 1, 3\}$.

Предполагая, что $M \geq 3$, мы будем называть полином $F(\mathbf{v})$ 3-приводимым и писать $F \stackrel{3}{=} 0$, если $F(\mathbf{v})$ допускает разложение

$$F(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{M-2} (v_{i,i+1} - v_{i+1,i+2})J_i(\mathbf{v}) \quad (\text{Б.2})$$

с некими $\mathfrak{S}_{[i,i+2]}$ -симметричными полиномами $J_i(\mathbf{v})$. Заметим, что такое разложение не обязательно единственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если полином F 3-приводим, то он также $\mathfrak{P}_{[1,M]}$ -приводим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для i -го члена в (Б.2) имеем

$$\mathfrak{P}_{[i,i+2]}((v_{i,i+1} - v_{i+1,i+2})J_i(\mathbf{v})) = J_i(\mathbf{v})\mathfrak{P}_{[i,i+2]}(v_{i,i+1} - v_{i+1,i+2}) = 0,$$

используя сначала симметрию J_i , а затем лемму 3. По лемме 2 каждый член этого выражения $\mathfrak{P}_{[1,M]}$ -приводим.

Следующая гипотеза перекрывает гипотезу 4. Она была проверена средствами компьютерной алгебры для $M \leq 8$.

ГИПОТЕЗА 5. Для полиномов $Q^{(M)}(\mathbf{v})$, заданных формулами (10.3), левая часть граничного условия (10.2) на самом деле 3-приводима, откуда в силу предложения 3 следует ее $\mathfrak{P}_{[1,M]}$ -приводимость. Левая часть основного уравнения (10.1) есть сумма 2-приводимой и 3-приводимой частей, откуда в силу предложений 2 и 3, следует ее $\mathfrak{P}_{[1,M]}$ -приводимость.

Благодарности. Мы признательны Бенуа Виседо за ценные обсуждения в начальной стадии проекта.

Список литературы

- [1] B. G. Konopelchenko, *Introduction to Multidimensional Integrable Equations: The Inverse Spectral Transform in 2 + 1 Dimensions*, Springer, New York, 1992.
- [2] S. V. Manakov, P. M. Santini, “On the solutions of the dKP equation: the nonlinear Riemann–Hilbert problem, longtime behaviour, implicit solutions and wave breaking”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:5 (2008), 055204, 23 pp.
- [3] V. G. Кас, А. К. Raina, *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, Advanced Series in Mathematical Physics, **2**, World Sci., Singapore, 1987.
- [4] T. D. Lee, “Some special examples in renormalizable field theory”, *Phys. Rev. (2)*, **95**:5 (1954), 1329–1334.
- [5] P. P. Kulish, “Quantum nonlinear wave interaction system”, *Physica D: Nonlin. Phen.*, **18**:1–3 (1986), 360–364.
- [6] E. K. Sklyanin, “Quantization of the continuous Heisenberg ferromagnet”, *Lett. Math. Phys.*, **15**:4 (1988), 357–368.
- [7] E. K. Sklyanin, “Quantum version of the method of inverse scattering problem”, *J. Soviet Math.*, **19**:5 (1982), 1546–1596.
- [8] K. M. Case, “‘Polynomial constants’ for the quantized NLS equation”, *J. Math. Phys.*, **25**:7 (1984), 2306–2314.
- [9] B. Davies, V. Korepin, *Higher conservation laws for the quantum non-linear Schrödinger equation*, arXiv: 1109.6604.
- [10] E. Gutkin, “Conservation laws for the nonlinear Schrödinger equation”, *Ann. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **2**:1 (1985), 67–74.
- [11] R. P. Stanley, S. Fomin, *Enumerative Combinatorics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **62**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [12] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [13] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Мир, М., 1987.

- [14] E. H. Lieb, W. Liniger, “Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state”, *Phys. Rev. (2)*, **130**:4 (1963), 1605–1616.
- [15] Ф. А. Березин, Г. П. Похил, В. М. Финкельберг, “Уравнение Шрёдингера для системы одномерных частиц с точечным взаимодействием”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1964, № 1, 21–28.
- [16] П. П. Кулиш, С. В. Манаков, Л. Д. Фаддеев, “Сравнение точных квантовых и квазиклассических ответов для нелинейного уравнения Шрёдингера”, *ТМФ*, **28**:1 (1976), 38–45.
- [17] K. K. Kozłowski, E. K. Sklyanin, “Combinatorics of generalized Bethe equations”, *Lett. Math. Phys.*, **103**:10 (2013), 1047–1077, arXiv: 1205.2968.
- [18] A. V. Litvinov, “On spectrum of ILW hierarchy in conformal field theory”, *JHEP*, **11** (2013), 155, 13 pp., arXiv: 1307.8094.
- [19] A. E. Arinshtein, V. A. Fateyev, A. B. Zamolodchikov, “Quantum S -matrix of the $(1+1)$ -dimensional Toda chain”, *Phys. Lett. B*, **87**:4 (1979), 389–392.
- [20] H. Braden, E. Corrigan, P. E. Dorey, R. Sasaki, “Affine Toda field theory and exact S -matrices”, *Nucl. Phys. B*, **338**:3 (1990), 689–746.