Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пупышев, Двумерное ядерно-кулоновское рассеяние медленной квантовой частицы, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 2, 225–255

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:09:12

© 2017 г.

В. В. Пупышев*

ДВУМЕРНОЕ ЯДЕРНО-КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ МЕДЛЕННОЙ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ

Исследуется двумерное рассеяние квантовой частицы суперпозицией кулоновского и центрального короткодействующего потенциалов. Дан анализ низкоэнергетических асимптотик всех радиальных волновых функций, парциальных фаз и сечений рассеяния такой частицы. Предложены два способа вычисления длины рассеяния и эффективного радиуса.

Ключевые слова: двумерное рассеяние, суперпозиция центрального короткодействующего и кулоновского потенциалов, низкоэнергетические асимптотики, длина рассеяния, эффективный радиус.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9270>

1. ВВЕДЕНИЕ

Объект нашего исследования – упругое рассеяние квантовой частицы p_1 в двумерной плоскости $\mathcal{P}$ неподвижным силовым центром O , лежащим в той же плоскости и воздействующим на эту частицу посредством суперпозиции $V^c + V^s$ кулоновского потенциала V^c и центрального короткодействующего потенциала V^s . Следуя терминологии, принятой в ядерной физике, такое рассеяние назовем двумерным ядерно-кулоновским рассеянием.

Двумерное ядерно-кулоновское рассеяние и его низкоэнергетические параметры, длина рассеяния и эффективный радиус, исследовались только в работе [1] и лишь в частном случае, названном “s-волновым”. Даже этот частный случай не упоминается в современной монографии по теории рассеяния [2]. Поэтому исчерпывающий анализ двумерного ядерно-кулоновского рассеяния представляется актуальным и необходимым для расширения теории двумерного рассеяния.

Выполним такой анализ. В разделе 2 мы формулируем и обсуждаем исходную задачу Шредингера для радиальной волновой функции квантовой частицы. В разделе 3 мы сводим эту задачу к цепочке рекуррентных и энергонезависимых дифференциальных уравнений первого порядка с простыми начальными условиями. Эти цепочки исследуются в разделе 4 и используются в разделе 5 для вывода низкоэнергетических асимптотик функции эффективного радиуса, радиальных волновых функций, парциальных фаз и сечений рассеяния квантовой частицы. Итоги выполненных исследований подведены в заключении.

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

2. ИСХОДНАЯ РАДИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ШРЕДИНГЕРА

Начнем с определений параметров, аргументов и потенциалов.

В плоскости $\mathcal{P}$ введем стандартным образом полярную систему координат с начальной точкой, совпадающей с силовым центром O . Положение квантовой частицы p_1 в плоскости $\mathcal{P}$ зададим ее полярными координатами $\mathbf{r} = (r, \varphi)$. Символами m_1 , z_1 , E и $\mathbf{k}$ обозначим массу, кулоновский заряд, полную энергию и волновой вектор этой частицы. Считаем, что волновой вектор $\mathbf{k}_0$ ее начального состояния имеет нулевой азимутальный угол, а силовой центр O обладает кулоновским зарядом Z . По определению заряды z_1 и Z кратны заряду электрона. Пусть $\hbar$ – постоянная Планка. Положим

$$k = |\mathbf{k}| \equiv \sqrt{\frac{2m_1 E}{\hbar^2}}, \quad R \equiv \frac{\hbar^2}{2m_1 z_1 Z}, \quad q \equiv k|R|,$$

$$\alpha \equiv \operatorname{sgn} R, \quad \eta \equiv \frac{1}{2kR} = \frac{\alpha}{2q}, \quad \rho \equiv kr = q \frac{r}{|R|}, \quad v \equiv \sqrt{8\rho|\eta|}.$$

Здесь и далее q – безразмерное волновое число частицы p_1 , η – параметр Зоммерфельда, а ρ и v – безразмерные неотрицательные переменные.

Кулоновский потенциал определим равенством $V^c(r) = z_1 Z/r$. Придется различать два случая: кулоновского отталкивания ($\alpha = 1$) и кулоновского притяжения ($\alpha = -1$). Для краткости записи используем символ Кронекера $\delta_{i,\alpha}$ и формулы с верхними и нижними знаками плюс и (или) минус. В таких формулах все верхние знаки берутся в случае $\alpha = 1$, а все нижние – в случае $\alpha = -1$. Например, формула

$$A^\pm = a^\pm + \left\{ \begin{matrix} b \\ c \end{matrix} \right\}$$

означает, что $A^+ = a^+ + b$, если $\alpha = 1$, и $A^- = a^- + c$, если $\alpha = -1$.

Считаем, что центральный короткодействующий потенциал $V^s(r)$ зависит только от переменной r , принадлежит классу $C_{(0,\infty]}^0$ функций, непрерывных в области $r > 0$, и при любом показателе $\beta > 2$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 |V^s(r)| = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^\beta |V^s(r)| (\delta_{1,\alpha} e^{4\sqrt{r/|R|}} + \delta_{-1,\alpha}) = 0, \quad \alpha = \pm 1.$$

Поэтому безразмерный потенциал V , определенный формулами

$$V(v) \equiv \frac{2m_1 R^2}{\hbar^2} V^s(r) \Big|_{r=x|R|}, \quad x = 2\rho|\eta| = \frac{v^2}{4}, \quad r = \frac{v^2|R|}{4},$$

подчиняется условиям

$$\lim_{v \rightarrow 0} v^4 |V(v)| = 0, \quad V(v) \in C_{(0,\infty]}^0 \quad (1)$$

и при любом $\beta > 2$ удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v^{2\beta} |V(v)| (\delta_{1,\alpha} e^{2v} + \delta_{-1,\alpha}) = 0, \quad \alpha = \pm 1. \quad (2)$$

В некоторых случаях ограничения на допустимое поведение потенциалов $V^s(r)$ и $V(v)$ при больших значениях аргументов можно ослабить. Все такие случаи мы укажем. Причину зависимости условия (2) от α мы объясним в конце п. 4.1.

Перейдем к формулировке радиальной задачи Шредингера в случае суммарного потенциала $V^c(r) + V^s(r)$, не зависящего от угла φ . Как известно из теории двумерного рассеяния [2], [3], в этом случае двумерная задача Шредингера для волновой функции частицы p_1 допускает разделение переменных r и φ и сводится к бесконечной, но счетной ($2\lambda = -1, 1, 3, \dots$) совокупности радиальных краевых задач Шредингера. В кулоновских переменных ρ и η каждая из таких задач представляет собой одномерное уравнение Шредингера

$$\left[\partial_\rho^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\rho^2} + 1 - \frac{2\eta}{\rho} - 4\eta^2 V(\sqrt{8\rho|\eta|}) \right] u_\lambda(\rho, \eta) = 0, \quad \rho > 0, \quad -\infty < \eta < \infty, \quad (3)$$

с условием

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u_\lambda(\rho, \eta)}{F_\lambda(\rho, \eta)} = N(\eta) \quad (4)$$

и условием

$$u_\lambda(\rho, \eta) = \sin \left[\rho - \eta \ln 2\rho - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_\lambda^c(\eta) + \delta_\lambda(\eta) \right] + O(\rho^{-1}), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (5)$$

В этих условиях F_λ и δ_λ^c – известные регулярная функция Кулона и кулоновская фаза [4]–[6], а нормировочный множитель N и фаза δ_λ рассеяния потенциалом V в кулоновском поле $2\eta/\rho$ являются искомыми. Непрерывное в области $0 \leq \rho < \infty$ решение u_λ задачи (3)–(5) называется регулярной радиальной волновой функцией частицы p_1 в состоянии рассеяния $|q, \lambda\rangle$ с квантовыми числами q и λ .

Радиальная краевая задача Шредингера (3)–(5) является исходной для наших исследований. Для полноты ее постановки следует пояснить строение сечения $\sigma_\lambda^{cs}(\eta)$ рассеяния частицы p_1 в состоянии $|q, \lambda\rangle$. Такое сечение определяется известными формулами [3]

$$\sigma_\lambda^{cs}(\eta) = 8R\eta\varepsilon_\lambda \sin^2[\delta_\lambda^c(\eta) + \delta_\lambda(\eta)], \quad \varepsilon_\lambda \equiv 2 - \delta_{-1,2\lambda},$$

и в силу тождества

$$\sin^2(\delta_\lambda^c + \delta_\lambda) \equiv \sin^2 \delta_\lambda^c + \sin^2 \delta_\lambda + 2 \sin \delta_\lambda^c \sin \delta_\lambda \cos(\delta_\lambda^c + \delta_\lambda)$$

является суммой слагаемых

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda^c(\eta) &\equiv 8R\eta\varepsilon_\lambda \sin^2 \delta_\lambda^c(\eta), \\ \sigma_\lambda^{\text{int}}(\eta) &\equiv 16R\eta\varepsilon_\lambda \sin \delta_\lambda^c(\eta) \sin \delta_\lambda(\eta) \cos[\delta_\lambda^c(\eta) + \delta_\lambda(\eta)] \end{aligned} \quad (6)$$

и слагаемого

$$\sigma_\lambda(\eta) \equiv 8R\eta\varepsilon_\lambda \sin^2 \delta_\lambda(\eta) = \frac{\sigma_\lambda^u(\eta)}{\text{ctg}^2 \delta_\lambda(\eta) + 1}, \quad \text{где} \quad \sigma_\lambda^u(\eta) \equiv 8R\eta\varepsilon_\lambda. \quad (7)$$

Слагаемое σ_λ^c – сечение рассеяния одним кулоновским потенциалом. Слагаемое $\sigma_\lambda^{\text{int}}$ описывает вклад от интерференции рассеяния кулоновским потенциалом и потенциалом V . Слагаемое σ_λ – сечение рассеяния этим потенциалом в кулоновском поле. При любом η такое сечение не превышает своего унитарного предела σ_λ^u . Как и в ядерной физике, функции $\delta_\lambda(\eta)$ и $\sigma_\lambda(\eta)$ мы называем парциальными ядерно-кулоновскими фазой и сечением.

Обсудим задачу Шредингера (3)–(5). Для этого сначала напомним определение предела низких энергий. Пределом низких энергий называется предел $q \rightarrow +0$ при фиксированных значениях кулоновского параметра R и квантового числа λ . В этом пределе $|\eta| \rightarrow \infty$. В случае потенциала $V(v) \equiv 0$, где $v = \sqrt{8\rho|\eta|}$, уравнению (3) удовлетворяют линейно независимые волновые функции Кулона $F_\lambda(\rho, \eta)$ и $G_\lambda(\rho, \eta)$ полуцелого порядка $\lambda = -1/2, 1/2, 3/2, \dots$, детально исследованные в работах [4]–[6]. Как доказано в работе [7], при любых допустимых значениях λ и η и при условиях

$$\lim_{v \rightarrow 0} v^4 V(v) = 0, \quad V(v) \in C_{(0, \infty)}^0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} v^4 V(v) = 0 \quad (8)$$

задача (3)–(5) имеет единственное, причем непрерывное в области $0 \leq \rho < \infty$, решение u_λ . Короткодействующий потенциал V по определению удовлетворяет условиям (1) и (2), а значит, и условиям (8). Вывод низкоэнергетических (при $q \rightarrow 0$, $|\eta| \rightarrow \infty$) приближений функций $\delta_\lambda(\eta)$, $\sigma_\lambda(\eta)$, $N(\eta)$ и $u_\lambda(\rho, \eta)$ в рамках задачи (3)–(5) представляет собой довольно сложную проблему. Для ее наиболее простого решения в разделах 3 и 4 предлагается специальный метод, асимптотический в пределе $q \rightarrow 0$. Первый этап этого метода заключается в переформулировке задачи (3)–(5) и реализуется в следующем разделе.

3. РЕДУКЦИЯ РАДИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ШРЕДИНГЕРА

В настоящем разделе проводится редукция радиальной задачи Шредингера (3)–(5) к системам линейных дифференциальных уравнений первого порядка, наиболее удобных для вывода и анализа низкоэнергетических асимптотик фазы δ_λ , сечения σ_λ и волновой функции u_λ . Такая редукция реализуется в три этапа. Каждому из них посвящен отдельный пункт.

3.1. Амплитудные функции. Кратко изложим и обсудим метод амплитудных функций, предложенный в работе [7]. В этой работе в отличие от настоящей использовался потенциал $V(x)$, где $x \equiv v^2/4 = 2\rho|\eta|$.

В методе амплитудных функций кулоновские функции F_λ и G_λ считаются известными, а амплитудные функции c и s – искомыми. Решение u_λ задачи Шредингера (3)–(5) представляется как

$$u_\lambda(\rho, \eta) = N(\eta)U(\rho, \eta), \quad U(\rho, \eta) \equiv c(\rho, \eta)F_\lambda(\rho, \eta) + s(\rho, \eta)G_\lambda(\rho, \eta). \quad (9)$$

Подстановкой (9) уравнение Шредингера (3) с начальным условием (4) сводится к задаче Коши для амплитудных функций c и s на полуоси $\rho \geq 0$, а именно к недиагональной системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \partial_\rho c(\rho, \eta) &= 4\eta^2 V(\sqrt{8\rho|\eta|}) [c(\rho, \eta)F_\lambda(\rho, \eta) + s(\rho, \eta)G_\lambda(\rho, \eta)]G_\lambda(\rho, \eta), \\ \partial_\rho s(\rho, \eta) &= -4\eta^2 V(\sqrt{8\rho|\eta|}) [c(\rho, \eta)F_\lambda(\rho, \eta) + s(\rho, \eta)G_\lambda(\rho, \eta)]F_\lambda(\rho, \eta) \end{aligned} \quad (10)$$

с начальными условиями

$$c(\rho, \eta)|_{\rho=0} = 1, \quad s(\rho, \eta)|_{\rho=0} = 0. \quad (11)$$

В работе [7] доказано следующее утверждение, справедливое и в рассматриваемом случае короткодействующего потенциала V .

ТЕОРЕМА 1. Если потенциал $V(v)$, $v = \sqrt{8\rho|\eta|}$, удовлетворяет условиям (8), то при любом $\lambda \geq -1/2$ и любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ задача Коши (10), (11) однозначно разрешима в классе функций, непрерывных на всей полусоси $\rho \geq 0$, а компоненты решения $\{c, s\}$ этой задачи не имеют общих нулей.

Как показано в той же работе [7], в силу теоремы 1 представления множителя N , фазы δ_λ и сечения σ_λ через амплитудные функции c и s являются однозначными и непрерывными. Приведем такие представления: множитель N определяется формулами

$$N(\eta) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} N(\rho, \eta), \quad N(\rho, \eta) \equiv [c^2(\rho, \eta) + s^2(\rho, \eta)]^{-1/2}, \quad (12)$$

тангенс фазы рассеяния δ_λ – формулами

$$\operatorname{tg} \delta_\lambda(\eta) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \delta_\lambda(\rho, \eta), \quad \operatorname{tg} \delta_\lambda(\rho, \eta) \equiv \frac{s(\rho, \eta)}{c(\rho, \eta)}, \quad (13)$$

а сечение (7) вычисляется как

$$\sigma_\lambda(\eta) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sigma_\lambda(\rho, \eta), \quad \sigma_\lambda(\rho, \eta) \equiv \sigma_\lambda^u(\eta) [s(\rho, \eta) N(\rho, \eta)]^2. \quad (14)$$

В представленном выше методе амплитудных функций [7] для полного решения краевой задачи Шредингера (3)–(5) необходимо сначала найти решение $\{c, s\}$ задачи Коши (10), (11), затем определить множитель N , фазу δ_λ и сечение σ_λ по формулам (12)–(14) и, наконец, вычислить радиальную волновую функцию u_λ по формулам (9).

Выявим причины, которые существенно затрудняют численный анализ задачи Коши (10), (11) и последующее вычисление функций δ_λ , σ_λ и u_λ в пределе низких энергий $q \rightarrow 0$, $|\eta| \rightarrow \infty$.

При малых значениях аргумента $\rho \rightarrow 0$ функции Кулона имеют асимптотики [4]

$$F_\lambda(\rho, \eta) \sim C_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1}, \quad G_\lambda(\rho, \eta) \sim \frac{1}{C_\lambda(\eta) \rho^\lambda} \begin{cases} -\ln \rho, & 2\lambda = -1, \\ (2\lambda + 1)^{-1}, & 2\lambda > -1, \end{cases} \quad (15)$$

в которых неаналитическая функция $C_\lambda(\eta)$ определяется формулой

$$C_\lambda(\eta) \equiv 2^\lambda \frac{|\Gamma(\lambda + 1 + i\eta)|}{\Gamma(2\lambda + 2)} e^{-\pi\eta/2}. \quad (16)$$

Поэтому квадрат этой функции имеет асимптотику

$$C_\lambda^2(\pm|\eta|) \sim \frac{\pi}{(\nu!)^2} q^{-\nu} \begin{Bmatrix} e^{-\pi/q} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \nu = 2\lambda + 1, \quad \frac{q}{|\lambda|} \rightarrow 0. \quad (17)$$

Следовательно, при $q \rightarrow 0$ в случае кулоновского отталкивания ($\alpha \equiv \operatorname{sgn} \eta = 1$) функция C_λ быстро убывает, а в случае кулоновского притяжения ($\alpha = -1$) сходится к числу $\sqrt{\pi}$, если $2\lambda = -1$, и возрастает, как $O(q^{-\lambda-1/2})$, если $2\lambda > -1$.

Вследствие свойств (15)–(17) кулоновских функций при $q \rightarrow 0$ и $\rho \ll 1$ правые части уравнений (10) содержат как быстро убывающий множитель F_λ^2 , так и быстро

возрастающий множитель G_λ^2 . Поэтому при уменьшении волнового числа q численное интегрирование таких уравнений в области $\rho \ll 1$ становится все более сложной задачей.

В пределе $\rho \rightarrow \infty$ функции Кулона имеют асимптотики [4]

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho, \eta) &\sim \sin \chi_\lambda(\rho, \eta), \\ G_\lambda(\rho, \eta) &\sim \cos \chi_\lambda(\rho, \eta), \end{aligned} \quad \chi_\lambda(\rho, \eta) \equiv \rho - \eta \ln 2\rho - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_\lambda^c(\eta),$$

в которых модуль фазы $\delta_\lambda^c(\eta)$ неограниченно возрастает, если $q/|\lambda| \rightarrow 0$:

$$\delta_\lambda^c(\eta) \sim \frac{\eta}{2} \ln[(\lambda + 1)^2 + \eta^2] - \eta + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\lambda + 1}. \quad (18)$$

Следовательно, в пределе $q \rightarrow 0$ в области $\rho \gg 1$ функции F_λ^2 , $F_\lambda G_\lambda$ и G_λ^2 быстро осциллируют. Поэтому следует ожидать, что правые части уравнений (10), а значит, и производные $\partial_\rho c$, $\partial_\rho s$, и функции c , s будут быстро осциллировать. Анализ быстро осциллирующих функций – одна из наиболее трудных задач численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Функция G_λ записывается как [4]

$$G_\lambda(\rho, \eta) = -\frac{h^c(\eta)}{C_{-1/2}^2(\eta)} F_\lambda(\rho, \eta) + \frac{1}{q^\lambda C_\lambda(\eta)} \Theta_\lambda(\rho, \eta). \quad (19)$$

В этой сумме Θ_λ – четная функция аргумента q , а $h^c(\eta)$ – неаналитическая и четная функция переменной η . Эта функция содержит в качестве слагаемого вещественную часть Ψ -функции, а в пределе $q \rightarrow 0$ аппроксимируется полиномом по переменной q^2 :

$$\begin{aligned} h^c(\eta) &\equiv \operatorname{Re} \Psi\left(\frac{1}{2} + i\eta\right) - \ln |\eta|, \\ h^c(\eta) &= -\frac{1}{6}q^2 - \frac{7}{60}q^4 + O(q^6), \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}, \quad q \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Правые части обсуждаемых уравнений (10) содержат и функцию F_λ , и функцию G_λ , удовлетворяющие соотношениям (15) и (19). Следовательно, по крайней мере одна из амплитудных функций c или s должна содержать неаналитические функции $C_\lambda(\eta)$ и $h^c(\eta)$ в качестве множителей или слагаемых. В силу представлений (9) и (12)–(14) этим же свойством должны обладать функции U , N , u_λ , δ_λ и σ_λ . Поэтому вывод явных низкоэнергетических асимптотик этих функций представляется довольно сложным и требует особого подхода.

Из проведенного выше обсуждения задачи (10), (11) следует, что ее необходимо свести к альтернативной задаче Коши, наиболее удобной для численного анализа в пределе низких энергий, и попутно найти представления амплитудных функций c и s , в которых неаналитические функции C_λ и h^c выделены в явном виде. Вывод и обсуждение таких представлений мы проведем ниже.

3.2. Редуцированные амплитудные функции. Мы предлагаем новую формулировку метода амплитудных функций, наиболее адаптированную для анализа

радиальной задачи Шредингера (3)–(5) в пределе низких энергий. Основными в такой формулировке будут редуцированные амплитудные функции $c^\pm$ и $s^\pm$.

Используем известные представления [4] функций F_λ и Θ_λ :

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho, \pm|\eta|) &= q^{\lambda+1} C_\lambda(\eta) \nu! v f_\lambda^\pm(v, q), \\ \Theta_\lambda(\rho, \pm|\eta|) &= \frac{v}{\nu!} \theta_\lambda^\pm(v, q), \end{aligned} \quad v = \sqrt{8\rho|\eta|}, \quad \rho \geq 0, \quad \nu \equiv 2\lambda + 1. \quad (21)$$

Положим

$$\begin{aligned} s(\rho, \pm|\eta|) &= (\nu!)^2 q^{2\lambda+1} C_\lambda^2(\pm|\eta|) s^\pm(v, q), \\ c(\rho, \pm|\eta|) &= c^\pm(v, q) + \frac{h^c(\pm|\eta|)}{C_{-1/2}^2(\pm|\eta|)} s(\rho, \pm|\eta|) = c^\pm(v, q) + h(q) s^\pm(v, q), \end{aligned} \quad (22)$$

где четная функция $h(q)$ имеет вид произведения

$$h(q) \equiv (\nu!)^2 h^c(\eta) P_\lambda(q^2), \quad P_\lambda(q^2) \equiv q^{2\lambda+1} \frac{C_\lambda^2(\eta)}{C_{-1/2}^2(\eta)}, \quad (23)$$

в котором h^c – функция (20), а P_λ – известный полином [4] степени $2\lambda + 1$:

$$P_\lambda(q^2) = \frac{1}{(\nu!)^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \lambda(\lambda+1)(2\lambda+1) q^2 \left[1 + \frac{1}{15} (\lambda-1)(2\lambda-1)(5\lambda+6) q^2 + \dots \right] \right\}. \quad (24)$$

Поэтому $h(q) = h^c(\eta)$ в случае $2\lambda = -1$, а при условии $2\lambda > -1$ благодаря формулам (20)

$$h(q) = -\frac{1}{6} q^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{7}{20} + \frac{1}{3} \lambda(\lambda+1)(2\lambda+1) \right] q^4 + O(q^6), \quad q \rightarrow 0. \quad (25)$$

В определении (9) функции U и в задаче (10), (11) заменим функцию G_λ суммой (19), функции F_λ и Θ_λ представим в виде (21), а функции c и s – в виде (22). В полученных соотношениях приведем подробные слагаемые. В итоге для функции U выведем представление

$$\begin{aligned} U(\rho, \pm|\eta|) &= \nu! q^{\lambda+1} C_\lambda(\pm|\eta|) U^\pm(v, q), \\ U^\pm(v, q) &\equiv v \{ c^\pm(v, q) f_\lambda^\pm(v, q) + s^\pm(v, q) \theta_\lambda^\pm(v, q) \}, \end{aligned} \quad (26)$$

в котором функции $c^\pm$ и $s^\pm$ в области $v > 0$ подчиняются системе уравнений

$$\begin{aligned} \partial_v c^\pm(v, q) &= v^3 V(v) [c^\pm(v, q) f_\lambda^\pm(v, q) + s^\pm(v, q) \theta_\lambda^\pm(v, q)] \theta_\lambda^\pm(v, q), \\ \partial_v s^\pm(v, q) &= -v^3 V(v) [c^\pm(v, q) f_\lambda^\pm(v, q) + s^\pm(v, q) \theta_\lambda^\pm(v, q)] f_\lambda^\pm(v, q) \end{aligned} \quad (27)$$

с начальными условиями

$$c^\pm(v, q)|_{v=0} = 1, \quad s^\pm(v, q)|_{v=0} = 0. \quad (28)$$

Вследствие теоремы 1 и однозначности представлений (22) функций c и s через функции $c^\pm$ и $s^\pm$ верно следующее важное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Если потенциал V удовлетворяет условиям (8), то при любом $\lambda \geq -1/2$ и любом $q \geq 0$ задача Коши (27), (28) имеет единственное, причем непрерывное на всей полуоси $v \geq 0$, решение $\{c^\pm, s^\pm\}$.

Завершим редукцию радиальной задачи Шредингера (3)–(5) выводом специальных представлений функций N , δ_λ , σ_λ и u_λ , в которых все неаналитические функции аргумента q выделены в явном виде. Для этого в равенствах (12)–(14) выразим функции c и s через функции $c^\pm$ и $s^\pm$ по формулам (22). В результате получим соотношения

$$N(\pm|\eta|) = \lim_{v \rightarrow \infty} N^\pm(v, q),$$

$$N^\pm(v, q) \equiv \{[c^\pm(v, q) + h(q)s^\pm(v, q)]^2 + [(\nu!)^2 q^{2\lambda+1} C_\lambda^2(\pm|\eta|) s^\pm(v, q)]^2\}^{-1/2}, \quad (29)$$

а также формулы

$$\operatorname{tg} \delta_\lambda(\pm|\eta|) = \lim_{v \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \delta_\lambda^\pm(v, q),$$

$$\operatorname{tg} \delta_\lambda^\pm(v, q) \equiv (\nu!)^2 q^{2\lambda+1} C_\lambda^2(\pm|\eta|) \frac{s^\pm(v, q)}{[c^\pm(v, q) + h(q)s^\pm(v, q)]} \quad (30)$$

и представления

$$\sigma_\lambda(\pm|\eta|) = \sigma_\lambda^\pm(q) \equiv \lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_\lambda^\pm(v, q),$$

$$\sigma_\lambda^\pm(v, q) \equiv 4\varepsilon_\lambda |R| q [\nu! q^\lambda C_\lambda(\pm|\eta|)]^4 [s^\pm(v, q) N^\pm(v, q)]^2. \quad (31)$$

Используя соотношения (9), (26) и (29), представим волновую функцию u_λ в виде

$$u_\lambda(\rho, \pm|\eta|) = \nu! q^{\lambda+1} C_\lambda(\pm|\eta|) N(\pm|\eta|) U^\pm(v, q),$$

$$U^\pm(v, q) = v[c^\pm(v, q) f_\lambda^\pm(v, q) + s^\pm(v, q) \theta_\lambda^\pm(v, q)]. \quad (32)$$

Итак, для полного решения исходной задачи (3)–(5) необходимо сначала решить задачу (27), (28), затем найти множитель N , фазу δ_λ и сечение σ_λ по формулам (29)–(31) и, наконец, вычислить функцию u_λ по формулам (32). В силу теоремы 2 при условиях (8) такая функция будет единственным и непрерывным решением задачи (3)–(5).

Обсудим преимущества новых уравнений (27) по сравнению с исходными уравнениями (10). Вследствие представлений (21) уравнения (27) вместо функций Кулона F_λ и G_λ содержат $f_\lambda^\pm$ и $\theta_\lambda^\pm$. Как известно [6], в области $0 \leq v < \infty$, $0 \leq q < \infty$ эти функции являются равномерно сходящимися рядами по четным степеням аргумента q :

$$f_\lambda^\pm(v, q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} f_{\lambda n}^\pm(v), \quad \theta_\lambda^\pm(v, q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} \theta_{\lambda n}^\pm(q). \quad (33)$$

Поэтому обе компоненты решения $\{c^\pm, s^\pm\}$ задачи Коши (27), (28) в отличие от функций c и s не содержат в качестве множителей или слагаемых никаких неаналитических функций переменной q . Более того, следует ожидать, что в области $0 \leq v < \infty$, $0 \leq q < \infty$ функции $c^\pm$ и $s^\pm$ будут равномерно сходящимися рядами того же типа, что и ряды (33):

$$c^\pm(v, q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} c_n^\pm(v), \quad s^\pm(v, q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} s_n^\pm(v). \quad (34)$$

Следовательно, функции $c^\pm$ и $s^\pm$ устроены более просто, чем породившие их функции c и s . Благодаря указанным выше свойствам функций $f_\lambda^\pm$, $\theta_\lambda^\pm$, $c^\pm$ и $s^\pm$ численное интегрирование уравнений (27) в пределе низких энергий – довольно простая задача.

3.3. Уравнения для компонент редуцированных амплитудных функций. Выведем и обсудим задачи Коши для искомых компонент $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$ рядов (34). Для этого в системе уравнений (27) и в ее начальных условиях (28) представим функции $f_\lambda^\pm$ и $\theta_\lambda^\pm$ известными рядами (33), а редуцированные амплитудные функции $c^\pm$ и $s^\pm$ – искомыми рядами (34). Получившиеся равенства запишем в виде бесконечных полиномов по четным степеням параметра q . Благодаря линейной независимости системы $\{q^{2n}\}_{n=0}^\infty$ степенных функций эти полиномы тождественно равны нулю тогда и только тогда, когда равны нулю все их “коэффициенты”, зависящие лишь от переменной v . Применяв это правило, для каждого значения $n = 0, 1, \dots$ на полуоси $v > 0$ получим искомую систему двух уравнений

$$\begin{aligned} \partial_v c_n^\pm &= v^3 V [c_n^\pm f_{\lambda 0}^\pm + s_n^\pm \theta_{\lambda 0}^\pm] \theta_{\lambda 0}^\pm + v^3 V \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell+p=n-k} [c_k^\pm f_{\lambda \ell}^\pm + s_i^\pm \theta_{\lambda \ell}^\pm] \theta_{\lambda p}^\pm, \\ \partial_v s_n^\pm &= -v^3 V [c_n^\pm f_{\lambda 0}^\pm + s_n^\pm \theta_{\lambda 0}^\pm] f_{\lambda 0}^\pm - v^3 V \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell+p=n-k} [c_k^\pm f_{\lambda \ell}^\pm + s_i^\pm \theta_{\lambda \ell}^\pm] f_{\lambda p}^\pm \end{aligned} \quad (35)$$

с начальными условиями

$$c_0^\pm(v)|_{v=0} = \delta_{0,n}, \quad s_n^\pm(v)|_{v=0} = 0. \quad (36)$$

В уравнениях (35) при $n = 0$ суммы с верхним индексом $n - 1$ по определению полагаются равными нулю.

Обсудим строение цепочки задач Коши (35), (36). В отличие от исходной задачи (27), (28) все (для $n = 0, 1, \dots$) задачи (35), (36) не содержат волновое число q и поэтому называются энергонезависимыми. Первая (для $n = 0$) система (35) является однородной, а любая другая (для $n > 0$) – неоднородной и содержит в своей правой части компоненты решений $\{c_m^\pm, s_m^\pm\}$ всех предыдущих (для $m = 0, 1, \dots, n - 1$) систем (35). Следовательно, цепочка задач (35), (36) является рекуррентной по индексу n .

Заметим, что анализ системы (35) методом последовательных приближений Пикара–Линделёфа [8] затрудняется двумя обстоятельствами: при любом n система недиагональная, а мажорантные оценки для $f_{\lambda 0}^\pm(w) \theta_{\lambda 0}^\pm(v)$, $w > v$, неизвестны.

Чтобы преодолеть оба указанных затруднения, для каждого $n = 0, 1, \dots$ сведем задачу Коши (35), (36) к диагональной системе интегральных уравнений для функций $y_{1n}^\pm$ и $y_{2n}^\pm$. Для этого сначала определим интеграл $b^\pm$ и функции $p_1^\pm$ и $p_2^\pm$ как

$$b^\pm(v) \equiv \int_0^v t^3 V(t) f_{\lambda 0}^\pm(t) \theta_{\lambda 0}^\pm(t) dt \quad (37)$$

и

$$p_1^\pm(v) \equiv v^3 V(v) [\theta_{\lambda 0}^\pm(v)]^2 e^{-2b^\pm(v)}, \quad p_2^\pm(v) \equiv -v^3 V(v) [f_{\lambda 0}^\pm(v)]^2 e^{+2b^\pm(v)}. \quad (38)$$

Затем подстановкой

$$c_n^\pm(v) = y_{1n}^\pm(v) e^{b^\pm(v)}, \quad s_n^\pm(v) = y_{2n}^\pm(v) e^{-b^\pm(v)} \quad (39)$$

сведем исходную задачу Коши (35), (36) к системе дифференциальных уравнений

$$\partial_v y_{in}^{\pm}(v) = p_i^{\pm}(v) y_{jn}^{\pm}(v) + a_{in}^{\pm}(v), \quad i = 1, 2, \quad j = 1 + \delta_{1,i}, \quad v > 0, \quad (40)$$

с начальными условиями $y_{in}^{\pm}(v) = \delta_{0,n} \delta_{1,i}$, $i = 1, 2$, в точке $v = 0$. Функции $a_{1n}^{\pm}$ и $a_{2n}^{\pm}$ тождественно равны нулю, если $n = 0$, а при $n > 0$ являются конечными двукратными суммами. Опустив для краткости аргумент v , запишем эти суммы в виде

$$\begin{aligned} a_{1n}^{\pm} &\equiv v^3 V \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell+p=n-k} \{y_{1k}^{\pm} f_{\lambda\ell}^{\pm} + y_{2k}^{\pm} \theta_{\lambda\ell}^{\pm} e^{-2b^{\pm}}\} \theta_{\lambda p}^{\pm}, \\ a_{2n}^{\pm} &\equiv -v^3 V \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell+p=n-k} \{y_{1k}^{\pm} f_{\lambda\ell}^{\pm} e^{2b^{\pm}} + y_{2k}^{\pm} \theta_{\lambda\ell}^{\pm}\} f_{\lambda p}^{\pm}. \end{aligned} \quad (41)$$

Теперь представим систему дифференциальных уравнений (40) в виде недиагональной системы двух интегральных уравнений (здесь $i = 1, 2$ и $j = 1 + \delta_{1,i}$):

$$y_{in}^{\pm}(v) = d_{in}^{\pm}(v) + \int_0^v p_i^{\pm}(t) y_{jn}^{\pm}(t) dt, \quad d_{in}^{\pm}(v) = \delta_{0,n} \delta_{1,i} + \int_0^v a_{in}^{\pm}(t) dt. \quad (42)$$

Наконец, с помощью итерации этих уравнений выведем искомую диагональную систему:

$$\begin{aligned} y_{in}^{\pm}(v) &= r_{in}^{\pm}(v) + \int_0^v p_i^{\pm}(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} p_j^{\pm}(t) y_{in}^{\pm}(t) dt, \\ r_{in}^{\pm}(v) &= d_{in}^{\pm}(v) + \int_0^v p_i^{\pm}(t) d_{jn}^{\pm}(t) dt. \end{aligned} \quad (43)$$

Первое (при $i = 1, j = 2$) уравнение этой системы не содержит функцию $y_{2n}^{\pm}$, а второе (при $i = 2, j = 1$) не содержит функцию $y_{1n}^{\pm}$. Поэтому эти уравнения можно исследовать независимо друг от друга. В этом заключается первое и неоспоримое преимущество системы (43) по сравнению с недиагональной системой (35). Второе преимущество состоит в том, что достаточно решить только первое из уравнений системы (43), а затем вычислить $y_{2n}^{\pm}$ как интегральный образ (42) уже найденной функции $y_{1n}^{\pm}$. Еще одно преимущество системы (43) порождается строением сумм (41): при любом n эти суммы, а значит, и интегралы $d_{in}^{\pm}$ и $r_{in}^{\pm}$, стоящие в уравнениях (42) и (43), содержат искомые функции $y_{1k}^{\pm}$ и $y_{2k}^{\pm}$ с номерами $k \leq n - 1$. Поэтому системы двух уравнений (43) образуют рекуррентную по индексу n цепочку систем, которые можно исследовать в порядке возрастания этого индекса.

В следующем разделе мы используем все преимущества систем (43).

4. СВОЙСТВА КОМПОНЕНТ РЕДУЦИРОВАННЫХ АМПЛИТУДНЫХ ФУНКЦИЙ

Следующий этап построения предлагаемого асимптотического метода – анализ свойств компонент $c_n^{\pm}$ и $s_n^{\pm}$. Наша очередная задача – доказать существование и единственность всех таких компонент в случае, когда все вспомогательные функции $d_{in}^{\pm}$, $r_{in}^{\pm}$ и $y_{in}^{\pm}$, $i = 1, 2$, $n = 0, 1, \dots$, непрерывны на полуоси $v \geq 0$ и, следовательно, в обоих пределах $v \rightarrow 0$ и $v \rightarrow \infty$ принимают вполне определенные конечные значения.

Для решения поставленной задачи используем представления (39) компонент $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$ через функции $y_{1n}^\pm$ и $y_{2n}^\pm$, интегральные соотношения (42) и уравнения (43). В п. 4.1 приведены и обсуждаются известные представления компонент $f_{\lambda n}^\pm$ и $\theta_{\lambda n}^\pm$ разложений (33). В п. 4.2 представления компонент $f_{\lambda 0}^\pm$ и $\theta_{\lambda 0}^\pm$ используются для того, чтобы доказать вспомогательные утверждения, сформулированные в виде лемм 1 и 2. В п. 4.3 воспользуемся этими леммами для доказательства теорем существования и единственности.

4.1. Компоненты разложений функций Кулона и ограничения на потенциал. Как доказано в работе [6], компоненты $f_{\lambda n}^\pm$ и $\theta_{\lambda n}^\pm$ рядов (33) определяются формулами

$$f_{\lambda n}^\pm(v) \equiv \frac{(-1)^n}{2^{3n+1}} \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} b_{ns} v^s \left\{ \frac{(-1)^s I_{\nu+s}(v)}{J_{\nu+s}(v)} \right\}, \quad \nu \equiv 2\lambda + 1, \quad (44)$$

$$\theta_{\lambda n}^\pm(v) \equiv \left(-\frac{1}{8} \right)^n \frac{1}{n!} \sum_{s=2n}^{3n} (-1)^s b_{ns} v^s \left\{ \frac{\alpha_{ns}^+ I_{\nu+s}(v) + \beta_{ns}^+ K_{\nu+s}(v)}{(-1)^s \alpha_{ns}^- J_{\nu+s}(v) + \beta_{ns}^- (-\pi/2) Y_{\nu+s}(v)} \right\}. \quad (45)$$

В этих формулах I_μ , J_μ и K_μ , Y_μ – функции Бесселя первого и второго рода, а $b_{ns}^\pm$, $\alpha_{ns}^\pm$ и $\beta_{ns}^\pm$ – коэффициенты. Оптимальные способы их вычисления предложены в той же работе [6]. Согласно этому вычислению компоненты $f_{\lambda 0}^\pm$ и $\theta_{\lambda 0}^\pm$ пропорциональны функциям Бесселя:

$$f_{\lambda 0}^\pm(v) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{I_\nu(v)}{J_\nu(v)} \right\}, \quad \theta_{\lambda 0}^\pm(v) = \left\{ \frac{K_\nu(v)}{(-\pi/2) Y_\nu(v)} \right\}, \quad (46)$$

а компоненты $f_{\lambda n}^\pm$ и $\theta_{\lambda n}^\pm$, $n > 0$, устроены более сложно. Так, компоненты $\theta_{\lambda n}^+$ и $\theta_{\lambda n}^-$ при $n > 0$ содержат соответственно обе функции Бесселя $I_{\nu+s}$, $K_{\nu+s}$ и $J_{\nu+s}$, $Y_{\nu+s}$.

Исследуем поведение компонент $f_{\lambda n}^\pm(v)$ и $\theta_{\lambda n}^\pm(v)$ в двух пределах: $v \rightarrow 0$ и $v \rightarrow \infty$. Для этого используем представления (44)–(46), асимптотики функций Бесселя [9] и функцию

$$\vartheta_\mu(v) \equiv v - \frac{\pi}{2} \left(\mu + \frac{1}{2} \right).$$

Если $2\lambda \geq -1$ и $n \geq 0$, то компонента $f_{\lambda n}^\pm$, $n \geq 0$, удовлетворяет соотношениям

$$f_{\lambda n}^\pm(v) \sim v^{2n+\nu}, \quad v \rightarrow 0; \quad f_{\lambda n}^\pm(v) \sim v^{3n-1/2} \left\{ \frac{e^v}{\sin \vartheta_{\nu+3n}(v)} \right\}, \quad \frac{v}{\nu+3n} \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Асимптотическое поведение компоненты $\theta_{\lambda n}^\pm$ радикально зависит от индексов λ и n . И для $2\lambda > -1$, и для $2\lambda = -1$ при любом $n \geq 1$ верны формулы

$$\theta_{\lambda n}^\pm(v) \sim v^{-\nu}, \quad v \rightarrow 0; \quad \theta_{\lambda n}^\pm(v) \sim v^{3n-1/2} \left\{ \frac{e^v}{\cos \vartheta_{\nu+3n}(v)} \right\}, \quad \frac{v}{\nu+3n} \rightarrow \infty. \quad (48)$$

Для $2\lambda > -1$ и $n = 0$ первая из этих формул остается в силе, а вторая вместо растущей экспоненты e^v содержит убывающую экспоненту e^{-v} :

$$\theta_{\lambda 0}^\pm(v) \sim v^{-\nu}, \quad v \rightarrow 0; \quad \theta_{\lambda 0}^\pm(v) \sim v^{-1/2} \left\{ \frac{e^{-v}}{\cos \vartheta_\nu(v)} \right\}, \quad \frac{v}{\nu} \rightarrow \infty. \quad (49)$$

В оставшемся случае $2\lambda = -1$ и $n = 0$ выполняются соотношения

$$\theta_{\lambda 0}^{\pm}(v) \sim \ln v, \quad v \rightarrow 0; \quad \theta_{\lambda 0}^{\pm}(v) \sim v^{-1/2} \left\{ \frac{e^{-v}}{\cos \vartheta_0(v)} \right\}, \quad v \rightarrow \infty. \quad (50)$$

Обсудим асимптотики (47)–(50). Если $2\lambda > -1$ и $n > 0$, то компоненты $f_{\lambda n}^+$ и $f_{\lambda n}^-$ при $v \rightarrow 0$ сходятся к нулю по одному и тому же закону $f_{\lambda n}^{\pm} \sim v^{\nu+2n}$, а модули компонент $\theta_{\lambda n}^+$ и $\theta_{\lambda n}^-$ возрастают одинаковым образом: $|\theta_{\lambda n}^{\pm}| \sim v^{-\nu}$. В случае $2\lambda > -1$ и $n > 0$ компоненты $f_{\lambda n}^+$, $\theta_{\lambda n}^+$ и компоненты $f_{\lambda n}^-$, $\theta_{\lambda n}^-$ имеют радикально разные асимптотики при $v \rightarrow 0$. Действительно, модули компонент $f_{\lambda n}^+$ и $\theta_{\lambda n}^+$ быстро растут как произведение функций $v^{3n-1/2}$ и e^v , а компоненты $f_{\lambda n}^-$ и $\theta_{\lambda n}^-$ осциллируют с амплитудой порядка $O(v^{3n-1/2})$. В случае $2\lambda = -1$, $n = 0$ компоненты $\theta_{\lambda 0}^+$ и $\theta_{\lambda 0}^-$ сходятся при $v \rightarrow 0$, как $\ln v$.

Теперь решим следующую задачу: в случае $2\lambda > -1$, $\ell + p = n > 0$, $p > 0$ и $v \geq 0$ найти ограничения на потенциал V , достаточные для сходимости интегралов

$$\gamma^+(v) \equiv \int_0^v t^3 V(t) f_{\lambda \ell}^+(t) \theta_{\lambda p}^+(t) dt, \quad \gamma^-(v) \equiv \int_0^v t^3 V(t) f_{\lambda \ell}^-(t) \theta_{\lambda p}^-(t) dt. \quad (51)$$

Решение начнем с пояснения: интеграл γ^+ отвечает случаю кулоновского отталкивания ($\alpha = 1$), а интеграл γ^- – случаю кулоновского притяжения ($\alpha = -1$).

Пусть $v \rightarrow 0$, тогда $f_{\lambda \ell}^{\pm} \theta_{\lambda p}^{\pm} \sim O(v^{2\ell})$. Поэтому одни и те же условия (1), не зависящие от α , являются достаточными для сходимости обоих интегралов (51) на нижнем пределе и на интервале $0 < v < \infty$. Теперь пусть $v \rightarrow \infty$, тогда

$$t^3 |V(t)| |f_{\lambda \ell}^+(t) \theta_{\lambda p}^+(t)| \sim t^{3n+2} |V(t)| e^{2t}, \quad t^3 |V(t)| |f_{\lambda \ell}^-(t) \theta_{\lambda p}^-(t)| \sim t^{3n+2} |V(t)|.$$

Поэтому условия, достаточные для сходимости интегралов γ^+ и γ^- при $v = \infty$, радикально разные: интеграл γ^+ заведомо сходится при условиях (2) с $\alpha = 1$, $2\beta > 3(n+1)$, а интеграл γ^- – при более слабых условиях (2) с $\alpha = -1$, $2\beta > 3(n+1)$. Следовательно, зависимость условий (2) от параметра α порождается тем, что в пределе $v \rightarrow \infty$ поведение компонент $f_{\lambda k}^+$ и $\theta_{\lambda k}^+$ отличается от поведения компонент $f_{\lambda k}^-$ и $\theta_{\lambda k}^-$. При условиях (2) с $\alpha = \pm 1$, но при $2\beta \leq 3(n+1)$ оба интеграла (51) могут расходиться в точке $v = \infty$.

4.2. Леммы о мажорантных оценках. Рассмотрим два случая: $2\lambda > -1$ и $2\lambda = -1$. В каждом из них докажем лемму о мажорантной оценке произведения $p_1^{\pm} p_2^{\pm}$ функций (38).

ЛЕММА 1. Пусть $2\lambda > -1$ и по определению

$$\ell(v) \equiv a_{\lambda} \int_0^v t^3 |V(t)| dt, \quad a_{\lambda} \equiv \sqrt{\frac{2\pi}{2\lambda+1}}, \quad 2\tau(v) \equiv e^{2\ell(v)} - 1. \quad (52)$$

Тогда при условиях (8) произведение $p_1^{\pm} p_2^{\pm}$ функций (38) удовлетворяет неравенству

$$|p_1^{\pm}(v) p_2^{\pm}(w)| \leq \partial_v \tau(v) \partial_w \tau(w), \quad 0 \leq w \leq v \leq \infty. \quad (53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО начнем с анализа интеграла ℓ и функции τ . Вследствие условий (8) интеграл ℓ сходится на нижнем пределе, существует при любом $v > 0$, в том числе и при $v = \infty$. Поэтому из определения (52) функции τ через интеграл ℓ вытекают следующие ее важные свойства: она равна нулю в точке $v = 0$, монотонно возрастает, но ограничена на полуоси $v \geq 0$; производная $\partial_v \tau$ ограничена при $v > 0$, вообще говоря, не ограничена в точке $v = 0$, но интегрируема на всей полуоси $v \geq 0$.

Продолжим доказательство. В известной мажорантной оценке [5]

$$|F_\lambda(\rho', \eta)G_\lambda(\rho, \eta)| \leq a_\lambda \sqrt{\rho' \rho}, \quad 0 \leq \rho' \leq \rho \leq \infty, \quad 2\lambda > -1,$$

заменяем функцию G_λ суммой (19), функции F_λ и Θ_λ выразим через функции $f_\lambda^\pm$ и $\theta_\lambda^\pm$ по формулам (21), воспользуемся свойствами (20), (23) и (24) функций h^c и P_λ и, наконец, представим функции $f_\lambda^\pm$ и $\theta_\lambda^\pm$ рядами (33). В полученном неравенстве положим $\rho = v^2/8|\eta|$, $\rho' = w^2/8|\eta|$ и перейдем к пределу $q \rightarrow 0$. В итоге получим оценку

$$|f_{\lambda 0}^\pm(w)\theta_{\lambda 0}^\pm(v)| \leq a_\lambda, \quad 0 \leq w \leq v \leq \infty, \quad 2\lambda > -1. \quad (54)$$

Перейдем к выводу других вспомогательных соотношений. Благодаря оценке (54) интеграл $b^\pm$, заданный формулой (37), удовлетворяет следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} |b^\pm(v)| &= \left| \int_0^v t^3 V(t) f_{\lambda 0}^\pm(t) \theta_{\lambda 0}^\pm(t) dt \right| \leq \int_0^v t^3 |V(t)| |f_{\lambda 0}^\pm(t) \theta_{\lambda 0}^\pm(t)| dt \leq \\ &\leq a_\lambda \int_0^v t^3 |V(t)| dt = \ell(v) < \infty, \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $|b^\pm(v)| \leq \ell(v)$ при $v \geq 0$, и поэтому при $v \geq 0$ верны неравенства

$$e^{-2b^\pm(v)} \leq e^{2\ell(v)} < \infty, \quad e^{2b^\pm(v)} \leq e^{2\ell(v)} < \infty.$$

Вследствие этих неравенств и определений (52) при любом $v \geq 0$ имеем

$$a_\lambda v^3 |V(v)| e^{\pm 2b^\pm(v)} \leq a_\lambda v^3 |V(v)| e^{2\ell(v)} = \partial_v \ell(v) e^{2\ell(v)} = \partial_v \tau(v). \quad (55)$$

Теперь докажем неравенство (53). Используя определение (38) функций $p_1^\pm$ и $p_2^\pm$, оценку (54) и соотношения (55), при условии $0 \leq w \leq v \leq \infty$ получаем

$$\begin{aligned} |p_1^\pm(v) p_2^\pm(w)| &\leq \{|v^3 V(v)| e^{\pm 2b^\pm(v)}\} \{|w^3 V(w)| e^{-2b^\pm(w)}\} |\theta_{\lambda 0}^\pm(v) f_{\lambda 0}^\pm(w)|^2 \leq \\ &\leq \{a_\lambda v^3 |V(v)| e^{2\ell(v)}\} \{a_\lambda w^3 |V(w)| e^{2\ell(w)}\} = \partial_v \tau(v) \partial_w \tau(w), \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

ЛЕММА 2. Пусть $2\lambda = -1$, γ – постоянная Эйлера, интеграл $\ell^\pm$ задан формулами

$$\ell^\pm(v) = \frac{1}{2} \int_0^v t^3 |V(t)| \phi^2(t) \begin{Bmatrix} \text{ch}^2 v \\ 1 \end{Bmatrix} dt, \quad \phi(v) \equiv \left| \ln \frac{t}{2} + \gamma \right| + 1, \quad (56)$$

а функция $\tau^\pm(v)$ – формулой

$$2\tau^\pm(v) = e^{2\ell^\pm(v)} - 1. \quad (57)$$

Тогда при условиях (1) и (2) с $\beta > 2$ верна оценка

$$|p_1^\pm(v) p_2^\pm(w)| \leq \partial_v \tau^\pm(v) \partial_w \tau^\pm(w), \quad v \geq 0, \quad w \geq 0. \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО начнем следующим замечанием: интеграл $\ell^\pm$ и функция $\tau^\pm$ обладают теми же свойствами, что и интеграл ℓ и функция τ , заданные формулой (52). При условиях (1) и (2) с $\beta > 2$ интеграл $\ell^\pm$ сходится на нижнем пределе и существует при любом $v > 0$, в том числе и при $v = \infty$. Согласно определению (57) функция $\tau^\pm$ равна нулю в точке $v = 0$, монотонно возрастает, но ограничена на полуоси $v \geq 0$. Производная $\partial_v \tau^\pm$ ограничена в области $v > 0$, вообще говоря, не ограничена в точке $v = 0$, но интегрируема на всей полуоси $v \geq 0$.

Выведем заведомо завышенные, но зато удобные для дальнейших исследований мажорантные оценки функций Бесселя нулевого порядка. Как известно [9], в пределе $v \rightarrow \infty$ функции Y_0 и K_0 сходятся к нулю, а в пределе $v \rightarrow 0$ имеют однотипные асимптотики:

$$Y_0(v) \sim \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{v}{2} + \gamma \right), \quad K_0(v) \sim - \left(\ln \frac{v}{2} + \gamma \right).$$

Поэтому можно предположить, что эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\left\{ \begin{array}{c} K_0(v) \\ |Y_0(v)| \end{array} \right\} \leq \phi(v) \left\{ \begin{array}{c} \text{ch } v \\ 1 \end{array} \right\}, \quad v \geq 0.$$

В результате вычислений нам удалось показать, что эти соотношения справедливы. Известно [9], что $|J_0(v)| \leq 1$ и $I_0(v) \leq \text{ch } v$ при $v \geq 0$. Следовательно, при $v \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{c} I_0(v) \\ |J_0(v)| \end{array} \right\} \leq \phi(v) \left\{ \begin{array}{c} \text{ch } v \\ 1 \end{array} \right\}.$$

Оценим модуль произведения $f_{\lambda 0}^\pm \theta_{\lambda 0}^\pm$ сверху. Благодаря равенствам (46) и полученным выше оценкам функций Бесселя нулевого порядка имеет место равномерная и симметричная относительно перестановки аргументов v и w мажорантная оценка

$$|f_{\lambda 0}^\pm(v) \theta_{\lambda 0}^\pm(w)| \leq \frac{1}{2} \phi(v) \phi(w) \left\{ \begin{array}{c} \text{ch } v \text{ ch } w \\ 1 \end{array} \right\}, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0, \quad 2\lambda = -1. \quad (59)$$

Теперь можно получить неравенства (58) по аналогии с неравенствами (53), вывод которых подробно изложен в лемме 1. Для этого вместо оценки (54) используем оценку (59), а вместо функций ℓ и τ — функции $\ell^\pm$ и $\tau^\pm$. Ограничимся краткими пояснениями. В силу определений (37) и (56) интегралов $b^\pm$ и $\ell^\pm$ и оценки (59) при $v \geq 0$ верны три неравенства:

$$|b^\pm(v)| \leq \ell^\pm(v), \quad e^{-2b^\pm(v)} \leq e^{2\ell^\pm(v)}, \quad e^{2b^\pm(v)} \leq e^{2\ell^\pm(v)}.$$

Вследствие этих неравенств, определений (38), (57) функций $p_1^\pm$, $p_2^\pm$, $\tau^\pm$ и оценки (59) верно неравенство (58). Ключевыми при его выводе являются тождества

$$2\partial_v \tau^\pm(v) \equiv 2\partial_v \ell^\pm(v) e^{2\ell^\pm(v)} \equiv v^3 |V(v)| \phi^2(v) \left\{ \begin{array}{c} \text{ch}^2(v) \\ 1 \end{array} \right\} e^{2\ell^\pm(v)}.$$

Этим замечанием закончим доказательство леммы.

4.3. Теоремы существования и единственности. Последовательно докажем теоремы существования и единственности непрерывного на полуоси решения $\{y_{1n}^{\pm}, y_{2n}^{\pm}\}$ каждой (для $n = 0, 1, \dots, m$) системы интегральных уравнений (43). Используя эти теоремы, покажем, что при $n = 1, 2, \dots, m$ задача Коши (10), (11) имеет непрерывное на полуоси решение $\{c_n^{\pm}, s_n^{\pm}\}$. В случае $2\lambda > -1$, $n = 0$ существование и единственность решения системы интегральных уравнений (43) докажем подробно. Это позволит существенно сократить анализ случаев $2\lambda > -1$, $n > 0$ и $2\lambda = -1$, $n \geq 0$.

ТЕОРЕМА 3. Если $2\lambda > -1$ и $n = 0$, то при условиях (8) система уравнений (43) имеет единственное решение $\{y_{10}^{\pm}, y_{20}^{\pm}\}$. Его компоненты $y_{10}^{\pm}$ и $y_{20}^{\pm}$ непрерывны на полуоси $v \geq 0$ и в пределе $v \rightarrow 0$ ведут себя, как $y_{10}^{\pm} \rightarrow 1$, $y_{20}^{\pm} = o(v^{2\nu})$, $\nu = 2\lambda + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО начнем пояснениями. При $n = 0$ из формул (40)–(43) следуют тождества $a_{i0}^{\pm}(v) \equiv 0$, $d_{i0}^{\pm}(v) \equiv \delta_{1,i}$ и $r_{i0}(v) \equiv \delta_{1,i}$, где $i = 1, 2$, а $v \geq 0$. Поэтому первое (при $i = 1, j = 2$) уравнение системы (43) записывается как

$$y_{10}^{\pm}(v) = 1 + \int_0^v p_1^{\pm}(v_1) dv_1 \int_0^{v_1} p_2^{\pm}(v_2) y_{10}^{\pm}(v_2) dv_2, \quad v \geq 0; \quad (60)$$

второе (при $i = 2, j = 1$) уравнение системы (42) сводится к интегральному соотношению

$$y_{20}^{\pm}(v) = \int_0^v p_2^{\pm}(t) y_{10}^{\pm}(t) dt, \quad v \geq 0, \quad (61)$$

в результате первое уравнение системы принимает вид

$$y_{10}^{\pm}(v) = 1 + \int_0^v p_1^{\pm}(t) y_{20}^{\pm}(t) dt, \quad v \geq 0. \quad (62)$$

Исследуем уравнение (60) методом последовательных приближений Пикара–Линделёфа [8]. Определим элементы $z_m^{\pm}(v)$ бесконечной итерационной последовательности $\{z_m^{\pm}\}_{m=0}^{\infty}$. Пусть $z_0^{\pm}(v) \equiv 1$ при любом $v \geq 0$, а каждый элемент $z_m^{\pm}$ (для $m = 1, 2, \dots$) есть правая часть уравнения (60), в которой искомая компонента $y_1^{\pm}$ заменена элементом $z_{m-1}^{\pm}$:

$$z_m^{\pm}(v) = 1 + \int_0^v p_1^{\pm}(v_1) dv_1 \int_0^{v_1} p_2^{\pm}(v_2) z_{m-1}^{\pm}(v_2) dv_2, \quad m \geq 1.$$

Следовательно, элемент $z_m^{\pm}$ является частичной суммой $W_m^{\pm}$ слагаемых $z_0^{\pm} \equiv 1$ и $w_k^{\pm}$ с номерами $k = 1, \dots, m$, где

$$w_k^{\pm}(v) \equiv \int_0^v p_1(v_1) dv_1 \int_0^{v_1} p_2^{\pm}(v_2) dv_2 \cdots \int_0^{v_{2k-2}} p_1^{\pm}(v_{2k-1}) dv_{2k-1} \int_0^{v_{2k-1}} p_2^{\pm}(v_{2k}) dv_{2k}, \quad (63)$$

бесконечного ряда

$$W^{\pm}(v) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k^{\pm}(v). \quad (64)$$

Поэтому итерационная последовательность $\{z_m^{\pm}\}_{m=0}^{\infty}$ имеет предел $z_{\infty}^{\pm} = W^{\pm}$, являющийся искомым решением $y_1^{\pm}$, тогда и только тогда, когда сходится ряд $W^{\pm}$.

Покажем, что ряд $W^\pm$ сходится на всей полуоси $v \geq 0$, причем абсолютно и равномерно. Начнем с оценки модуля каждого слагаемого $w_k^\pm$, $k \geq 1$, этого ряда. По определению (63) слагаемое $w_k^\pm$ есть интеграл кратности $2k$. Он содержит k произведений функций $p_1^\pm(v_p)$ и $p_2^\pm(v_{p+1})$, $p = 1, 2, \dots, 2k-1$, с аргументами v_p и v_{p+1} , удовлетворяющими неравенству $v_{p+1} \leq v_p$. Согласно определениям (52) и неравенству (53) модуль такого произведения не превосходит произведения производных $\partial_{v_p} \tau(v_p)$ и $\partial_{v_{p+1}} \tau(v_{p+1})$, а функция $\tau(v)$ равна нулю в точке $v = 0$. Поэтому из равенства (63) следует равномерная по переменной v и довольно простая мажорантная оценка

$$|w_k^\pm(v)| \leq \int_0^v \partial_{v_1} \tau(v_1) dv_1 \int_0^{v_1} \partial_{v_2} \tau(v_2) dv_2 \cdots \\ \cdots \int_0^{v_{2k-2}} \partial_{v_{2k-1}} \tau(v_{2k-1}) dv_{2k-1} \int_0^{v_{2k-1}} \partial_{v_{2k}} \tau(v_{2k}) dv_{2k} = \frac{\tau^{2k}(v)}{(2k)!}. \quad (65)$$

Используя ее и известное разложение гиперболического косинуса $\operatorname{ch} \tau$, получим следующую равномерную по аргументу v оценку ряда (64):

$$|W^\pm(v)| \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} |w_k(v)| \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^{2k}(v)}{(2k)!} = \operatorname{ch} \tau(v) < \infty, \quad v \geq 0.$$

Следовательно, функция $\operatorname{ch} \tau$, аргумент которой τ принимает только конечные значения, есть ограниченная мажоранта ряда $W^\pm$. Поэтому на полуоси $v \geq 0$ ряд $W^\pm$ сходится равномерно и абсолютно по мажорантному признаку Вейерштрасса [10].

Продолжим исследование ряда $W^\pm$. Оценка (65) означает, что при любом значении $k = 1, 2, \dots$ интеграл в правой части равенства (63) сходится для всех $v \geq 0$. Следовательно, левая часть этого равенства – функция $w_k^\pm$ – непрерывна при любых $k = 1, 2, \dots$ на полуоси $v \geq 0$.

Итак, при $v \geq 0$ ряд $W^\pm$ сходится абсолютно и равномерно, а все его слагаемые $w_k^\pm$ – непрерывные функции. Согласно теории рядов [10] он является непрерывной функцией на полуоси $v \geq 0$. В силу определений (63) и (64) слагаемых $w_n^\pm$ и их суммы $W^\pm$ эта сумма является решением $y_{10}^\pm = W^\pm$ уравнения (60).

Покажем от противного, что это уравнение не имеет другого решения, непрерывного при $v \geq 0$. Пусть $\tilde{y}_{10}^\pm$ – еще одно решение. Тогда разность $\zeta^\pm = y_{10}^\pm - \tilde{y}_{10}^\pm$ удовлетворяет тождеству

$$\zeta^\pm(v) \equiv \int_0^v p_1^\pm(v_1) dv_1 \int_0^{v_1} p_2^\pm(v_2) \zeta^\pm(v_2) dv_2, \quad v \geq 0.$$

После $k \geq 2$ итераций это тождество благодаря равенству (63) станет тождеством

$$\zeta^\pm(v) \equiv \int_0^v p_1^\pm(v_1) dv_1 \int_0^{v_1} p_2^\pm(v_2) w_{k-1}^\pm(v_2) \zeta^\pm(v_2) dv_2, \quad k = 2, 3, \dots, \quad v \geq 0.$$

Данное тождество и оценки (53), (65) функций $p_1^\pm p_2^\pm$ и $w_{k-1}^\pm$ порождают неравенство

$$|\zeta^\pm(v)| \leq \max_{0 \leq t < v} |\zeta^\pm(t)| \frac{\tau^{2k}(v)}{(2k)!}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad v \geq 0.$$

В пределе $k \rightarrow \infty$ оно вырождается в соотношение $|\zeta^\pm(v)| \leq 0$ при $v \geq 0$, из которого следует, что $y_{10}^\pm = \tilde{y}_{10}^\pm$ при любом $v \geq 0$. Поэтому исследуемое уравнение (60) имеет только одно решение $y_{10}^\pm = W^\pm$.

Теперь построим и исследуем решение $y_{20}^\pm$ второго уравнения системы (43). Это решение является интегралом (61). Положив в этом интеграле $y_{10}^\pm = W^\pm$, получаем интегральное представление искомого решения $y_{20}^\pm$ через уже найденный ряд $W^\pm$:

$$y_{20}^\pm(v) = \int_0^v p_2^\pm(t) W^\pm(t) dt, \quad v \geq 0. \quad (66)$$

Обсудим подынтегральную функцию в (66). На всей полуоси $v \geq 0$ ряд $W^\pm$ есть ограниченная и непрерывная функция. В определении (38) потенциал V удовлетворяет условиям (8), функции $f_{\lambda 0}^+$ или $f_{\lambda 0}^-$ непрерывны на интервале $0 \leq v < \infty$ и имеют асимптотики (47), а интеграл $b^\pm$ непрерывен на полуоси $v \geq 0$. Поэтому при любом $v \geq 0$ интеграл (66) сходится и является непрерывной функцией.

Перейдем к выводу соотношения $y_{20}^\pm(v) = o(v^{4\lambda+2})$ при $v \rightarrow 0$. Так как функция $y_{10}^\pm$ в точке $v = 0$ непрерывна справа и равна единице, $y_{10}^\pm(v) \sim 1 + o(1)$ при $v \rightarrow 0$. Покажем, что в этом пределе функция $y_{20}^\pm$ быстро сходится к нулю. Для этого в представлении (61) положим $y_{10}^\pm(v) = 1 + o(1)$, воспользуемся определением (38) функции $p_2^\pm$ и заменим функцию $f_{\lambda 0}^\pm$ ее асимптотикой (47) при $v \rightarrow 0$. Таким образом получим старшее слагаемое асимптотики функции $y_{20}^\pm$ в виде интеграла:

$$y_{20}^\pm(v) \sim - \int_0^v t^{4\lambda+5} V(t) dt, \quad v \rightarrow 0.$$

Такой интеграл убывает, как $o(v^{4\lambda+2})$. Действительно, по правилу Лопиталя [10]

$$\lim_{v \rightarrow 0} v^{-4\lambda-2} \int_0^v t^{4\lambda+5} V(t) dt = \frac{1}{4\lambda+2} \lim_{v \rightarrow 0} v^4 V(v) = 0.$$

Осталось убедиться в том, что интеграл (66) – единственное решение второго уравнения системы (43) в классе функций, непрерывных на полуоси $v \geq 0$. Предположим противное: пусть имеется еще одно решение $\tilde{y}_{20}^\pm$. Тогда согласно равенству (62) функция $y_{10}^\pm = W^\pm$ является интегральным образом как функции $y_{20}^\pm$, так и функции $\tilde{y}_{20}^\pm$:

$$W^\pm(v) = 1 + \int_0^v p_1^\pm(t) y_{20}^\pm(t) dt = 1 + \int_0^v p_1^\pm(t) \tilde{y}_{20}^\pm(t) dt, \quad v \geq 0.$$

Следовательно, разность $y_{20}^\pm - \tilde{y}_{20}^\pm$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^v p_1^\pm(t) [y_{20}^\pm(t) - \tilde{y}_{20}^\pm(t)] dt \equiv 0, \quad v \geq 0.$$

После дифференцирования по аргументу v это тождество становится соотношением

$$p_1^\pm(v) [y_{20}^\pm(v) - \tilde{y}_{20}^\pm(v)] \equiv 0, \quad v \geq 0,$$

которое выполняется только в случае $y_{20}^\pm(v) \equiv \tilde{y}_{20}^\pm(v)$, $v \geq 0$. Следовательно, интеграл (66) – единственное непрерывное при $v \geq 0$ решение второго уравнения системы (43). Это утверждение завершает доказательство теоремы и анализ системы (43) при $2\lambda > -1$ и $n = 0$.

Перейдем к исследованию системы (43) в случае $2\lambda > -1$, $n > 0$. В этом случае согласно равенствам (40)–(43) слагаемые $r_{1n}^{\pm}$ и $r_{2n}^{\pm}$ являются довольно сложными функциями. Поэтому сначала необходимо доказать лемму о предполагаемых свойствах таких слагаемых.

ЛЕММА 3. *Предположим, что в случае $2\lambda > -1$, $n > 0$ все функции $y_{1k}^{\pm}$ и $y_{2k}^{\pm}$ в суммах (41) непрерывны при $v \geq 0$ и имеют асимптотики $y_{1k}^{\pm} = o(1)$, $y_{2k}^{\pm} = o(v^{2\nu})$ при $v \rightarrow 0$. Тогда при условиях (1) и (2) с $2\beta > 3(n+1)$ слагаемые $r_{1n}^{\pm}$ и $r_{2n}^{\pm}$ системы (43) непрерывны на полуоси $v \geq 0$ и имеют асимптотики $r_{1n}^{\pm} = o(1)$ и $r_{2n}^{\pm} = o(v^{2\nu})$ при $v \rightarrow 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам потребуются асимптотики (47)–(49) компонент $f_{\lambda n}^{\pm}$ и $\theta_{\lambda n}^{\pm}$, определения (41)–(43) функций $a_{in}^{\pm}$, $d_{in}^{\pm}$, $r_{in}^{\pm}$, представления (38) функций $p_1^{\pm}$ и $p_2^{\pm}$, а также свойства функций $y_{10}^{\pm}$ и $y_{20}^{\pm}$, установленные в теореме 3. Исследуем функции $a_{1n}^{\pm}$, $a_{2n}^{\pm}$ и интегралы $d_{1n}^{\pm}$, $d_{2n}^{\pm}$ по аналогии с приведенным в п. 4.1 анализом интегралов (51).

Пусть $v \rightarrow 0$. Тогда при условиях (1) и любых k и $\ell \leq n-1$ имеем

$$v^3 V(v) = o(v^{-1}), \quad f_{\lambda \ell}^{\pm} = o(v^{2\nu+2\ell}), \quad \theta_{\lambda \ell}^{\pm} = o(v^{-2\nu}), \quad y_{1k}^{\pm} = \delta_{0,k} + o(1), \quad y_{2k}^{\pm} = o(v^{2\nu}).$$

Поэтому суммы $a_{1n}^{\pm}$ и $a_{2n}^{\pm}$ подчиняются следующим соотношениям:

$$a_{1n}^{\pm} \sim y_{10}^{\pm} v^3 V f_{\lambda 0}^{\pm} \theta_{\lambda n}^{\pm} = o(v^{-1}), \quad a_{2n}^{\pm} \sim v^3 V f_{\lambda 0}^{\pm} \sum_{k=0}^{n-1} y_{2k}^{\pm} \sum_{p=n-k} \theta_{\lambda p}^{\pm} = o(v^{2\nu-1}), \quad v \rightarrow 0.$$

Следовательно, при $v \rightarrow 0$ интегралы $d_{1n}^{\pm}$ и $d_{2n}^{\pm}$ от сумм $a_{1n}^{\pm}$ и $a_{2n}^{\pm}$ имеют при $v \rightarrow 0$ асимптотики $d_{1n}^{\pm} = o(1)$, $d_{2n}^{\pm} = o(v^{2\nu})$, а функции $p_1^{\pm}$ и $p_2^{\pm}$ – асимптотики $p_1^{\pm} = o(v^{-2\nu-1})$ и $p_2^{\pm} = o(v^{2\nu-1})$. Слагаемые $r_{1n}^{\pm}$ и $r_{2n}^{\pm}$ содержат только интегралы $d_{1n}^{\pm}$, $d_{1n}^{\pm}$ и функции $p_1^{\pm}$, $p_2^{\pm}$, поэтому $r_{1n}^{\pm} = o(1)$, а $r_{2n}^{\pm} = o(v^{2\nu})$ при $v \rightarrow 0$.

Итак, при условиях (1) функции $d_{in}^{\pm}$ и $r_{in}^{\pm}$, $i = 1, 2$, сходятся к нулю в точке $v = 0$ и являются непрерывными на интервале $0 \leq v < \infty$. Осталось исследовать поведение этих функций в пределе $v \rightarrow \infty$.

Пусть $v \rightarrow \infty$. Тогда в суммах $a_{1n}^{\pm}$ и $a_{2n}^{\pm}$ все функции $y_{1k}^{\pm}$ и $y_{2k}^{\pm}$, $k \leq n-1$, сходятся к своим конечным значениям в точке $v = \infty$, а асимптотики всех произведений $f_{\lambda \ell}^{\pm} f_{\lambda p}^{\pm}$, $f_{\lambda \ell}^{\pm} \theta_{\lambda p}^{\pm}$ и $\theta_{\lambda \ell}^{\pm} \theta_{\lambda p}^{\pm}$ содержат в качестве множителя степенную функцию $v^{3(\ell+p)-1}$ с $\ell + p = n = k$. Ее показатель принимает максимальное значение, равное $3n-1$, при $k = 0$. Поэтому

$$a_{in}^{\pm}(v) \sim v^{3n+2} V(v) \begin{Bmatrix} e^{2v} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad v \rightarrow \infty.$$

Потенциал V удовлетворяет условию (2) с $2\beta > 3(n+1)$, поэтому в пределе $v \rightarrow \infty$ суммы $a_{1n}^{\pm}$ и $a_{2n}^{\pm}$ сходятся к нулю быстрее функции v^{-1} . В результате интегралы $d_{1n}^{\pm}$ и $d_{2n}^{\pm}$ от таких сумм в точке $v = \infty$ принимают конечные значения. Таким образом, функции $r_{1n}^{\pm}$ и $r_{2n}^{\pm}$ непрерывны в точке $v = \infty$ слева, если интегралы от функций $|p_1^{\pm}(t)|$ и $|p_2^{\pm}(t)|$ по области $v > 0$ сходятся на верхнем пределе $v = \infty$. Для такой сходимости достаточными являются условия (1) и условие (2) с $\beta > 2$. Действительно, благодаря таким условиям и асимптотикам (47) и (48) компонент $f_{\lambda 0}^{\pm}$

и $\theta_{\lambda_0}^{\pm}$ функции $p_1^{\pm}$ и $p_2^{\pm}$ непрерывны в области $0 < v < \infty$ и сходятся к нулю при $v \rightarrow \infty$ быстрее функции v^{-1} .

Сформулируем два вывода. Если V удовлетворяет условию (2) с $2\beta > 3(n+1)$, то все функции $a_{in}^{\pm}$, $d_{in}^{\pm}$ и $r_{in}^{\pm}$ ограничены в точке $v = \infty$. В случае $2\beta \leq 3(n+1)$ интегралы $d_{1n}^{\pm}$ и $d_{2n}^{\pm}$, а следовательно, и функции $r_{1n}^{\pm}$ и $r_{2n}^{\pm}$, вообще говоря, не имеют определенных пределов в точке $v = \infty$. Этими выводами завершим доказательство леммы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $2\lambda > -1$, $n = 1, 2, \dots, t$, и пусть выполнены условия (1) и (2) с $2\beta > 3(m+1)$. Тогда система уравнений (43) имеет единственное непрерывное на полуоси $v \geq 0$ решение $\{y_{1n}^{\pm}, y_{2n}^{\pm}\}$, причем такое, что $y_{1n}^{\pm} = o(1)$, $y_{2n}^{\pm} = o(v^{2\nu})$ при $v \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем леммы 1 и 3 и применим метод последовательных приближений и метод математической индукции.

Пусть $n = 1$. Методом последовательных приближений построим формальное решение $y_{1n}^{\pm}$ первого (при $i = 1, j = 2$) уравнения системы (43) в виде бесконечного ряда

$$X^{\pm}(v) = r_{1n}^{\pm}(v) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{\pm}(v) \quad (67)$$

со слагаемыми

$$x_k^{\pm}(v) = \int_0^v p_1^{\pm}(v_1) dv_1 \int_0^{v_1} p_2^{\pm}(v_2) dv_2 \dots \dots \int_b^{v_{2k-2}} p_1^{\pm}(v_{2k-1}) dv_{2k-1} \int_0^{v_{2k-1}} p_1^{\pm}(v_{2k}) r_{1n}^{\pm}(v_{2k}) dv_{2k}, \quad k \geq 1. \quad (68)$$

Исследуем ряд $X^{\pm}$. Согласно лемме 3 слагаемое $r_{1n}^{\pm}$ с $n = 1$ является всюду (на полуоси $v \geq 0$) непрерывной функцией. Максимальное значение $T_0^{\pm}$ модуля такой функции есть конечное число. Построим мажорантную оценку $T_k^{\pm}$ слагаемого $x_k^{\pm}$ с номером $k \geq 1$. Сначала в интеграле (68) заменим все функции их модулями. Затем заменим функцию $|r_{1n}^{\pm}|$ числом $T_0^{\pm}$, а каждое (для $p = 1, 2, \dots, 2k-1$) произведение функций $|p_1^{\pm}(v_p)|$ и $|p_2^{\pm}(v_{p+1})|$ заменим превосходящим его согласно неравенству (53) произведением производных $\partial_{v_p} \tau(v_p)$ и $\partial_{v_{p+1}} \tau(v_{p+1})$. Используя равенство $\tau(v) = 0$ при $v = 0$, вычислим полученный интеграл $T_k^{\pm}$ и запишем искомую оценку в следующем виде:

$$|x_k^{\pm}(v)| \leq T_k^{\pm}(v) \equiv T_0^{\pm} \frac{\tau^{2k}(v)}{(2k)!} < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, \quad v \geq 0. \quad (69)$$

Благодаря такой оценке модуль $|X^{\pm}|$ ряда (67) не превосходит $T_0^{\pm} \operatorname{ch} \tau$ на всей полуоси $v \geq 0$. Поэтому ряд $X^{\pm}$ сходится при $v \geq 0$ абсолютно и равномерно и является непрерывным решением $y_{1n}^{\pm} = X^{\pm}$ первого (при $i = 1, j = 2$) уравнения системы (43).

Исследуем поведение этого решения при $v \rightarrow 0$. В этом пределе согласно лемме 1 функция τ сходится к нулю, поэтому из оценки (69) следует, что все слагаемые $x_k^{\pm}$ ряда $X^{\pm}$ убывают быстрее, чем $r_{1n}^{\pm}$. Согласно лемме 3 при $n = 1$ верно соотношение $r_{1n}^{\pm} = o(1)$. Поэтому $X^{\pm} \sim r_{1n}^{\pm} = o(1)$ и $y_{1n}^{\pm} = o(1)$ при $v \rightarrow 0$.

Теперь построим решение $y_{2n}^\pm$ второго (при $i = 2, j = 1$) уравнения системы (43) как образ (42) ряда (67):

$$y_{2n}^\pm(v) = d_{2n}^\pm(v) + \int_0^v p_2^\pm(t) X^\pm(t) dt. \quad (70)$$

Заменой $X \rightarrow d_{1n}^\pm$ это равенство сводится к уже исследованной в лемме 3 функции $r_{2n}^\pm$ (см. определение (43)). Обе функции $X^\pm$ и $d_{1n}^\pm$ непрерывны на полуоси $v \geq 0$ и убывают, как $o(1)$ при $v \rightarrow 0$. Поэтому функции $r_{2n}^\pm$ и $y_{2n}^\pm$ обладают одинаковыми свойствами: они непрерывны на полуоси $v \geq 0$ и убывают, как $o(v^{2\nu})$ при $v \rightarrow 0$.

Итак, системе (43) с номером $n = 1$ удовлетворяют ряд $X^\pm$ и его образ (70). Другого непрерывного на полуоси $v \geq 0$ решения не существует, что нетрудно показать от противного способами, подробно изложенными при доказательстве теоремы 3. Этим замечанием завершим доказательство теоремы в случае $n = 1$.

Согласно теореме 3 и приведенному выше анализу случая $n = 1$ компоненты $y_{1n}^\pm$ и $y_{2n}^\pm$ единственных решений систем (43) с номерами $n = 0, 1$ непрерывны на полуоси $v \geq 0$ и убывают, как $o(1)$ и $o(v^{2\nu})$ при $v \rightarrow 0$. Таким образом, первый этап метода математической индукции завершен. Предположим, что при некотором целом $p > 1$ все системы (43) с номерами $n \leq p$ однозначно разрешимы в классе непрерывных на полуоси $v \geq 0$ функций, удовлетворяющих соотношениям $y_{1n} = o(1)$ $y_{2n} = o(v^{2\nu})$ при $v \rightarrow 0$. Теперь докажем, что система (43) с номером $n = p + 1$ имеет единственное решение в том же классе функций. Благодаря предположенным выше свойствам компонент y_{in} с $n \leq p$ все утверждения леммы 3 остаются в силе и в случае $n = p + 1$. Следовательно, функции $r_{in}^\pm$ при $n = p + 1$ непрерывны на полуоси $v \geq 0$ и $r_{1n}^\pm = o(1)$, $r_{2n}^\pm = o(v^{2\nu})$ в пределе $v \rightarrow 0$. Этих свойств вполне достаточно для того, чтобы дословно повторить вывод всех формул (67)–(70) и их следствий, но уже в случае $n = p + 1$ и таким образом доказать существование единственного и непрерывного на полуоси $v \geq 0$ решения системы (43) при любом ее номере $n = 1, 2, \dots, t$.

Приступим к анализу оставшегося случая $2\lambda = -1$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $2\lambda = -1$, и пусть при $n = 0$ выполнены условия (8), а при $n = 1, 2, \dots, t$ выполнены условия (1) и (2) с $2\beta > 3(m+1)$. Тогда система (43) имеет единственное непрерывное на полуоси $v \geq 0$ решение $\{y_{1n}^\pm, y_{2n}^\pm\}$, причем такое, что $y_{1n}^\pm(v) = \delta_{0,n} + o(\ln^3 v) \ln^3 v$, а $y_{2n}^\pm(v) = o(\ln^2 v) \ln v$ при $v \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО отличается от доказательств леммы 3 и теорем 3 и 4 только тем, что вместо асимптотик (47)–(49) функций $f_{\lambda n}^\pm$ и $\theta_{\lambda n}^\pm$ при $2\lambda > -1$ используются соответствующие асимптотики (47), (49) и (50) при $2\lambda = -1$, а для оценки произведения $|p_1^\pm p_2^\pm|$ вместо неравенства (53) применяется неравенство (58).

Теперь можно сформулировать и доказать итоговую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $2\lambda \geq -1$, и пусть при $n = 0$ выполнены условия (8), а при $n = 1, 2, \dots, t$ – условия (1) и (2) с $2\beta > 3(m+1)$. Тогда задача Коши (10), (11) имеет непрерывное на полуоси $v \geq 0$ решение $\{c_n^\pm, s_n^\pm\}$, причем такое, что

$$\begin{aligned} c_n^\pm(v) &= \delta_{0,n} + o(\ln^3 v) \ln^3 v, & s_n^\pm(v) &= o(\ln^2 v) \ln v, & 2\lambda &= -1, \\ c_n^\pm(v) &= \delta_{0,n} + o(1), & s_n^\pm(v) &= o(v^{2\lambda+4}), & 2\lambda &> -1, \end{aligned} \quad v \rightarrow 0.$$

На полуоси $v \geq 0$ компоненты c_0^+ и s_0^+ или c_0^- и s_0^- не имеют общих нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО несложное. Существование, единственность и непрерывность функций $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$ на полуоси $v \geq 0$ следуют из однозначности и непрерывности представлений (39) этих функций через функции $y_{1n}^\pm$ и $y_{2n}^\pm$ и теорем 3–5. Благодаря тем же представлениям в пределе $v \rightarrow 0$ функции $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$ ведут себя так же, как функции $y_{1n}^\pm$ и $y_{2n}^\pm$.

Осталось доказать, что при любом $\lambda \geq -1/2$ на полуоси $v \geq 0$ не существует точки, в которой обе функции c_0^+ и s_0^+ или c_0^- и s_0^- равны нулю. Ключевыми для доказательства от противного будут два факта: в точке $v = 0$ функция $c_0^\pm$ непрерывна справа и равна единице.

Предположим противное: пусть $c_0^\pm(v) = 0$ и $s_0^\pm(v) = 0$ в точке $v = \infty$. Эти равенства используем как начальные условия для уравнений (35) при $n = 0$ в области $v > 0$. Исследуем сформулированную таким образом задачу Коши. Подстановкой

$$t = 1 - e^{-v}, \quad c_0^\pm(v) = x_1^\pm(t), \quad s_0^\pm(v) = x_2^\pm(t)$$

сведем ее к линейной относительно неизвестных функций $x_1^\pm$ и $x_2^\pm$ задаче Коши на отрезке $0 \leq t \leq 1$. Запишем такую задачу в виде системы двух уравнений

$$\partial_t x_i^\pm(t) = g_i^\pm(t, x_1^\pm, x_2^\pm), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, 1],$$

с тривиальными начальными условиями $x_i^\pm(t) = 0$, $i = 1, 2$, в точке $t = 1$.

На полуинтервале $0 < t \leq 1$ функции $g_1^\pm$ и $g_2^\pm$ непрерывны по переменной t и имеют непрерывные частные производные по переменным $x_1^\pm$ и $x_2^\pm$. Следовательно, выполнены оба достаточных условия теоремы Пикаро [8]. По этой теореме на полуинтервале $0 < t \leq 1$ обсуждаемая задача Коши для функций $x_i^\pm$, $i = 1, 2$, имеет единственное и при этом непрерывное решение. Очевидно, что им является тривиальное решение $x_i^\pm(t) \equiv 0$, $t \in (0, 1]$, $i = 1, 2$. Так как $c_0^\pm(v) = x_1^\pm(t)$, получаем, что $c_0^\pm(v) = 0$ при любом $v > 0$, но при этом $c_0^\pm(v) = 1$ в точке $v = 0$. Следовательно, в этой точке функция $c_0^\pm$ терпит разрыв первого рода, но эта функция непрерывна в точке $v = 0$ справа. Полученное противоречие означает, что ранее высказанное предположение $c_0^\pm(\infty) = 0$ и $s_0^\pm(\infty) = 0$ неверно. Аналогичным образом нетрудно показать, что не существует конечного значения переменной v , при котором обе компоненты $c_0^\pm$ и $s_0^\pm$ обращаются в нуль. Теорема доказана.

Сформулируем некоторые важные следствия леммы 3 и теорем 4–6. Условия (1) и (2) с $2\beta > 3(m+1)$ являются достаточными для того, чтобы все функции $d_{in}^\pm$, $r_{in}^\pm$, $y_{in}^\pm$, $c_{in}^\pm$ и $s_{in}^\pm$ с номерами $n = 1, 2, \dots, m$ оказались непрерывными на полуоси $v \geq 0$ и, следовательно, ограниченными в точке $v = \infty$. Как пояснялось в лемме 3, при условиях (1) и (2) в случае $2\beta \leq 3(m+2)$ интегралы $d_{1n}^\pm$ и $d_{2n}^\pm$, $n = m+1$, могут расходиться в пределе $v \rightarrow \infty$. Таким образом, согласно доказательствам теорем 4–6 в этом случае все функции $y_{in}^\pm$, $c_{in}^\pm$ и $s_{in}^\pm$ с номером $n = m+1$, вообще говоря, не принимают определенных значений в точке $v = \infty$.

5. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ

В настоящем разделе решим следующую задачу: при любом значении квантового числа λ вывести и исследовать низкоэнергетические (при $q \rightarrow 0$) асимптотики редуцированных амплитудных функций $c^\pm$ и $s^\pm$, функции эффективного радиуса, фазы $\delta_\lambda^\pm$, сечения $\sigma_\lambda^\pm$ и радиальной волновой функции $u_\lambda^\pm$ ядерно-кулоновского рассеяния. Для решения поставленной задачи используем доказанные в теореме 6 свойства компонент $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$.

5.1. Асимптотики редуцированных амплитудных функций. Сформулируем теорему о низкоэнергетических асимптотиках функций $c^\pm$ и $s^\pm$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $2\lambda \geq -1$, $m \geq 1$, выполнены условия (1) и (2) с $2\beta > 3(m+1)$. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} c^\pm(v, q) &= \sum_{n=0}^{m-1} q^{2n} c_n^\pm(v) + q^{2m} C^\pm(v, q), \\ s^\pm(v, q) &= \sum_{n=0}^{m-1} q^{2n} s_n^\pm(v) + q^{2m} S^\pm(v, q), \end{aligned} \quad (71)$$

в которых функции $C^\pm$ и $S^\pm$ являются непрерывными на полуоси $v \geq 0$ и сходятся к компонентам $c_m^\pm$ и $s_m^\pm$ в пределе $q \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В задаче Коши (27), (28) заменим функции $c^\pm$ и $s^\pm$ соответствующими суммами (71). Затем, используя системы уравнений (35) с номерами $n < m$, приведем подобные слагаемые. В результате на интервале $v > 0$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \partial_v C^\pm(v, q) &= v^3 V(v) \{ [C^\pm(v, q) f_\lambda^\pm(v, q) + S^\pm(v, q) \theta_\lambda^\pm(v, q)] \theta_\lambda^\pm(v, q) + R_1^\pm(v, q) \}, \\ \partial_v S^\pm(v, q) &= -v^3 V(v) \{ [C^\pm(v, q) f_\lambda^\pm(v, q) + S^\pm(v, q) \theta_\lambda^\pm(v, q)] f_\lambda^\pm(v, q) + R_2^\pm(v, q) \} \end{aligned} \quad (72)$$

с начальными условиями

$$C^\pm(v, q)|_{v=0} = 0, \quad S^\pm(v, q)|_{v=0} = 0. \quad (73)$$

Слагаемые $R_1^\pm$ и $R_2^\pm$ системы (72) содержат компоненты $c_n^\pm$, $s_n^\pm$ с номерами $n < m$ и функции $A_\lambda^\pm$ и $B_\lambda^\pm$, которые порождаются следующими разбиениями рядов (33):

$$\begin{aligned} f_\lambda^\pm(v, q) &= \sum_{n=0}^{m-1} q^{2n} f_{\lambda n}^\pm(v) + q^{2m} A_\lambda^\pm(v, q), \\ \theta_\lambda^\pm(v, q) &= \sum_{n=0}^{m-1} q^{2n} \theta_{\lambda n}^\pm(v) + q^{2m} B_\lambda^\pm(v, q). \end{aligned} \quad (74)$$

По теореме 6 все компоненты $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$ с номерами $n < m$ непрерывны на полуоси $v \geq 0$. Как показано в работе [6], ряды (33) сходятся равномерно. Следовательно, этим же свойством обладают и их остатки $q^{2m} A_\lambda^\pm$ и $q^{2m} B_\lambda^\pm$, содержащие компоненты $f_{\lambda n}^\pm$ и $\theta_{\lambda n}^\pm$ с $n \geq m$. Такие компоненты имеют асимптотики (47)–(50), поэтому при ограничениях (1) и (2) на потенциал V (при $2\beta > 3(m+1)$) эти компоненты интегрируемы на любом отрезке $[0, v]$, $v > 0$, с весом $t^3 V(t)$. В силу перечисленных выше свойств функций $c_n^\pm$, $s_n^\pm$, $f_{\lambda n}^\pm$, $\theta_{\lambda n}^\pm$ и остатков $q^{2m} A_\lambda^\pm$ и $q^{2m} B_\lambda^\pm$ произведения $t^3 V(t) R_1^\pm(t, q)$ и $t^3 V(t) R_2^\pm(t, q)$ интегрируемы на любом отрезке $[0, v]$, $v > 0$, и при любом $q \geq 0$. Это свойство слагаемых $R_1^\pm$ и $R_2^\pm$ является достаточным для доказательства однозначной разрешимости задачи Коши (72), (73) в классе функций, непрерывных на полуоси $v \geq 0$.

Поясним ключевые этапы дальнейшего анализа этой задачи. Сначала вводится интеграл

$$B^\pm(v, q) \equiv \int_0^v t^3 V(t) f_\lambda^\pm(t) \theta_\lambda^\pm(t) dt.$$

Затем подстановкой

$$C^\pm(v) = z_1^\pm(v) e^{B^\pm(v,q)}, \quad S^\pm(v) = z_2^\pm(v) e^{-B^\pm(v,q)}$$

задача Коши (72), (73) сводится к недиагональной системе интегральных уравнений для искомых функций $z_1^\pm$ и $z_2^\pm$. Из этой системы после одной итерации получается диагональная система интегральных уравнений. Она исследуется методом последовательных приближений по схеме, подробно изложенной в работе [7]. Таким образом доказывается, что задача Коши (72), (73) имеет единственное решение $\{C^\pm, S^\pm\}$, компоненты которого непрерывны при $v \geq 0$ и $q \geq 0$. Поэтому и в уравнениях (72), и в начальных условиях (73) можно перейти к пределу $q \rightarrow 0$. В итоге получается задача Коши для функций $C^\pm(v, 0)$ и $S^\pm(v, 0)$. Заменой обозначений $C^\pm(v, 0) \rightarrow c_m^\pm(v)$ и $S^\pm(v, 0) \rightarrow s_m^\pm(v)$ эта задача сводится к уже исследованной задаче Коши (35), (36). Следовательно, $C^\pm(v, q) \rightarrow c_m^\pm(v)$ и $S^\pm(v, q) \rightarrow s_m^\pm(v)$ при $q \rightarrow 0$.

Осталось выявить смысл разложений (71). Для этого символами $T_1^\pm$ и $T_2^\pm$ обозначим суммы функций $q^{2n} c_n^\pm$ и $q^{2n} s_n^\pm(v)$ с номерами $n = 0, 1, \dots, m-1$. Разбиения (71) означают, что на всей полуоси $v \geq 0$ и, в частности, в ее бесконечно удаленной точке $v = \infty$ суммы $T_1^\pm$ и $T_2^\pm$ являются низкоэнергетическими приближениями функций $c^\pm$ и $s^\pm$ с абсолютной точностью $O(q^{2m})$. Этим пояснением завершим доказательство теоремы.

Теперь обсудим построение низкоэнергетических приближений нормировочного множителя $N^\pm$, фазы $\delta_\lambda^\pm$, сечения $\sigma_\lambda^\pm$ и радиальной волновой функции $u_\lambda^\pm$ рассеяния квантовой частицы p_1 в состоянии $|\lambda, q\rangle$. Функции $N_m^\pm(q)$, $\text{tg } \delta_{\lambda m}^\pm(q)$, $\sigma_{\lambda m}^\pm(q)$ и $u_{\lambda m}^\pm(v, q)$ определим как правые части соответствующих равенств (29)–(32), в которых функции $c^\pm$ и $s^\pm$ заменены их приближениями $T_1^\pm$ и $T_2^\pm$. По определению функции $N_m^\pm$, $\text{tg } \delta_{\lambda m}^\pm$, $\sigma_{\lambda m}^\pm$ и $u_{\lambda m}^\pm$ содержат только известные функции C_λ , h , $f_{\lambda n}$, $\theta_{\lambda n}$ и компоненты $c_n^\pm$, $s_n^\pm$ с номерами $n \leq m-1$ и являются низкоэнергетическими приближениями соответствующих функций $N^\pm$, $\text{tg } \delta_\lambda^\pm$ и $\sigma_\lambda^\pm$ с абсолютной точностью порядка $O(q^{2m})$. Следовательно, задача о построении низкоэнергетических приближений $N_m^\pm$, $\text{tg } \delta_{\lambda m}^\pm$, $\sigma_{\lambda m}^\pm$ и $u_{\lambda m}^\pm$ сводится к вычислению конечного числа компонент $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$, $n = 0, 1, \dots, m-1$. В этом заключается первое преимущество предлагаемого асимптотического метода. Второе преимущество состоит в том, что все такие компоненты удовлетворяют конечной, энергонезависимой и рекуррентной цепочке задач Коши (35), (36), численный анализ которых довольно прост.

В следующих пп. 5.2–5.4 для анализа особенностей низкоэнергетических приближений функции эффективного радиуса, фазы $\delta_\lambda^\pm$, сечения $\sigma_\lambda^\pm$ и нормировочного множителя $N^\pm$ нам потребуются свойства предельных при $v \rightarrow \infty$ значений компонент $c_0^\pm$ и $s_0^\pm$.

Покажем, что $c_0^+(v) \neq 0$ при любом $v \geq 0$. По теореме 1 при любом $q > 0$ амплитудные функции c и s не имеют общих нулей. Следовательно, верно соотношение

$$|c(\rho, \eta)| + |s(\rho, \eta)| \neq 0, \quad \rho \geq 0.$$

Заменим в нем функции c и s правыми частями равенств (22), в которых представим функции $c^\pm$ и $s^\pm$ рядами (34). По теореме 7 такие ряды сходятся равномерно, поэтому в полученном соотношении можно перейти к пределу $q \rightarrow 0$ и, используя асимптотики (17) и (25) функций C_λ^2 и h , вывести два неравенства:

$$|c_0^+(v)| \neq 0, \quad |c_0^-(v)| + \pi |s_0^-(v)| \neq 0, \quad v \geq 0.$$

Первое из них означает, что компонента c_0^+ всегда отлична от нуля, а второе подтверждает утверждение теоремы 6 об отсутствии общих нулей у компонент c_0^- и s_0^- .

Сформулируем важное следствие этой теоремы и доказанного выше неравенства $c_0^+(v) \neq 0$ для $v \geq 0$. При $v = \infty$ возможны три случая. Случай 1: $c_0^+(v) \neq 0$ и $s_0^+(v) \neq 0$. Случай 2: $s_0^+(v) = 0$, но $c_0^+(v) \neq 0$. Случай 3: $c_0^-(v) = 0$, но $s_0^-(v) \neq 0$.

В следующих пп. 5.2–5.4 для полноты изложения мы исследуем все эти случаи. При этом будем предполагать, что потенциал V удовлетворяет условиям (1) и условиям (2), в которых $2\beta > 3(m+1)$, а $m = 3$. При таких условиях по теореме 6 компоненты $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$, $n = 0, 1, 2, 3$, ограничены в точке $v = \infty$, а по теореме 7 верны представления (71) с $m = 3$. В пп. 5.5 выясним, какие из полученных в пп. 5.2–5.4 асимптотических соотношений остаются в силе при более слабых условиях (2) с параметром $2\beta > 3(m+1)$, но при $m < 3$.

5.2. Функция эффективного радиуса и ее асимптотика. Для данного состояния $|q, \lambda\rangle$ рассеяния квантовой частицы p_1 определим функцию эффективного радиуса как функцию волнового числа q , удовлетворяющую трем условиям: она должна содержать котангенс фазы $\delta_\lambda^\pm(q)$ и иметь низкоэнергетическую (при $q \rightarrow 0$) асимптотику в виде ряда Маклорена по четным степеням аргумента q , при этом старшее слагаемое этого ряда должно быть конечной, но ненулевой константой.

Приступим к построению функции эффективного радиуса для состояния $|q, \lambda\rangle$. Введем вспомогательную функцию

$$K^\pm(v, q) \equiv (\nu!)^2 q^{2\lambda+1} C_\lambda^2(\pm|\eta|) \operatorname{ctg} \delta_\lambda^\pm(v, q) - h(q), \quad (75)$$

где функции $C_\lambda(\pm|\eta|)$ и $h(q)$ заданы равенствами (16) и (20), (23), (24), а фазовая функция $\delta_\lambda^\pm(v, q)$ представляется через функции $c^\pm(v, q)$ и $s^\pm(v, q)$ формулой (30). Используя эту формулу и представления (71) с $m = 3$, запишем функцию $K^\pm(v, q)$ в виде

$$K^\pm(v, q) = \frac{c^\pm(v, q)}{s^\pm(v, q)} = \frac{c_0^\pm(v) + q^2 c_1^\pm(v) + q^4 c_2^\pm(v) + q^6 C^\pm(v, q)}{s_0^\pm(v) + q^2 s_1^\pm(v) + q^4 s_2^\pm(v) + q^6 S^\pm(v, q)}. \quad (76)$$

Далее для краткости символами $A(q)$ и B будем обозначать значения функций $A(v, q)$ и $B(v)$ в бесконечно удаленной точке $v = \infty$. Согласно теоремам 2 и 6 функции $c^\pm(v, q)$ и $s^\pm(v, q)$ и все их компоненты $c_n^\pm(v)$, $s_n^\pm(v)$, $n \leq m = 3$, непрерывны в бесконечно удаленной точке $v = \infty$ и, следовательно, принимают в этой точке вполне определенные и конечные значения $c^\pm(q)$, $s^\pm(q)$ и $c_n^\pm$, $s_n^\pm$. Поэтому в соотношениях (75) и (76) можно перейти к пределу $v \rightarrow \infty$ и таким образом получить представление функции $K(q)$ через фазу рассеяния $\delta_\lambda^\pm(q)$ и представление этой же функции через предельные значения функций $c^\pm(v, q)$ и $s^\pm(v, q)$ и их компонент $c_n^\pm(v)$, $s_n^\pm(v)$:

$$\begin{aligned} K^\pm(q) &= (\nu!)^2 q^{2\lambda+1} C_\lambda^2(\pm|\eta|) \operatorname{ctg} \delta_\lambda^\pm(q) - h(q) = \frac{c^\pm(q)}{s^\pm(q)} = \\ &= \frac{c_0^\pm + q^2 c_1^\pm + q^4 c_2^\pm + q^6 C^\pm(q)}{s_0^\pm + q^2 s_1^\pm + q^4 s_2^\pm + q^6 S^\pm(q)}. \end{aligned} \quad (77)$$

Из равенств (76) и (77) следует, что $K(v, q)$ и $K(q)$ являются четными функциями переменной $q \geq 0$. Исследуем эти равенства в трех случаях.

СЛУЧАЙ 1. Пусть в точке $v = \infty$ функции $c_0^\pm(v)$ и $s_0^\pm(v)$ не равны нулю ($c_0^\pm \neq 0$, $s_0^\pm \neq 0$). Запишем функцию $K^\pm(v, q)$ в виде ряда Маклорена по аргументу q с остаточным слагаемым $P^\pm(v, q) = O(q^6)$:

$$K^\pm(v, q) = \sum_{n=0}^2 q^{2n} M_n^\pm(v, q) + P^\pm(v, q). \quad (78)$$

В этом выражении

$$M_0^\pm(v) = \frac{c_0^\pm(v)}{s_0^\pm(v)}, \quad M_1(v) = \frac{c_1^\pm(v) - s_1^\pm(v) M_0^\pm(v)}{s_0^\pm(v)}, \quad (79)$$

а каждая функция $M_n^\pm(v)$, $n = 0, 1, 2$, представляется конечной суммой дробей, знаменатели которых – целые степени $(s_0^\pm(v))^p$ с $p \leq 2n$, а числители выражаются через компоненты $c_m^\pm(v)$ и $s_m^\pm(v)$ с номерами $m \leq n$. Поэтому обсуждаемый ряд Маклорена (78) сходится при любом значении аргумента v , отличном от нуля функции $s_0^\pm(v)$. В рассматриваемом случае эта функция не равна нулю в точке $v = \infty$. Следовательно, функции $P^\pm(v, q)$ и $M_n^\pm(v)$ для $n = 0, 1, 2$, а следовательно, функции $a_1^\pm(v)$, и $r_1^\pm(v)$, заданные формулами

$$\begin{aligned} a_1^\pm(v) &\equiv -\frac{1}{M_0^\pm(v)} = -\frac{s_0^\pm(v)}{c_0^\pm(v)}, \\ r_1^\pm(v) &\equiv 2M_1^\pm(v) = \frac{2}{s_0^\pm(v)} \left[c_1^\pm(v) - s_1^\pm(v) \frac{c_0^\pm(v)}{s_0^\pm(v)} \right], \end{aligned} \quad (80)$$

ограничены в пределе $v \rightarrow \infty$, при этом функция $a_1^\pm(v)$ в $v = \infty$ принимает ненулевое значение. Поэтому и в определении (76) функции $K(v, q)$, и во всех соотношениях (78)–(80) можно положить $v = \infty$. В результате получится следующее представление предела $K^\pm(q)$ исследуемой функции $K^\pm(v, q)$:

$$K^\pm(q) = (\nu!)^2 q^{2\lambda+1} C_\lambda^2(\pm|\eta|) \operatorname{ctg} \delta_\lambda^\pm(q) - h(q) = \frac{c^\pm(q)}{s^\pm(q)} = -\frac{1}{a_1^\pm} + \frac{1}{2} r_1^\pm q^2 + t_1^\pm(q). \quad (81)$$

В этом представлении $a_1^\pm \neq 0$ и $r_1^\pm$ – предельные (при $v \rightarrow \infty$) значения функций $a_1^\pm(v)$ и $r_1^\pm(v)$, а остаточное слагаемое $t_1^\pm(q)$ убывает, как $O(q^4)$ при $q \rightarrow 0$. Поэтому в этом пределе обсуждаемое представление является низкоэнергетической асимптотикой функции $K^\pm(q)$. Функцию $K_1^\pm(q) = K^\pm(q)$ и коэффициенты $a_1^\pm$ и $r_1^\pm$ назовем функцией эффективного радиуса, длиной рассеяния и эффективным радиусом.

Функция эффективного радиуса для двумерного рассеяния суперпозицией потенциалов $V^c + V^s$ впервые исследована в работе [1], но только в случае $2\lambda = -1$. Полученное в этой работе представление данной функции совпадает с формулой (81), если в ней положить $\lambda = -1/2$.

Теперь поясним первый способ вычисления функций $K^\pm(v, q)$, $a_1^\pm(v)$ и $r_1^\pm(v)$. Сначала необходимо решить задачи Коши (27), (28) и (35), (36) для функций $c^\pm(v, q)$ и $s^\pm(v, q)$ и их компонент $c_n^\pm(v)$ и $s_n^\pm(v)$, $n = 0, 1$, а затем воспользоваться представлениями (76) и (80).

Предложим другой способ вычисления функций $K(v, q)$, $a_1^\pm(v)$ и $r_1^\pm(v)$, в котором не требуется решение упомянутых выше задач Коши.

Начнем с функции $K(v, q) = c^\pm(v, q)/s^\pm(v, q)$. Согласно условиям (28) в точке $v = 0$ функция $s^\pm(v, q)$ равна нулю. Следовательно, в этой точке функция $K(v, q)$ неограничена. Поэтому вместо нее удобнее использовать функцию $L^\pm(v, q)$, определенную равенствами

$$L^\pm(v, q) = \frac{1}{K^\pm(v, q)} = \frac{s^\pm(v, q)}{c^\pm(v, q)}$$

и равную нулю в точке $v = 0$. Выразим производную $\partial_v L^\pm$ через производные $\partial_v c^\pm$ и $\partial_v s^\pm$, которые заменим правыми частями уравнений (27), и в результате получим следующую нелинейную задачу:

$$2\partial_v L^\pm(v, q) = v^3 V(v) [f_\lambda^\pm(v, q) - L^\pm(v, q) \theta_\lambda^\pm(v, q)]^2, \quad v > 0; \quad L(v, q)|_{v=0} = 0.$$

Исследуем функцию $a_1^\pm(v) = -s_0^\pm(v)/c_0(v)$. Согласно начальным условиям (36) в точке $v = 0$ числитель этой дроби равен нулю. Поэтому $a_1^\pm(v) = 0$, если $v = 0$. Продифференцируем определение (80) функции $a_1^\pm(v)$ по переменной v , а затем заменим производные $\partial_v c_0^\pm$ и $\partial_v s_0^\pm$ правыми частями уравнений (35) и таким образом покажем, что функция $a_1^\pm(v)$ подчиняется нелинейной задаче

$$\partial_v a_1^\pm(v) = v^3 V(v) [f_{\lambda 0}^\pm(v) - a_1^\pm(v) \theta_{\lambda 0}^\pm(v)]^2, \quad v > 0; \quad a_1^\pm(v)|_{v=0} = 0.$$

Теперь сформулируем и решим задачу Коши для функции $r_1^\pm(v)$. Если в ее определении (80) устремить аргумент v к нулю и заменить все компоненты $c_n^\pm(v)$ и $s_n^\pm(v)$, $n = 0, 1$, их асимптотиками, упомянутыми в теореме 6, то получится начальное условие $r_1^\pm(v) = 0$ при $v = 0$. Продифференцируем определение (80) функции $r_1^\pm(v)$ по переменной v . В полученном равенстве заменим производные $\partial_v c_n^\pm$ и $\partial_v s_n^\pm$, $n = 0, 1$, правыми частями соответствующих уравнений (35), а затем, используя формулы (80), выразим все комбинации компонент $c_n^\pm(v)$ и $s_n^\pm(v)$, $n = 0, 1$, через функции $a_1^\pm(v)$ и $r_1^\pm(v)$. В итоге получим следующую задачу Коши:

$$\partial_v r_1^\pm(v) + \xi^\pm(v) [(r_1^\pm(v) - \phi^\pm(v))] = 0, \quad v > 0; \quad r_1^\pm(v)|_{v=0} = 0,$$

где по определению

$$\xi^\pm(v) \equiv 2v^3 V(v) f_{\lambda 0}^\pm(v) \left[\frac{f_{\lambda 1}^\pm(v)}{a_1^\pm(v)} - \theta_{\lambda 0}^\pm \right], \quad \phi^\pm(v) \equiv \frac{2}{f_{\lambda 0}^\pm(v)} \left[\frac{f_{\lambda 1}^\pm(v)}{a_1^\pm(v)} - \theta_{\lambda 1}^\pm(v) \right].$$

Единственное решение такой задачи Коши имеет вид

$$r_1^\pm(v) = \frac{1}{z^\pm(v)} \int_0^v \partial_t z^\pm(t) \phi^\pm(t) dt, \quad z^\pm(v) \equiv \exp \left(\int_0^v \xi^\pm(t) dt \right),$$

и поэтому является интегральным представлением функции $r_1^\pm(v)$ через $a_1^\pm(v)$.

СЛУЧАЙ 2. Предположим, что в точке $v = \infty$ функция $s_0^\pm(v)$ обращается в нуль, а функция $s_1^\pm(v)$ принимает ненулевое значение $s_1^\pm$. По теореме 6 функция $c_0^\pm(v)$ отлична от нуля при $v = \infty$. Итак, $s_0^\pm = 0$, $s_1^\pm \neq 0$ и $c_0^\pm \neq 0$. Следовательно, длина рассеяния $a_1^\pm = -s_0^\pm/c_0^\pm$ равна нулю, и поэтому необходимо переопределить

функцию эффективного радиуса. Для этого сначала рассмотрим представление функции $K(q)$ в виде дроби (77), содержащей предельные значения компонент $c_n^\pm(v)$ и $s_n^\pm(v)$. Так как $s_0^\pm = 0$, $s_1^\pm \neq 0$ и $c_0^\pm \neq 0$, произведение $K_2^\pm \equiv q^2 K^\pm(q)$ при $q \rightarrow 0$ равно конечной и ненулевой константе. Поэтому в рассматриваемом случае такое произведение мы считаем функцией эффективного радиуса. Представим ее формулами

$$\begin{aligned} K_2^\pm(q) &\equiv \lim_{v \rightarrow \infty} q^2 K(v, q) = (\nu!)^2 q^{2\lambda+3} C_\lambda^2(\pm|\eta|) \operatorname{ctg} \delta_\lambda^\pm(q) - q^2 h(q) = \\ &= -\frac{1}{a_2^\pm} + \frac{1}{2} q^2 r_2^\pm + t_2^\pm(q), \end{aligned} \quad (82)$$

где $t_2^\pm(q) = O(q^4)$ при $q \rightarrow 0$, а длина рассеяния $a_2^\pm$ и эффективный радиус $r_2^\pm$ определяются соответствующими пределами:

$$a_2^\pm \equiv -\lim_{v \rightarrow 0} \frac{s_1^\pm(v)}{c_0^\pm(v)}, \quad r_2^\pm \equiv \lim_{v \rightarrow 0} \frac{2}{s_1^\pm(v)} \left[c_1^\pm(v) + \frac{s_2^\pm(v)}{a_2^\pm(v)} \right].$$

СЛУЧАЙ 3. Пусть в точке $v = \infty$ функция $c_0^-(v)$ обращается в нуль, но функция $c_1^-(v)$ принимает ненулевое значение c_1^- . Тогда по теореме 6 $s_0^- \equiv s_0^-(v) \neq 0$ при $v = \infty$. Итак, $c_0^- = 0$, $c_1^- \neq 0$ и $s_0^- \neq 0$. Следовательно, длина рассеяния $a_1^- = -s_0^-/c_0^-$ не является конечным числом, и поэтому требуется переопределение функции эффективного радиуса. Для этого воспользуемся представлением функции $K(q)$ в виде дроби (77). Так как $c_0^- = 0$, $c_1^- \neq 0$ и $s_0^- \neq 0$, произведение $K_3^\pm \equiv q^{-2} K^\pm(q)$ в пределе $q \rightarrow 0$ равно конечной и ненулевой константе. Поэтому в рассматриваемом случае такое произведение мы считаем функцией эффективного радиуса. Представим ее формулами

$$\begin{aligned} K_3^-(q) &\equiv \lim_{v \rightarrow \infty} q^{-2} K^-(v, q) = (\nu!)^2 q^{2\lambda-1} C_\lambda^2(-|\eta|) \operatorname{ctg} \delta_\lambda^-(v, q) - q^{-2} h(q) = \\ &= -\frac{1}{a_3^-} + \frac{1}{2} q^2 r_3^- + t_3^-(q), \end{aligned} \quad (83)$$

где остаточное слагаемое $t_3^-(q)$ при $q \rightarrow 0$ убывает, как $O(q^4)$, а длина рассеяния $a_3^\pm$ и эффективный радиус $r_3^\pm$ определены следующими предельными соотношениями:

$$a_3^- \equiv -\lim_{v \rightarrow 0} \frac{s_0^-(v)}{c_1^-(v)}, \quad r_3^- \equiv \lim_{v \rightarrow 0} \frac{2}{s_0^-(v)} \left[c_2^-(v) + \frac{s_1^-(v)}{a_3^-(v)} \right].$$

5.3. Асимптотики парциальных фаз и сечений. Выведем и обсудим старшие слагаемые низкоэнергетических (при $q \rightarrow 0$) асимптотик кулоновской фазы $\delta_\lambda^c(\pm|\eta|)$, ядерно-кулоновской фазы $\delta_\lambda^\pm(q) = \delta_\lambda(\pm|\eta|)$ и трех слагаемых парциального сечения $\sigma_\lambda^c(\pm|\eta|)$: кулоновского $\sigma_\lambda^c(\pm|\eta|)$, ядерно-кулоновского $\sigma_\lambda^\pm(q) = \sigma_\lambda(\pm|\eta|)$ и интерференционного $\sigma_\lambda^{\text{int}}(\pm|\eta|)$ сечений. Используем определения (6), (7) таких сечений и определения (81)–(83) функций эффективного радиуса. Согласно правилу, принятому в разделе 2, в символе $A(\pm|\eta|)$ или $B^\pm(q)$ берем верхний знак в случае кулоновского отталкивания, а нижний – в случае кулоновского притяжения.

Начнем с обсуждения поведения фазы $\delta_\lambda^c(\eta)$ и сечения $\sigma_\lambda^c(\eta)$ кулоновского рассеяния при $q \rightarrow 0$. В этом пределе согласно формуле (18) модули фаз $\delta_\lambda^c(+|\eta|)$ и $\delta_\lambda^c(-|\eta|)$

неограниченно возрастают, как $O(q^{-1}|\ln q|)$, поэтому сечения $\sigma_\lambda^c(+|\eta|)$ и $\sigma_\lambda^c(-|\eta|)$ быстро осциллируют, а их максимальные значения увеличиваются, как $O(q^{-1})$.

Теперь рассмотрим те же три случая, что и в предыдущем пункте.

СЛУЧАЙ 1. Воспользуемся представлением (81) функции эффективного радиуса $K_1^\pm(q) \equiv K(q)$. Сначала выразим тангенс фазы $\delta_\lambda^\pm(q)$ через коэффициенты $a_1^\pm$ и $r_1^\pm$ и функции C_λ^2 и h . Затем заменим эти функции их асимптотиками (17) и (25) и в итоге докажем, что

$$\operatorname{tg} \delta_\lambda^\pm(q) = -a_1^\pm (\nu!)^2 q^\nu C_\lambda^2(\pm\eta) [1 + O(q^2)] \sim -\pi a_1^\pm \begin{Bmatrix} e^{-\pi/q} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad q \rightarrow 0. \quad (84)$$

Следовательно, в пределе $q \rightarrow 0$ фаза $\delta_\lambda^+(q)$ быстро убывает, а фаза $\delta_\lambda^-(q)$ сходится к своему значению $\delta_\lambda^-(0) \equiv -\operatorname{arctg}(\pi a_1^-)$ в точке $q = 0$. Поэтому верны приближения

$$\sigma_\lambda^+(q) \sim \frac{|R|}{q} \varepsilon_\lambda (2\pi a_1^+)^2 e^{-2\pi/q}, \quad \sigma_\lambda^-(q) \sim \frac{|R|}{q} \varepsilon_\lambda \frac{(2\pi a_1^-)^2}{1 + (\pi a_1^-)^2}, \quad q \rightarrow 0. \quad (85)$$

Следовательно, в пределе $q \rightarrow 0$ сечение σ_λ^- растет, как $O(q^{-1})$, а сечение σ_λ^+ быстро убывает и экспоненциально мало по сравнению с сечением σ_λ^c .

Из формул (18) и (84) следует, что $|\delta_\lambda^c(\pm|\eta|)| \gg |\delta_\lambda^\pm(q)|$ при $q \rightarrow 0$. Поэтому

$$\sigma_\lambda^{\text{int}}(\pm|\eta|) \sim 4 \frac{|R|}{q} \varepsilon_\lambda \sin[2\delta_\lambda^c(\pm|\eta|)] \begin{Bmatrix} -\pi a_1^\pm e^{-\pi/q} \\ \sin \delta_\lambda^-(0) \end{Bmatrix}, \quad q \rightarrow 0.$$

Следовательно, в пределе $q \rightarrow 0$ сечение $\sigma_\lambda^{\text{int}}(+|\eta|)$, осциллируя, сходится к нулю, сечение $\sigma_\lambda^{\text{int}}(-|\eta|)$ тоже осциллирует, но амплитуда его осцилляций возрастает, как $O(q^{-1})$.

СЛУЧАЙ 2. Используя определение (82) функции эффективного радиуса и те же приемы, что и в случае 1, нетрудно вывести асимптотические (при $q \rightarrow 0$) соотношения

$$\delta_\lambda^\pm(q) \sim -\pi a_2^\pm q^2 \begin{Bmatrix} e^{-\pi/q} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \sigma_\lambda^\pm(q) \sim (2\pi a_2^\pm)^2 |R| \varepsilon_\lambda q^3 \begin{Bmatrix} e^{-2\pi/q} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (86)$$

а затем показать, что

$$\sigma_\lambda^{\text{int}}(\pm|\eta|) \sim -4\pi a_1^\pm |R| q \varepsilon_\lambda \sin[2\delta_\lambda^c(\pm|\eta|)] \begin{Bmatrix} e^{-\pi/q} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad q \rightarrow 0.$$

В данном случае в отличие от предыдущего фаза δ_λ^- и сечения σ_λ^- , $\sigma_\lambda^{\text{int}}(-|\eta|)$ монотонно сходятся к нулю при $q \rightarrow 0$.

СЛУЧАЙ 3. В этом случае функция эффективного радиуса определяется соотношениями (83). Согласно формуле (25) в первом из них $q^{-2}h(q) = -1/6 + O(q^2)$. Поэтому при $q \rightarrow 0$

$$\operatorname{tg} \delta_\lambda^-(q) \sim \psi(q) \equiv -\frac{6\pi}{q^2} \frac{a_3^-}{6 + a_3^-(1 - 3q^2 r_3^-)}, \quad \sigma_\lambda^-(q) \sim 4 \frac{|R|}{q} \varepsilon_\lambda \frac{\psi^2(q)}{1 + \psi^2(q)}. \quad (87)$$

Следовательно, в пределе $q \rightarrow 0$ фаза δ_λ^- сходится к числу $-\alpha_3\pi/2$, где α_3 – знак коэффициента a_3^- или r_3^- , если $a_3^- \neq -6$ или $a_3^- = -6$. Из-за этой особенности фазы δ_λ^- сечение σ_λ^- содержит квадрат функции $\sin \delta_\lambda^c(-|\eta|)$ и растет, как $O(q^{-1})$:

$$\sigma_\lambda^{\text{int}}(-|\eta|) \sim 4 \frac{|R|}{q} \varepsilon_\lambda \sin^2 \delta_\lambda^c(-|\eta|), \quad q \rightarrow 0.$$

5.4. Асимптотики нормировочных множителей и волновых функций.

Рассмотрим поведение множителя $N^\pm(q)$ при $q \rightarrow 0$. Для этого в определении (29) заменим функции C_λ^2 и h их асимптотиками (17) и (25), а функции $c^\pm(v)$ и $s^\pm(v)$ представим в виде (71) с $m = 1$. Затем воспользуемся свойствами предельных (при $v \rightarrow \infty$) значений $c_0^\pm$ и $s_0^\pm$ компонент $c_0^\pm(v)$ и $s_0^\pm(v)$, а именно тем, что $c_0^+ \neq 0$, а если $c_0^- = 0$, то $s_0^- \neq 0$, и наоборот. Благодаря этим соотношениям в любом из случаев 1–3, рассмотренных в пп. 5.2 и 5.3, имеем

$$N^+(q) = \frac{1}{|c_0^\pm|} + O(q^2), \quad N^-(q) = \frac{1}{\sqrt{(c_0^-)^2 + (\pi s_0^-)^2}} + O(q^2), \quad q \rightarrow 0.$$

Теперь исследуем радиальную волновую функцию u_λ , представленную формулами (32) через функции $f_\lambda^\pm$, $\theta_\lambda^\pm$ и $c^\pm$, $s^\pm$. Как известно [4], в пределе $q \rightarrow 0$ при любом $v \geq 0$ разложения (33) функций $f_\lambda^\pm$ и $\theta_\lambda^\pm$ сходятся к компонентам $f_{\lambda 0}^\pm$ и $\theta_{\lambda 0}^\pm$, которые согласно формулам (46) пропорциональны функциям Бесселя. В силу теоремы 7 в пределе $q \rightarrow 0$ разложения (34) функций $c^\pm(v, q)$ и $s^\pm(v, q)$ вырождаются в компоненты $c_0^\pm(v)$ и $s_0^\pm(v)$. Следовательно, в представлении (32) можно перейти к пределу $q \rightarrow 0$ и, используя приведенные выше асимптотики множителя $N^\pm$, получить два предельных соотношения: в случае кулоновского отталкивания

$$u_{\lambda 0}^+(v) \equiv \lim_{q \rightarrow 0} \frac{u_\lambda(\rho, +|\eta|)}{q^{\lambda+1} C_\lambda(+|\eta|)} = \frac{\nu!}{2|c_0^+|} [c_0^+(v) I_\nu(v) + 2s_0^+(v) K_\nu(v)],$$

а в случае кулоновского притяжения

$$u_{\lambda 0}^-(v) \equiv \lim_{q \rightarrow 0} \frac{u_\lambda(\rho, -|\eta|)}{q^{\lambda+1} C_\lambda(-|\eta|)} = \frac{\nu!}{2\sqrt{(c_0^-)^2 + (\pi s_0^-)^2}} [c_0^-(v) J_\nu(v) - \pi s_0^-(v) Y_\nu(v)].$$

Сформулируем два следствия этих предельных соотношений. Во-первых, произведение функций $q^{\lambda+1} C_\lambda(\pm|\eta|)$ и $u_{\lambda 0}^\pm(v)$ является старшим слагаемым низкоэнергетической асимптотики волновой функции $u_\lambda(\rho, \pm|\eta|)$. Во-вторых, функция $u_{\lambda 0}^\pm(v)$ является единственным решением исходной краевой задачи Шредингера (3)–(5) в случае нулевой полной энергии E .

5.5. Условия существования длины рассеяния и эффективного радиуса. Выясним, как должен убывать потенциал $V(v)$ в пределе $v \rightarrow \infty$, чтобы во всех случаях 1–3 длина рассеяния и эффективный радиус оказались конечными константами. Для этого используем соотношения (2), содержащие параметр β , и в каждом из случаев 1–3 найдем соответствующее число, которое этот параметр должен превышать.

По определению короткодействующий потенциал V удовлетворяет условиям (2) при любом сколь угодно большом значении параметра β . Поэтому для такого потенциала при любом сколь угодно большом номере m леммы 1–3 и теоремы 1–7 остаются в силе. Следовательно, разложения (71) существуют в пределе $m \rightarrow \infty$ и вырождаются в этом пределе в бесконечные ряды, а все компоненты $c_n^\pm(v)$ и $s_n^\pm(v)$, $n = 0, 1, \dots$, этих рядов в точке $v = \infty$ принимают конечные значения $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$. Как показано в п. 5.2, длины рассеяния $a_1^\pm$, $a_2^\pm$, $a_3^\pm$ и эффективные радиусы $r_1^\pm$, $r_2^\pm$, $r_3^\pm$ выражаются через предельные значения $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$, $n = 0, 1, 2$. Следовательно, в случае короткодействующего потенциала V все такие длины рассеяния и эффективные радиусы существуют и являются конечными константами. Поэтому верны все асимптотические соотношения, выведенные в пп. 5.2–5.4.

Считая условия (1) выполненными, рассмотрим те же три случая, что и в п. 5.2.

СЛУЧАЙ 1. Согласно формулам (80) длина рассеяния $a_1^\pm = -s_0^\pm/c_0^\pm$, где $c_0^\pm$ и $s_0^\pm$ – значения функций $c_0^\pm(v)$ и $s_0^\pm(v)$ в точке $v = \infty$. Как показано в теоремах 3 и 6, такие значения существуют и являются конечными, если выполнены условия (8). Согласно последнему из них $V(v) = o(v^{-4})$ при $v \rightarrow \infty$ для $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$. Теперь заметим, что коэффициент $-1/a_1^\pm$ будет старшим слагаемым низкоэнергетической асимптотики (81) функции эффективного радиуса, если следующее слагаемое такой асимптотики будет сходиться к нулю, как $O(q^2)$. Для такой сходимости согласно теореме 7 должны существовать разбиения (71) с номером $m = 1$. Для этого достаточным является условие (2), в котором $2\beta > 3(m + 1)$, а $m = 1$. Следовательно, длина рассеяния $a_1^\pm$ существует, если в условии (2) параметр $\beta > 3$. Приближения (84) и (85) фазы $\delta_\lambda^\pm$ и сечения $\sigma_\lambda^\pm$ содержат единственный параметр – длину рассеяния $a_1^\pm$. Поэтому эти приближения и все выведенные в п. 5.4 асимптотики справедливы при том же условии (2) с $\beta > 3$. Если кулоновский потенциал $2\eta/\rho$ является притягивающим ($\alpha = -1$), то условию (2) с $\beta > 3$ удовлетворяет довольно медленно убывающий потенциал V , например потенциал с асимптотикой $V = O(v^{-2p})$ при $v \rightarrow \infty$, в которой $p > \beta > 3$.

Теперь выявим условия, достаточные для существования эффективного радиуса $r_1^\pm$. Согласно формулам (80) этот параметр представляется через значения $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$ функций $c_n^\pm(v)$ и $s_n^\pm(v)$ в точке $v = \infty$ (для $n \leq m = 1$). Как показано в теоремах 3 и 6, такие значения существуют и являются конечными при условиях (2), в которых $\beta > 3(m + 1)$, а $m = 1$. Слагаемое $q^2 r_1^\pm$ будет слагаемым низкоэнергетической асимптотики (81) функции эффективного радиуса, если следующее слагаемое такой асимптотики будет сходиться к нулю, как $O(q^4)$. Согласно теореме 7 для этого должны существовать разбиения (71) с номером $m = 2$. Такие разбиения, а значит, и эффективный радиус $r_1^\pm$, существуют при условиях (2), в которых $2\beta > 3(m + 1)$, а $m = 2$. Эти условия являются достаточными и означают, что $\beta > 9/2$.

СЛУЧАИ 2 и 3. Используя определения (82) и (83) функций эффективного радиуса и те же способы, что и в рассмотренном выше случае 1, нетрудно прийти к следующим выводам. Условия (2), в которых $\beta > 3(m + 1)$, а $m = 2$, являются достаточными для существования длин рассеяния $a_2^\pm$ и $a_3^\pm$ и приближений (86) фазы $\delta_\lambda^\pm$ и сечения $\sigma_\lambda^\pm$. При условиях (2), в которых $\beta > 3(m + 1)$, а $m = 3$, заведомо существуют эффективные радиусы $r_2^\pm$ и $r_3^\pm$, а фаза δ_λ^- и сечение σ_λ^- имеют асимптотики (87).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе впервые дано расширение теории двумерного потенциального рассеяния на случай суперпозиции кулоновского и центрального короткодействующего потенциалов. В разделах 3 и 4 предложен и обоснован асимптотический в пределе низких энергий метод. Ключевой является рекуррентная по номеру $n = 0, 1, \dots$ и энергонезависимая цепочка линейных задач Коши (35), (36) для компонент $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$. Доказано, что при любом значении квантового числа λ эта цепочка однозначно разрешима в классе функций, непрерывных на полуоси $v \geq 0$. В разделе 5 предложенный метод применен для вывода и анализа низкоэнергетических приближений функции эффективного радиуса, радиальных волновых функций, парциальных фаз и сечений двумерного ядерно-кулоновского рассеяния. Такие приближения получены впервые и в качестве неизвестных функций содержат лишь компоненты $c_n^\pm$ и $s_n^\pm$ с $n \leq 2$, вычисление которых не может вызвать каких-либо принципиальных затруднений.

Список литературы

- [1] D. Bollé, F. Gesztesy, “Scattering observables in arbitrary dimension $n \geq 2$ ”, *Phys. Rev. A*, **30**:3 (1984), 1279–1293.
- [2] H. Friedrich, *Scattering Theory*, Lecture Notes in Physics, **872**, Springer, Berlin, 2013.
- [3] В. В. Бабилов, *Метод фазовых функций в квантовой механике*, Наука, М., 1976.
- [4] В. В. Пупышев, “Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы: строение радиальных волновых функций”, *ТМФ*, **186**:1 (2016), 123–141.
- [5] В. В. Пупышев, “Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы: волновые функции и функции Грина”, *ТМФ*, **186**:2 (2016), 252–271.
- [6] В. В. Пупышев, “Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы: низкоэнергетические асимптотики”, *ТМФ*, **188**:1 (2016), 49–75.
- [7] В. В. Пупышев, “Метод амплитудных функций в теории двумерного рассеяния”, *ТМФ*, **191**:1 (2017), 34–62.
- [8] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1976.
- [9] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2: *Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.
- [10] Б. М. Будаков, С. В. Фомин, *Кратные интегралы и ряды*, Физматлит, М., 2002.

Поступила в редакцию 5.09.2016