Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Сяо Ян, Цзя-Янь Хань, Алгебро-геометрические решения иерархии Дирака, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 3, 563–574

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:54:54

© 2017 г.

Сяо Ян*, Цзя-Янь Хань*

АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ИЕРАРХИИ ДИРАКА

Введено уравнение Ленарда, приведены два его специальных решения. Первое решение используется для вывода расширенной иерархии Дирака, второе решение применяется для построения производящей функции. Производящая функция дает сохраняющиеся интегралы гамильтоновой системы Дирака и определяет алгебраическую кривую. На основе теории алгебраических кривых доказано, что гамильтонова система Дирака является интегрируемой, и получены алгебро-геометрические решения иерархии Дирака.

Ключевые слова: уравнение Ленарда, иерархия Дирака, алгебро-геометрическое решение.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9273>

1. ВВЕДЕНИЕ

Иерархия Дирака, или система Дирака, неоднократно исследовалась, поскольку она играет важную роль в математике и физике. В этом направлении были получены многочисленные интересные результаты. Обратные задачи для системы Дирака в различных условиях обсуждались в работах [1]–[5]. Проведены исследования алгебры симметрии Вирасоро иерархии Дирака [6]. N -кратное преобразование Дарбу и солитонные решения для нелинейной системы Дирака были получены в работе [7]. Новое суперрасширение иерархии Дирака рассматривалось в работе [8]. Симплектическая реализация и координаты действие–угол для системы Ли–Пуассона иерархии Дирака описаны в статье [9]. Однако работы по алгебро-геометрическим решениям иерархии Дирака по-прежнему отсутствуют.

Целью настоящей работы является получение алгебро-геометрического решения. Для этого следует использовать уравнение Ленарда [10]–[13] для вывода расширенной иерархии Дирака, которая содержит иерархию Дирака. Отличие заключается в том, что новая иерархия начинается с системы линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, что, по нашему мнению,

Работа выполнена при поддержке National Natural Science Foundation of China (№ 11331008).

*School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou, Henan, China.
E-mail: yx@zzu.edu.cn

представляет собой редкий случай для других иерархий. Рассмотрение в настоящей работе показывает, что существование этих линейных уравнений первого порядка вполне осмысленно, поскольку это гарантирует полноту и точность интегрируемости расширенной иерархии Дирака, на основании чего получены алгебро-геометрические решения иерархии Дирака.

На самом деле иерархия Дирака, рассматриваемая здесь, ассоциирована с линейной проблемой Дирака [5]

$$\chi_x = \begin{pmatrix} u & -\lambda + v \\ \lambda + v & -u \end{pmatrix} \chi, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

которую можно превратить в стандартную линейную задачу Захарова–Шабата (ЗС) на $\tilde{\chi}$, где

$$\tilde{\chi} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \chi, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Из стандартной задачи ЗС выводятся многие интегрируемые иерархии. Были исследованы алгебро-геометрические решения соответствующих уравнений: нелинейное уравнение Шредингера, уравнение синус-Гордон и т. д. [14]–[16]. Указанная выше связь между двумя линейными задачами означает, что существуют некоторые преобразования между решениями иерархии Дирака и решениями уравнений, вытекающих из задачи ЗС. В следующем разделе мы приводим два соответствующих примера.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 рассматриваются расширенная иерархия Дирака и соответствующая пара Лакса. В разделе 3 определена производящая функция для вывода двух сохраняющихся интегральных наборов гамильтоновой системы Дирака. В разделе 4 с использованием теории алгебраических кривых доказана интегрируемость гамильтоновой системы Дирака. В разделе 5 алгебро-геометрические решения иерархии Дирака представлены в виде римановой тета-функции с помощью инверсии Якоби.

2. РАСШИРЕННАЯ ИЕРАХИЯ ДИРАКА

В данном разделе расширенная иерархия Дирака определена с помощью уравнения Ленарда и приведена соответствующая пара Лакса. Для удобства сначала введем матрицы Паули

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям $[\sigma_3, \sigma_+] = 2\sigma_+$, $[\sigma_3, \sigma_-] = -2\sigma_-$, $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_3$. В этом случае спектральная задача Дирака [5] может быть записана в виде

$$\chi_x = U\chi, \quad U = u\sigma_3 + (-\lambda + v)\sigma_2 + (\lambda + v)\sigma_1, \quad (2.1)$$

где u и v – потенциалы, и предполагается, что их производные стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, λ – постоянный специальный параметр. Рассмотрим следующую пару операторов Ленарда:

$$K = \begin{pmatrix} \partial_x & v & -v \\ 2v & \partial_x - 2u & 0 \\ 4v & \partial_x - 2u & -\partial_x - 2u \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Тогда для любой гладкой функции $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)^T$ имеем, что матрица $V = \sigma_\lambda(\gamma) \triangleq \gamma^1 \sigma_3 + \gamma^2 \sigma_2 + \gamma^3 \sigma_1$ удовлетворяет фундаментальному тождеству $V_x - [U, V] = \hat{\sigma}_\lambda\{(K - \lambda J)\gamma\}$, где $\hat{\sigma}_\lambda(\xi) = \xi^1 \sigma_3 + \xi^2 \sigma_2 + (\xi^2 - \xi^3) \sigma_1$, $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)^T$. Таким образом, из теории линейных дифференциальных уравнений мы знаем, что $\det \sigma_\lambda(\gamma)$ является постоянной вдоль x -потока в том случае, когда γ дает решение уравнения Ленарда

$$(K - \lambda J)\gamma = 0. \quad (2.3)$$

Предположим, что уравнение Ленарда (2.3) имеет решение g_λ : $g_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} g_{j-1} \lambda^{-j}$. Поскольку $\det \sigma_\lambda(\gamma)$ неизменно вдоль x -потока, то, принимая во внимание асимптотический предел, можно считать, что $\det \sigma_\lambda(g_\lambda) = 1$. Подставим g_λ в (2.3), тогда формула рекурсии Ленарда дает

$$Jg_{-1} = 0, \quad K g_{j-1} = Jg_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Таким образом, последовательность специальных решений $\{g_j\}$ может быть представлена в явном виде, и первые четыре имеют вид

$$g_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_0 = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} v_x \\ -\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} u_x \\ \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} u_x \end{pmatrix},$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} u_{xx} + \frac{1}{2} u^3 + \frac{1}{2} uv^2 \\ -\frac{1}{4} v_{xx} + \frac{1}{2} u_x v - \frac{1}{2} uv_x + \frac{1}{2} v^3 + \frac{1}{2} u^2 v \\ -\frac{1}{4} v_{xx} - \frac{1}{2} u_x v + \frac{1}{2} uv_x + \frac{1}{2} v^3 + \frac{1}{2} u^2 v \end{pmatrix}.$$

Пусть P является проекцией: $(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)^T \mapsto (\gamma^1, \gamma^2)^T$. Тогда векторные поля $\{X_j\}$ из (2.1) – это

$$X_j = P(Jg_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Допустим, что $\gamma_m = \sum_{j=0}^m g_{j-1} \lambda^{m-j}$, $V_m = \sigma_\lambda(\gamma_m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Согласно уравнению нулевой кривизны $U_{\tau_m} - V_{m,x} + [U, V_m] = 0$ расширенная иерархия Дирака представляется в виде

$$(u, v)_{\tau_m}^T = X_m \quad (2.6)$$

с парой Лакса U и V_m . Обозначим $\tau_1 = x$, $\tau_2 = y$, $\tau_3 = t$, при этом первые четыре уравнения Дирака записываются в виде

$$u_{\tau_0} = -2v, \quad v_{\tau_0} = 2u, \quad (2.7)$$

$$u_x = u_x, \quad v_x = v_x, \quad (2.8)$$

$$u_y = \frac{1}{2} v_{xx} - u^2 v - v^3, \quad v_y = -\frac{1}{2} u_{xx} + uv^2 + u^3, \quad (2.9)$$

$$u_t = -\frac{1}{4} u_{xxx} + \frac{3}{2} u_x v^2 + \frac{3}{2} u_x u^2, \quad v_t = -\frac{1}{4} v_{xxx} + \frac{3}{2} v_x u^2 + \frac{3}{2} v_x v^2, \quad (2.10)$$

а соответствующие пары Лакса

$$(2.7): \quad U = V_1, \quad V_0 = \sigma_\lambda(g_{-1}),$$

$$(2.8): \quad U = V_1, \quad V_1 = \lambda\sigma_\lambda(g_{-1}) + \sigma_\lambda(g_0) = \lambda V_0 + \sigma_\lambda(g_0),$$

$$(2.9): \quad U = V_1, \quad V_2 = \lambda^2\sigma_\lambda(g_{-1}) + \lambda\sigma_\lambda(g_0) + \sigma_\lambda(g_1) = \lambda V_1 + \sigma_\lambda(g_1),$$

$$(2.10): \quad U = V_1, \quad V_3 = \lambda^3\sigma_\lambda(g_{-1}) + \lambda^2\sigma_\lambda(g_0) + \lambda\sigma_\lambda(g_1) + \sigma_\lambda(g_2) = \lambda V_2 + \sigma_\lambda(g_2).$$

Очевидно, уравнения (2.7) представляют собой систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и имеют следующее общее решение:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-2i\tau_0} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{2i\tau_0}$$

с произвольными постоянными c_1 и c_2 . Остальные уравнения представляют собой обычную иерархию Дирака, их решение будет представлено в следующих разделах.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Положим $Q = u + iv$. В силу уравнения (2.9) $Q(x, -y)$ удовлетворяет нелинейному уравнению Шредингера

$$iQ_y = -\frac{1}{2}Q_{xx} + |Q|^2Q.$$

В силу уравнения (2.10) $Q(x, t)$ удовлетворяет комплексному модифицированному уравнению Кортевега–де Фриза

$$Q_t = -\frac{1}{4}Q_{xxx} + \frac{3}{2}|Q|^2Q_x,$$

которое обычно рассматривается на основе иерархии ЗС [17], или иерархии Абловица–Каупа–Ньюэла–Сигура [18].

3. ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА H_1 И ЕЕ ДВЕ СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

В данном разделе вводится гамильтонова система H_1 , соответствующая задаче (2.1). Представлена матрица Мозера V_λ , ее определитель дает генерирующую функцию F_λ . Соответственно, построены две системы сохраняющихся интегралов.

В фазовом пространстве $(\mathbb{R}^{2N}, dp \wedge dq)$ рассмотрим гамильтонову систему конечной размерности

$$H_1 = -\frac{1}{2}\langle p, q \rangle^2 + \frac{1}{2}\langle Ap, p \rangle + \frac{1}{2}\langle Aq, Aq \rangle - \frac{1}{8}(\langle q, q \rangle - \langle p, p \rangle)^2,$$

$$\partial_x \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H_1}{\partial q} \\ \frac{\partial H_1}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle p, q \rangle & -A + \frac{\langle q, q \rangle - \langle p, p \rangle}{2} \\ A + \frac{\langle q, q \rangle - \langle p, p \rangle}{2} & -\langle p, q \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ представляет собой скалярное произведение векторов, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ – различные спектральные параметры, $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ – диагональная матрица. При условии

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle p, q \rangle \\ \frac{1}{2}(\langle q, q \rangle - \langle p, p \rangle) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

j -й компонент системы (3.1) просто представляет собой спектральную задачу (2.1), которую мы называем гамильтоновой системой Дирака. Данная процедура получения гамильтоновой системы спектральной задачи является бинарным нелинеаризованным методом [19], [20], который весьма эффективен для исследования интегрируемых систем.

Введем обозначение $Q_\lambda(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^N \xi_j \eta_j / (\lambda - \lambda_j)$. При условии (3.2) прямые вычисления дают

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(p(x), q(x))^T$ – решение системы (3.1), тогда

$$G_\lambda = (Q_\lambda(p, q), -1 - Q_\lambda(p, p), 1 + Q_\lambda(q, q))^T \quad (3.3)$$

представляет собой решение уравнения Ленарда (2.3). Следовательно, уравнение Лакса $\partial_x V = [U, V]$ имеет решение

$$V_\lambda = \lambda \sigma_\lambda(G_\lambda) = \lambda Q_\lambda(p, q) \sigma_3 + \lambda(-1 - Q_\lambda(p, p)) \sigma_2 + \lambda(1 + Q_\lambda(q, q)) \sigma_1, \quad (3.4)$$

которое является так называемой матрицей Мозера [21], [22].

СЛЕДСТВИЕ 1. Гамильтонова система (3.1) имеет сохраняющийся интеграл

$$F_\lambda = \det V_\lambda = \lambda^2 [-Q_\lambda^2(p, q) + (1 + Q_\lambda(p, p))(1 + Q_\lambda(q, q))]. \quad (3.5)$$

Разложение в степенной ряд F_λ дает систему сохраняющихся интегралов $\{F_m\}$:

$$F_\lambda = \lambda^2 + \sum_{m=0}^{\infty} F_m \lambda^{-m+1}. \quad (3.6)$$

Первые четыре из них записываются как

$$\begin{aligned} F_0 &= \langle q, q \rangle + \langle p, p \rangle, \\ F_1 &= -\langle p, q \rangle^2 + \langle Ap, p \rangle + \langle Aq, q \rangle + \langle p, p \rangle \langle q, q \rangle, \\ F_2 &= -2\langle Ap, q \rangle \langle p, q \rangle + \langle A^2 p, p \rangle + \langle A^2 q, q \rangle + \\ &\quad + \langle Ap, p \rangle \langle q, q \rangle + \langle p, p \rangle \langle Aq, q \rangle, \\ F_3 &= -2\langle A^2 p, q \rangle \langle p, q \rangle - \langle Ap, q \rangle^2 + \langle A^3 p, p \rangle + \langle A^3 q, q \rangle + \\ &\quad + \langle A^2 p, p \rangle \langle q, q \rangle + \langle p, p \rangle \langle A^2 q, q \rangle + \langle Ap, p \rangle \langle Aq, q \rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Интеграл F_λ представляет собой не только генерирующую функцию сохраняющихся интегралов, но и базовый элемент для определения алгебраической кривой, которая важна для дальнейшего рассмотрения. Для решения уравнений, представленных в разделе 2, следует ввести иную систему интегралов $\{H_m\}$:

$$F_\lambda = \lambda^2 H_\lambda^2, \quad H_\lambda = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} H_m \lambda^{-m-1}, \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} F_0 = \frac{1}{2} (\langle q, q \rangle + \langle p, p \rangle), \\ H_1 &= \frac{1}{2} F_1 - \frac{1}{2} H_0^2 = -\frac{1}{2} \langle p, q \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle Ap, p \rangle + \frac{1}{2} \langle Aq, q \rangle - \frac{1}{8} (\langle q, q \rangle - \langle p, p \rangle)^2, \\ H_2 &= \frac{1}{2} F_2 - H_0 H_1, \quad H_3 = \frac{1}{2} F_3 - H_0 H_2 - \frac{1}{2} H_1^2. \end{aligned}$$

При условии (3.2) прямые расчеты показывают, что гамильтоновы системы

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{\tau_m} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H_m}{\partial q} \\ \frac{\partial H_m}{\partial p} \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, 3,$$

соответствуют спектральным задачам

$$\chi_{\tau_0} = V_0 \chi, \quad \chi_x = V_1 \chi, \quad \chi_y = V_2 \chi, \quad \chi_t = V_3 \chi$$

соответственно, что является составляющей пары Лакса уравнений (2.7)–(2.10).

4. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ H_1

В данном разделе мы приведем доказательство интегрируемости по Лиувиллю гамильтоновой системы (3.1) в два шага: во-первых, докажем инволютивность сохраняющихся интегралов и, во-вторых, докажем функциональную независимость сохраняющихся интегралов.

Для доказательства инволютивности сохраняющихся интегралов рассмотрим каноническое уравнение

$$\frac{d}{dt_\lambda} \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_\lambda}{\partial q_j} \\ \frac{\partial F_\lambda}{\partial p_j} \end{pmatrix} = W(\lambda, \lambda_j) \begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix}, \quad W(\lambda, \mu) = \frac{2\lambda}{\lambda - \mu} V_\lambda, \quad (4.1)$$

где t_λ обозначает переменную потока F_λ . Прямые расчеты с использованием (4.1) приводят к уравнению Лакса для матрицы Мозера V_μ вдоль t_λ -потока,

$$\frac{d}{dt_\lambda} V_\mu = [W(\lambda, \mu), V_\mu]. \quad (4.2)$$

Это означает, что $\frac{d}{dt_\lambda} \det V_\mu = 0$, т.е. $(F_\lambda, F_\mu) = 0$, где $(\cdot, \cdot)$ – скобка Пуассона в $(\mathbb{R}^{2N}, dp \wedge dq)$. Согласно определяющему уравнению (3.6) получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Сохраняющиеся интегралы $\{F_m\}$ инволютивны*

$$(F_j, F_k) = 0, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots$$

Для того чтобы доказать функциональную независимость сохраняющихся интегралов, рассмотрим разложения

$$F_\lambda = \frac{b(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \frac{R(\lambda)}{\alpha^2(\lambda)}, \quad (4.3)$$

$$\alpha(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - \lambda_j), \quad b(\lambda) = \prod_{j=1}^{N+2} (\lambda - \lambda_{N+j}), \quad R(\lambda) = \prod_{j=1}^{2N+2} (\lambda - \lambda_j),$$

и

$$\lambda G_\lambda^2 = \lambda(-1 - Q_\lambda(p, p)) = -\lambda \frac{m(\lambda)}{\alpha(\lambda)}, \quad \lambda G_\lambda^3 = \lambda(1 + Q_\lambda(q, q)) = \lambda \frac{n(\lambda)}{\alpha(\lambda)}, \quad (4.4)$$

$$m(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - \varepsilon_j), \quad n(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - \nu_j),$$

где $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N\}$ и $\{\nu_1, \dots, \nu_N\}$ являются эллиптическими координатами для гамильтоновой системы, генерированной интегралом F_λ . С учетом (4.2)–(4.4) видим, что вдоль t_λ -потока эллиптические координаты удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_j}{4\sqrt{-R(\varepsilon_j)}} \frac{d\varepsilon_j}{dt_\lambda} &= -\frac{\lambda^2 m(\lambda)}{(\lambda - \varepsilon_j)m'(\varepsilon_j)\alpha(\lambda)}, \\ \frac{\nu_j}{4\sqrt{-R(\nu_j)}} \frac{d\nu_j}{dt_\lambda} &= \frac{\lambda^2 n(\lambda)}{(\lambda - \nu_j)n'(\nu_j)\alpha(\lambda)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Теперь определим алгебраическую кривую $\Gamma: \xi^2 + R(\lambda) = 0$. Поскольку $\deg R(\lambda) = 2N + 2$, род кривой Γ – это $g = N$. Точка на кривой Γ может быть выражена как $P_l(\lambda) = (\lambda, \xi = (-1)^{l-1} \sqrt{-R(\lambda)})$, $l = 1, 2$. Рассматривая интерполяционную формулу полинома $f(\lambda)$:

$$\sum_{j=1}^g \frac{h(\lambda)f(\eta_j)}{(\lambda - \eta_j)h'(\eta_j)} = f(\lambda),$$

и полагая $f(\lambda) = \lambda^{g-k-1}$, $h(\lambda) = m(\lambda)$, $\eta_j = \varepsilon_j$ и $f(\lambda) = \lambda^{g-k-1}$, $h(\lambda) = n(\lambda)$, $\eta_j = \nu_j$, соответственно, уравнения (4.5) могут быть переписаны как

$$\sum_{j=1}^g \frac{\varepsilon_j^{g-k}}{4\sqrt{-R(\varepsilon_j)}} \frac{d\varepsilon_j}{dt_\lambda} = -\frac{\lambda^{g-k+1}}{\alpha(\lambda)}, \quad \sum_{j=1}^g \frac{\nu_j^{g-k}}{4\sqrt{-R(\nu_j)}} \frac{d\nu_j}{dt_\lambda} = \frac{\lambda^{g-k+1}}{\alpha(\lambda)}, \quad k = 1, \dots, g. \quad (4.6)$$

Пусть P_0 является неподвижной точкой на кривой Γ . Возьмем голоморфный дифференциал на кривой Γ :

$$\tilde{\omega}_k = \frac{\lambda^{g-k} d\lambda}{4\sqrt{-R(\lambda)}},$$

и определим квазиперенные Абеля–Якоби

$$\tilde{\phi}_k = \sum_{j=1}^g \int_{P_0}^{P(\varepsilon_j)} \tilde{\omega}_k, \quad \tilde{\psi}_k = \sum_{j=1}^g \int_{P_0}^{P(\nu_j)} \tilde{\omega}_k.$$

Тогда, используя уравнения (4.6), получаем уравнения эволюции квазиперенных Абеля–Якоби

$$\frac{d\tilde{\phi}_k}{dt_\lambda} = -\frac{\lambda^{g-k+1}}{\alpha(\lambda)}, \quad \frac{d\tilde{\psi}_k}{dt_\lambda} = \frac{\lambda^{g-k+1}}{\alpha(\lambda)}. \quad (4.7)$$

Используя первое уравнение в (4.7), получаем

$$\frac{d\tilde{\phi}_k}{dt_m} = (\tilde{\phi}_i, F_m) = -A_{m-k}, \quad (4.8)$$

где A_s определяется разложением

$$\frac{\lambda^g}{\alpha(\lambda)} = \sum_{s=0}^{\infty} A_s \lambda^{-s}, \quad A_0 = 1, \quad A_{-s} = 0, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, имеем $d\tilde{\phi}/dt_0 = 0$, что соответствует уравнению (2.7). Затем, следуя процедуре, описанной в [22], мы имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Сохраняющиеся интегралы $\{F_1, \dots, F_N\}$ являются функционально независимыми.*

Согласно предложениям 2 и 3 мы знаем, что гамильтонова система (3.1) является интегрируемой по Лиувиллю на $\mathbb{R}^{2N}$.

5. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

В данном разделе мы сначала получим решение в координатах Абеля–Якоби, затем введем тета-функцию Римана Γ и, наконец, получим алгебро-геометрическое решение с использованием римановой тета-функции с помощью инверсии Якоби.

Возьмем канонический базис циклов на кривой Γ : $a_1, \dots, a_g; b_1, \dots, b_g$. Нормированный голоморфный дифференциал представлен как $\omega = C\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_N)^T$, где C – обратимая матрица, определенная как $b_1, \dots, b_g$ [23], [24]. Таким образом, мы имеем координаты Абеля–Якоби

$$\phi = \sum_{j=1}^g \int_{P_0}^{P(\varepsilon_j)} \omega = C\tilde{\phi}, \quad \psi = \sum_{j=1}^g \int_{P_0}^{P(\nu_j)} \omega = C\tilde{\psi}.$$

Пусть τ_λ обозначает переменную потока H_λ , с использованием первой формулы (3.8) получаем

$$\frac{d}{d\tau_\lambda} = \frac{1}{2\lambda^2 H_\lambda} \frac{d}{dt_\lambda}. \quad (5.1)$$

Из (4.7) получаем уравнения эволюции в координатах Абеля–Якоби

$$\frac{d\phi}{d\tau_\lambda} = -\frac{1}{2\sqrt{R(\lambda)}}(C_1\lambda^{g-1} + \dots + C_g), \quad \frac{d\psi}{d\tau_\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{R(\lambda)}}(C_1\lambda^{g-1} + \dots + C_g), \quad (5.2)$$

где $C_1, \dots, C_g$ – столбцы матрицы C . В точке $\lambda = \infty$ ($z = \lambda^{-1} = 0$) рациональный полином может быть представлен в виде ряда:

$$\frac{1}{2\sqrt{R_*(z)}}(C_1z^2 + \dots + C_gz^{g+1}) = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m z^{m+1}, \quad \Omega_0 = \frac{1}{2} C_1, \quad (5.3)$$

с $R_*(z) = \prod_{j=1}^{2N+2} (1 - \lambda_j z)$. Пусть τ_m обозначает переменную потока H_m , тогда справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Скорости изменения координат Абеля–Якоби вдоль H -потоков постоянны:*

$$\frac{d\phi}{d\tau_0} = 0, \quad \frac{d\phi}{d\tau_m} = -\Omega_m; \quad \frac{d\psi}{d\tau_0} = 0, \quad \frac{d\psi}{d\tau_m} = \Omega_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Первая и третья формулы (5.4) согласуются с уравнениями (2.7). Тогда иерархия Дирака имеет линейное решение в координатах Абеля–Якоби:

$$\begin{aligned} \text{иерархия Дирака : } \quad & \phi = \phi_0 - \Omega_m \tau_m, & \psi = \psi_0 + \Omega_m \tau_m, \quad m = 1, 2, \dots, \\ \text{уравнения (2.9) : } \quad & \phi = \phi_0 - x\Omega_1 - y\Omega_2, & \psi = \psi_0 + x\Omega_1 + y\Omega_2, \\ \text{уравнения (2.10) : } \quad & \phi = \phi_0 - x\Omega_1 - t\Omega_3, & \psi = \psi_0 + x\Omega_1 + t\Omega_3. \end{aligned}$$

Тета-функция Римана Γ может быть построена как [23]–[25]

$$\theta(\zeta) = \sum_{\varsigma \in \mathbb{Z}^g} \exp[\pi i (\langle B\varsigma, \varsigma \rangle + 2\langle \zeta, \varsigma \rangle)].$$

Согласно теореме Римана [23], [25] существует константа K такая, что

$$\begin{aligned} \theta(\mathcal{A}(P(\lambda)) - \phi - K) & \text{ имеет } g \text{ нулей при } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_g, \\ \theta(\mathcal{A}(P(\lambda)) - \psi - K) & \text{ имеет } g \text{ нулей при } \nu_1, \dots, \nu_g, \end{aligned}$$

где $\mathcal{A}(P(\lambda))$ представляет собой отображение Абеля: $\mathcal{A}(P(\lambda)) = \int_{P_0}^P \omega$. Вблизи ∞_l , $l = 1, 2$, мы имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \omega &= (-1)^{l-1} \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m z^{m-1} dz, \\ \mathcal{A}(P(\lambda)) &= - \int_{\infty_l}^{P_0} \omega + \int_{\infty}^P \omega = -\eta_l + (-1)^{l-1} \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \Omega_m z^m. \end{aligned}$$

Соответственно мы имеем следующие разложения Тейлора:

$$\begin{aligned} \ln \theta(\mathcal{A}(P(\lambda)) - \phi - K) &= \ln \theta(-\phi - K - \eta_l) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m^l z^m, \\ \ln \theta(\mathcal{A}(P(\lambda)) - \psi - K) &= \ln \theta(\psi + K + \eta_l) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_m^l z^m, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где f_m^l и $\tilde{f}_m^l$ представляют собой коэффициенты разложения в ряд Тейлора. Используя формулу вычетов, получаем формулу обращения [22]

$$\sum_{k=1}^g \varepsilon_k^m = I_m(\Gamma) - m(f_m^1 + f_m^2), \quad \sum_{k=1}^g \nu_k^m = I_m(\Gamma) - m(\tilde{f}_m^1 + \tilde{f}_m^2), \quad (5.6)$$

где

$$I_m(\Gamma) = \sum_{k=1}^g \oint_{a_k} \lambda^m \omega_k.$$

Используя (5.5) и (5.6), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^g \varepsilon_k &= I_1(\Gamma) - \frac{i}{2} \partial_x \ln \frac{\theta(-\phi - K - \eta_2)}{\theta(-\phi - K - \eta_1)}, \\ \sum_{k=1}^g \nu_k &= I_1(\Gamma) - \frac{i}{2} \partial_x \ln \frac{\theta(\psi + K + \eta_2)}{\theta(\psi + K + \eta_1)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

и

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^g \varepsilon_k^2 &= I_2(\Gamma) + \frac{1}{4} \partial_x^2 \ln \theta(-\phi - K - \eta_1) \theta(-\phi - K - \eta_2) - \frac{i}{2} \partial_y \ln \frac{\theta(-\phi - K - \eta_2)}{\theta(-\phi - K - \eta_1)}, \\ \sum_{k=1}^g \nu_k^2 &= I_2(\Gamma) + \frac{1}{4} \partial_x^2 \ln \theta(\psi + K + \eta_1) \theta(\psi + K + \eta_2) - \frac{i}{2} \partial_y \ln \frac{\theta(\psi + K + \eta_2)}{\theta(\psi + K + \eta_1)}.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Далее рассмотрим соотношение между u , v и эллиптическими координатами ε_k , ν_k . Из условия

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f(p, q) = \begin{pmatrix} \langle p, q \rangle \\ \frac{1}{2}(\langle q, q \rangle - \langle p, p \rangle) \end{pmatrix}$$

с использованием уравнений (3.3) и (4.1) имеем $(u, v)_{t_\lambda}^T = 2\lambda^2 P(JG_\lambda)$. Тогда с учетом (5.1) получаем

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\tau_\lambda} = \frac{P(JG_\lambda)}{H_\lambda} = \frac{1}{H_\lambda} \begin{pmatrix} -G_\lambda^2 - G_\lambda^3 \\ 2G_\lambda^1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$u_{\tau_\lambda} = \frac{-G_\lambda^2 - G_\lambda^3}{H_\lambda}, \quad (5.9)$$

что можно записать как

$$u_{\tau_\lambda} + \frac{G_\lambda^2}{H_\lambda} = -\frac{G_\lambda^3}{H_\lambda} \quad \text{или} \quad u_{\tau_\lambda} + \frac{G_\lambda^3}{H_\lambda} = -\frac{G_\lambda^2}{H_\lambda}. \quad (5.10)$$

По аналогии с [22] получаем $G_\lambda = H_\lambda g_\lambda$, тогда, используя (4.3) и (4.4), преобразуем (5.10) к виду

$$u_{\tau_\lambda} + g_\lambda^2 = -\frac{n(\lambda)}{H_\lambda \alpha(\lambda)}, \quad u_{\tau_\lambda} + g_\lambda^3 = \frac{m(\lambda)}{H_\lambda \alpha(\lambda)}.$$

Далее в силу (3.8) и (4.3) получаем $\lambda H_\lambda \alpha(\lambda) = \sqrt{R(\lambda)}$, тогда

$$u_{\tau_\lambda} + g_\lambda^2 = -\frac{\lambda n(\lambda)}{\sqrt{R(\lambda)}}, \quad u_{\tau_\lambda} + g_\lambda^3 = \frac{\lambda m(\lambda)}{\sqrt{R(\lambda)}}.$$

Сравнивая коэффициенты при λ^{-2} и λ^{-4} в обеих частях формул и принимая во внимание первое уравнение в (2.7), имеем

$$\begin{aligned}v &= \sum_{k=1}^g \varepsilon_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N+2} \lambda_k, & -v &= \sum_{k=1}^g \nu_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N+2} \lambda_k, \\ u^2 - u_x &= \sum_{k=1}^g \varepsilon_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N+2} \lambda_k^2, & u^2 + u_x &= \sum_{k=1}^g \nu_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N+2} \lambda_k^2.\end{aligned}$$

Таким образом, простым вычитанием получаем

$$v = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^g \varepsilon_k - \sum_{k=1}^g \nu_k \right), \quad u_x = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^g \nu_k^2 - \sum_{k=1}^g \varepsilon_k^2 \right).$$

Тогда с помощью (5.7) и (5.8) мы приходим к конечному решению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Иерархия Дирака имеет алгебро-геометрическое решение*

$$u(x, \tau_m) = \frac{1}{4} \partial_x \ln \frac{\theta(\sum \Omega_m \tau_m + \psi_0 + K + \eta_1) \theta(\sum \Omega_m \tau_m + \psi_0 + K + \eta_2)}{\theta(\sum \Omega_m \tau_m - \phi_0 - K - \eta_1) \theta(\sum \Omega_m \tau_m - \phi_0 - K - \eta_2)} +$$

$$+ \frac{i}{2} \partial_x^{-1} \partial_y \ln \frac{\theta(\sum \Omega_m \tau_m + \psi_0 + K + \eta_1) \theta(\sum \Omega_m \tau_m - \phi_0 - K - \eta_2)}{\theta(\sum \Omega_m \tau_m + \psi_0 + K + \eta_2) \theta(\sum \Omega_m \tau_m - \phi_0 - K - \eta_1)},$$

$$v(x, \tau_m) = \frac{i}{4} \partial_x \ln \frac{\theta(\sum \Omega_m \tau_m + \psi_0 + K + \eta_2) \theta(\sum \Omega_m \tau_m - \phi_0 - K - \eta_1)}{\theta(\sum \Omega_m \tau_m + \psi_0 + K + \eta_1) \theta(\sum \Omega_m \tau_m - \phi_0 - K - \eta_2)},$$

где ∂_x^{-1} удовлетворяет условию $\partial_x^{-1} \partial_x = \partial_x \partial_x^{-1} = 1$. В частности, уравнение Дирака (2.9) имеет алгебро-геометрическое решение

$$u(x, y) = \frac{1}{4} \partial_x \ln \frac{\theta(x\Omega_1 + y\Omega_2 + \psi_0 + K + \eta_1) \theta(x\Omega_1 + y\Omega_2 + \psi_0 + K + \eta_2)}{\theta(x\Omega_1 + y\Omega_2 - \phi_0 - K - \eta_1) \theta(x\Omega_1 + y\Omega_2 - \phi_0 - K - \eta_2)} +$$

$$+ \frac{i}{2} \partial_x^{-1} \partial_y \ln \frac{\theta(x\Omega_1 + y\Omega_2 + \psi_0 + K + \eta_1) \theta(x\Omega_1 + y\Omega_2 - \phi_0 - K - \eta_2)}{\theta(x\Omega_1 + y\Omega_2 + \psi_0 + K + \eta_2) \theta(x\Omega_1 + y\Omega_2 - \phi_0 - K - \eta_1)},$$

$$v(x, y) = \frac{i}{4} \partial_x \ln \frac{\theta(x\Omega_1 + y\Omega_2 + \psi_0 + K + \eta_2) \theta(x\Omega_1 + y\Omega_2 - \phi_0 - K - \eta_1)}{\theta(x\Omega_1 + y\Omega_2 + \psi_0 + K + \eta_1) \theta(x\Omega_1 + y\Omega_2 - \phi_0 - K - \eta_2)},$$

уравнение Дирака (2.10) имеет алгебро-геометрическое решение

$$u(x, t) = \frac{1}{4} \partial_x \ln \frac{\theta(x\Omega_1 + t\Omega_3 + \psi_0 + K + \eta_1) \theta(x\Omega_1 + t\Omega_3 + \psi_0 + K + \eta_2)}{\theta(x\Omega_1 + t\Omega_3 - \phi_0 - K - \eta_1) \theta(x\Omega_1 + t\Omega_3 - \phi_0 - K - \eta_2)} +$$

$$+ \frac{i}{2} \partial_x^{-1} \partial_y \ln \frac{\theta(x\Omega_1 + t\Omega_3 + \psi_0 + K + \eta_1) \theta(x\Omega_1 + t\Omega_3 - \phi_0 - K - \eta_2)}{\theta(x\Omega_1 + t\Omega_3 + \psi_0 + K + \eta_2) \theta(x\Omega_1 + t\Omega_3 - \phi_0 - K - \eta_1)},$$

$$v(x, t) = \frac{i}{4} \partial_x \ln \frac{\theta(x\Omega_1 + t\Omega_3 + \psi_0 + K + \eta_2) \theta(x\Omega_1 + t\Omega_3 - \phi_0 - K - \eta_1)}{\theta(x\Omega_1 + t\Omega_3 + \psi_0 + K + \eta_1) \theta(x\Omega_1 + t\Omega_3 - \phi_0 - K - \eta_2)}.$$

Список литературы

- [1] B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, *Sturm–Liouville and Dirac Operators*, Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [2] М. Г. Гасымов, “Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$ ”, Тр. ММО, **19**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1968, 41–112.
- [3] D. B. Hinton, A. K. Jordan, M. Klausand, J. K. Shaw, “Inverse scattering on the line for a Dirac system”, *J. Math. Phys.*, **32**:11 (1991), 3015–3030.
- [4] R. K. Amirov, B. Keskin, A. S. Ozkan, “Direct and inverse problems for the Dirac operator with a spectral parameter linearly contained in a boundary condition”, *Ukr. Math. J.*, **61**:9 (2010), 1365–1379.
- [5] И. С. Фролов, “Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси”, *Докл. АН СССР*, **207**:1 (1972), 44–47.
- [6] W.-X. Ma, K.-S. Li, “Virasoro symmetry algebra of Dirac soliton hierarchy”, *Inverse Problems*, **12**:6 (1996), L25–L31.
- [7] E. G. Fan, “ N -fold Darboux transformation and soliton solutions for a nonlinear Dirac system”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**:5 (2005), 1063–1069.
- [8] A. Kishimoto, H. Nakamura, “Super-derivations”, *Commun. Math. Phys.*, **159**:1 (1994), 15–27.
- [9] D. L. Du, X. Geng, “Symplectic realizations and action-angle coordinates for the Lie–Poisson system of Dirac hierarchy”, *Appl. Math. Comput.*, **244** (2014), 222–234.

- [10] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, “Korteweg–de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **27**:1 (1974), 97–133.
- [11] P. D. Lax, “Almost periodic solutions of the KdV equation”, *SIAM Rev.*, **18**:3 (1976), 351–375.
- [12] P. J. Olver, “Evolution equations possessing infinitely many symmetries”, *J. Math. Phys.*, **18**:6 (1977), 1212–1215.
- [13] Ф. Магри, “Цепи Ленарда для классических интегрируемых систем”, *ТМФ*, **137**:3 (2003), 424–432.
- [14] А. Р. Итс, В. П. Котляров, “Об одном классе решений нелинейного уравнения Шредингера”, *Докл. АН УССР*, **11** (1976), 965–968.
- [15] E. R. Tracy, H. H. Chen, “Nonlinear self-modulation: an exactly solvable model”, *Phys. Rev. A*, **37**:3 (1988), 815–839.
- [16] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol’skii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Springer, Berlin, 1994.
- [17] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах”, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134.
- [18] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, “The inverse scattering transform–Fourier analysis for nonlinear problems”, *Stud. Appl. Math.*, **53**:4 (1974), 249–315.
- [19] C. W. Cao, X. G. Geng, “C Neumann and Bargmann systems associated with the coupled KdV soliton hierarchy”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23**:18 (1990), 4117–4125.
- [20] W. X. Ma, “Symmetry constraint of MKdV equations by binary nonlinearization”, *Phys. A*, **219**:3–4 (1995), 467–481.
- [21] J. Moser, “Various aspects of integrable Hamiltonian systems”, *Dynamical Systems, Lectures given at a Summer School of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) (Bressanone (Bolzano), Italy, June 19–27, 1978)*, Progress in Mathematics, **8**, eds. J. Guckenheimer, J. Moser, S. E. Newhouse, Birkhäuser, Boston, 1980, 233–289.
- [22] C. W. Cao, Y. T. Wu, X. G. Geng, “Relation between the Kadomtsev–Petviashvili equation and the confocal involutive system”, *J. Math. Phys.*, **40**:8 (1999), 3948–3970.
- [23] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons, New York, 1978.
- [24] Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, Мир, М., 1988.
- [25] F. Gesztesy, H. Holden, *Soliton Equations and Their Algebro-Geometric Solutions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **79**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

Поступила в редакцию 13.09.2016,
после доработки 10.10.2017