Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Одесский, Интегрируемые структуры бездисперсионных систем и дифференциальная геометрия, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 2, 254–274

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9274>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:19:20

© 2017 г.

А. В. Одесский*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СТРУКТУРЫ БЕЗДИСПЕРСИОННЫХ СИСТЕМ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Теория иерархий типа Уизема, интегрируемых методом гидродинамических редукций, развивается как теория некоторых дифференциально-геометрических объектов. В качестве приложения построены системы Гиббонса–Царева, связанные с пространством модулей алгебраических кривых произвольного рода, и доказана интегрируемость универсальной иерархии Уизема методом гидродинамических редукций.

Ключевые слова: интегрируемость квазилинейных систем, гидродинамические редукции, системы Гиббонса–Царева, иерархии типа Уизема, пространство модулей римановых поверхностей.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9274>

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Интегрируемость квазилинейных систем. Рассмотрим $(2 + 1)$ -мерную квазилинейную систему уравнений в частных производных вида

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(\vec{v}) \frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^m b_{ij}(\vec{v}) \frac{\partial v_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^m c_{ij}(\vec{v}) \frac{\partial v_j}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, D, \quad (1.1)$$

где $v_j = v_j(t, x, y)$ – зависимые переменные, $j = 1, \dots, m$, и $D \geq m$. Многие важные интегрируемые уравнения (бездисперсионное уравнение Кадомцева–Петвиашвили, уравнение Бойера–Финли – это лишь некоторые из них) можно записать в таком виде. Существуют по крайней мере два подхода к теории интегрируемости таких систем: один из них основан на псевдопотенциальном представлении (также известном как бездисперсионное представление нулевой кривизны) [1], [2], а второй – на гидродинамических редукциях [3]–[6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Система (1.1) допускает псевдопотенциальное представление

$$\Phi_y = A(\Phi_x, v_1, \dots, v_m), \quad \Phi_t = B(\Phi_x, v_1, \dots, v_m) \quad (1.2)$$

*Brock University, St. Catharines, Canada. E-mail: aodesski@brocku.ca

(здесь и далее нижние индексы x, y, t обозначают частные производные), если уравнение (1.1) эквивалентно условию совместности системы (1.2); $\Phi(t, x, y)$ – вспомогательная функция.

ПРИМЕР 1.1. Система

$$u_y = v_x, \quad v_y = u_t - uu_x \quad (1.3)$$

допускает псевдопотенциальное представление

$$\Phi_y = \frac{\Phi_x^2}{2} + u, \quad \Phi_t = \frac{\Phi_x^3}{3} + u\Phi_x + v. \quad (1.4)$$

Действительно, вычислив $(\Phi_y)_t - (\Phi_t)_y$ с учетом (1.4), получим

$$(v_x - u_y)\Phi_x + u_t - uu_x - v_y = 0.$$

Расщепляя с учетом произвольности Φ_x , получаем уравнения (1.3).

Подход, основанный на гидродинамических редукциях, более формальный. Грубо говоря, система (1.1) интегрируема, если для любого $N > 0$ она допускает “достаточно много” так называемых гидродинамических редукций вида $v_i = v_i(r^1, \dots, r^N)$, $i = 1, \dots, m$, где $r^j = r^j(t, x, y)$ удовлетворяют паре совместных $(1+1)$ -мерных систем гидродинамического типа

$$r_t^i = \lambda^i(r^1, \dots, r^N)r_x^i, \quad r_y^i = \mu^i(r^1, \dots, r^N)r_x^i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.5)$$

Заметим, что условия совместности для системы (1.5) имеют вид

$$\frac{\partial_i \lambda^j}{\lambda^i - \lambda^j} = \frac{\partial_i \mu^j}{\mu^i - \mu^j}, \quad i \neq j = 1, \dots, N, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial r^i}. \quad (1.6)$$

Здесь основная техническая сложность – объяснить, что именно означает “достаточно много гидродинамических редукций”. Оказалось, что набор таких редукций должен параметризоваться решениями еще одной совместной системы уравнений в частных производных, называемой системой Гиббонса–Царева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Системой Гиббонса–Царева называется совместная переопределенная система

$$\begin{aligned} \partial_i p_j &= f(p_i, p_j, v_1, \dots, v_m) \partial_i v_1, & i, j &= 1, \dots, N, \quad i \neq j, \\ \partial_i v_k &= g_k(p_i, v_1, \dots, v_m) \partial_i v_1, & k &= 2, \dots, m, \quad i = 1, \dots, N, \\ \partial_i \partial_j v_1 &= h(p_i, p_j, v_1, \dots, v_m) \partial_i v_1 \partial_j v_1, & i, j &= 1, \dots, N, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь, $p_1, \dots, p_N$ и $v_1, \dots, v_m$ – функции от $r^1, \dots, r^N$, $N \geq 3$.

Теперь можно точно объяснить второй подход к интегрируемости уравнения (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Система (1.1) допускает достаточно много гидродинамических редукций, если существуют система Гиббонса–Царева (1.7) и такие функции $F(p, v_1, \dots, v_m)$, $G(p, v_1, \dots, v_m)$, что переменные $v_i = v_i(r^1, \dots, r^N)$, $i = 1, \dots, m$, удовлетворяют уравнению (1.1) в силу уравнений (1.5) с $\lambda^i = F(p_i, v_1, \dots, v_m)$, $\mu^i = G(p_i, v_1, \dots, v_m)$, $i = 1, \dots, N$, и в силу системы (1.7).

Заметим, что условия совместности системы (1.7) налагают ограничения на функции f , g_k , h , а условия совместности системы (1.6) – ограничения на функции F , G .

ПРИМЕР 1.2. Рассмотрим систему

$$\partial_i p_j = \frac{\partial_i u}{p_i - p_j}, \quad \partial_i v = p_i \partial_i u, \quad \partial_i \partial_j u = \frac{2 \partial_i u \partial_j u}{(p_i - p_j)^2}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (1.8)$$

Можно проверить, что эта система совместна и поэтому дает нам пример системы Гиббонса–Царева. Положим в системе (1.5) $\lambda^i = u + p_i^2$, $\mu^i = p_i$. Прямыми вычислениями можно убедиться в том, что система (1.6) справедлива в силу уравнений (1.8), а система (1.3) справедлива в силу уравнений (1.5), (1.8). Другими словами, система Гиббонса–Царева (1.8) и функции $F(p, u, v) = u + p^2$, $G(p, u, v) = p$ порождают достаточно много гидродинамических редукций системы (1.3).

Предположим, что система (1.1) допускает как псевдопотенциальное представление (1.2), так и достаточно много гидродинамических редукций. В этом случае, как показано в работе [7], справедливо следующее уравнение:

$$f(p_1, p_2, v_1, \dots, v_m) = \frac{\sum_{k=1}^m A_{v_k}(p_2, v_1, \dots, v_m) g_k(p_1, v_1, \dots, v_m)}{A_{p_1}(p_1, v_1, \dots, v_m) - A_{p_2}(p_2, v_1, \dots, v_m)}, \quad g_1 = 1 \quad (1.9)$$

(нижний индекс v_k означает частную производную); аналогичное уравнение справедливо и для B . Вводя параметрическое представление для псевдопотенциалов

$$A(\Phi_x, v_1, \dots, v_m) = h_2(p, v_1, \dots, v_m), \quad B(\Phi_x, v_1, \dots, v_m) = h_3(p, v_1, \dots, v_m), \\ \Phi_x = h_1(p, v_1, \dots, v_m),$$

перепишем уравнение (1.9) следующим образом:

$$f(p_1, p_2) = \frac{\sum_{k=1}^m (h'_i(p_1) h_j(p_2)_{v_k} - h'_j(p_1) h_i(p_2)_{v_k}) g_k(p_1)}{h'_{j_1}(p_1) h'_{i_1}(p_2) - h'_{j_2}(p_2) h'_{i_1}(p_1)}. \quad (1.10)$$

Здесь опущены аргументы $v_1, \dots, v_m$, а штрих означает производную по p_i .

Поэтому построение и/или классификацию интегрируемых систем (1.1) можно провести в два этапа [7]:

- построить/классифицировать системы Гиббонса–Царева (1.7);
- для каждой системы Гиббонса–Царева (1.7) построить/классифицировать функции $A(p, v_1, \dots, v_m)$, удовлетворяющие уравнению (1.9).

Оказалось, что ключевым моментом здесь является классификация/построение систем Гиббонса–Царева. Как показано в работах [8], [7], существует только несколько универсальных систем Гиббонса–Царева, а все известные бездисперсионные интегрируемые уравнения связаны с этими универсальными системами Гиббонса–Царева. Заметим, что для заданной пары функций A , B соответствующую систему (1.1), допускающую псевдодифференциальное представление (1.2), можно построить прямыми вычислениями.

1.2. Системы Гиббонса–Царева и дифференциальная геометрия. Предположим, что функция $f(p_1, p_2)$ имеет полюс первого порядка при $p_1 = p_2$. В этом случае (после переопределения f, g_i) систему Гиббонса–Царева (1.7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \partial_i p_j &= \frac{f(p_i, p_j, v_1, \dots, v_m)}{g_1(p_i, v_1, \dots, v_m)} \partial_i v_1, & i, j &= 1, \dots, N, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial_i v_1}{g_1(p_i, v_1, \dots, v_m)} &= \frac{\partial_i v_j}{g_j(p_i, v_1, \dots, v_m)}, & j &= 2, \dots, m, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\partial_i \partial_j v_1 = q(p_i, p_j, v_1, \dots, v_m) \partial_i v_1 \partial_j v_1, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j,$$

где

$$f(p_1, p_2) = \frac{1}{p_1 - p_2} + O(1). \quad (1.12)$$

Введем семейство векторных полей

$$g(p) = \sum_{i=1}^m g_i(p, v_1, \dots, v_m) \frac{\partial}{\partial v_i}.$$

В настоящей работе мы докажем, что условие совместности системы (1.11) эквивалентно следующим коммутационным соотношениям для этого семейства:

$$\begin{aligned} [g(p_1), g(p_2)] &= f(p_2, p_1) g'(p_1) - f(p_1, p_2) g'(p_2) + \\ &+ 2f(p_2, p_1)_{p_1} g(p_1) - 2f(p_1, p_2)_{p_2} g(p_2), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} g(p_2)(f(p_1, p_3)) - g(p_1)(f(p_2, p_3)) &= f(p_1, p_2) f(p_2, p_3)_{p_2} - f(p_2, p_1) f(p_1, p_3)_{p_1} + \\ &+ f(p_1, p_3) f(p_2, p_3)_{p_3} - f(p_2, p_3) f(p_1, p_3)_{p_3} + \\ &+ 2f(p_2, p_3) f(p_1, p_2)_{p_2} - 2f(p_1, p_3) f(p_2, p_1)_{p_1}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Семейство векторных полей $g(p)$, удовлетворяющих соотношениям (1.13), (1.14), называется локальной структурой Гиббонса–Царева (локальной структурой ГЦ). Заметим, что точечные преобразования вида

$$p_i \rightarrow \lambda(p_i, v_1, \dots, v_m), \quad v_j \rightarrow \mu_j(v_1, \dots, v_m)$$

не изменяют форму уравнений (1.7). Основываясь на этом наблюдении, можно превратить локальные структуры ГЦ в глобальный дифференциально-геометрический объект (см. ниже определение 3.4).

Заметим, что соотношение (1.14) эквивалентно тождеству Якоби для (1.13), если векторные поля $g(p)$, $g'(p)$ линейно независимы в трех точках общего положения $p = p_1, p_2, p_3$.

Уравнение (1.10) можно выразить через векторные поля $g(p)$ следующим образом:

$$g(p_1)(h(p_2)) = \lambda(p_1, p_2) h'(p_1) - f(p_1, p_2) h'(p_2),$$

где $h = h_1, h_2, h_3$ и λ должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} g(p_1)(\lambda(p_2, p_3)) &= \lambda(p_1, p_3) \lambda(p_2, p_1)_{p_1} - \lambda(p_2, p_3) f(p_1, p_2)_{p_2} - \\ &- f(p_1, p_2) \lambda(p_2, p_3)_{p_2} - f(p_1, p_3) \lambda(p_2, p_3)_{p_3}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\lambda(p_1, p_2) = \frac{1}{p_1 - p_2} + O(1). \quad (1.16)$$

1.3. Структура статьи и основные результаты. В разделе 2 мы напоминаем определение иерархий типа Уизема [2], [9]–[11]. По существу, это просто системы (1.1), допускающие псевдопотенциальное представление, но в них вместо t, x, y имеется произвольный набор времен $t_1, \dots, t_M$. В разделе 2 вводится основной объект этой статьи – структура ГЦ. Локально структура ГЦ задается семейством векторных полей $g(p)$ вместе с функцией $f(p_1, p_2, v_1, \dots, v_m)$, удовлетворяющей соотношениям (1.13), (1.14). Мы объясняем, каким образом локальную структуру ГЦ можно превратить в глобальный дифференциально-геометрический объект (см. предложение 3.1 и определение 3.4). Мы также объясняем, как из заданной структуры ГЦ построить новые структуры (см. предложения 3.1 и 3.2), и как построить потенциалы интегрируемых иерархий типа Уизема, связанные с данной структурой ГЦ (предложение 3.3). Кроме того, мы объясняем связь между структурой ГЦ и некоторыми алгебрами Ли.

В разделе 4 доказан первый из основных результатов статьи: показано, что условия совместности системы Гиббонса–Царева эквивалентны коммутационным соотношениям (1.13), (1.14) для соответствующей структуры ГЦ (см. предложение 4.1). В разделе 5 мы показываем, как выразить условие интегрируемости иерархий типа Уизема в терминах структур ГЦ (предложение 5.2). В разделе 6 построена структура ГЦ на пространстве модулей алгебраических кривых произвольного рода (предложение 6.2, формулы (6.8)–(6.10)), что является вторым основным результатом настоящей статьи. В разделе 7 мы напоминаем определение универсальной иерархии Уизема [9], [2], [12] и доказываем третий основной результат: универсальная иерархия Уизема интегрируема для кривой произвольного рода с помощью метода гидродинамических редукций (предложение 7.2).

2. ИЕРАРХИИ ТИПА УИЗЕМА

При заданном наборе независимых переменных $t_1, \dots, t_M$ (которые называются временами), заданном наборе зависимых переменных $v_1, \dots, v_m$ (которые называются полями) и заданном наборе функций $h_i(z, v_1, \dots, v_m)$, $i = 1, \dots, M$ (которые называются потенциалами), иерархия типа Уизема вводится как условие совместности следующей системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_i} = h_i(z, v_1, \dots, v_m), \quad i = 1, \dots, M. \quad (2.1)$$

Здесь $\psi, v_1, \dots, v_m$ – функции времен $t_1, \dots, t_M$, а z – параметр. Систему (2.1) следует понимать как параметрический способ определения $M-1$ связей между частными производными $\partial \psi / \partial t_i$, $i = 1, \dots, M$; эти связи получаются исключением параметра z из уравнений (2.1).

Предположим, что система (2.1) совместна. Представим условие совместности в виде

$$\sum_{l=1}^m \left(\left(\frac{\partial h_i}{\partial z} \frac{\partial h_j}{\partial v_l} - \frac{\partial h_j}{\partial z} \frac{\partial h_i}{\partial v_l} \right) \frac{\partial v_l}{\partial t_k} + \left(\frac{\partial h_j}{\partial z} \frac{\partial h_k}{\partial v_l} - \frac{\partial h_k}{\partial z} \frac{\partial h_j}{\partial v_l} \right) \frac{\partial v_l}{\partial t_i} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial h_k}{\partial z} \frac{\partial h_i}{\partial v_l} - \frac{\partial h_i}{\partial z} \frac{\partial h_k}{\partial v_l} \right) \frac{\partial v_l}{\partial t_j} \right) = 0, \quad (2.2)$$

где $i, j, k = 1, \dots, M$ попарно различны. Пусть $V_{i,j,k}$ – линейное пространство функций от z , натянутое на

$$\frac{\partial h_i}{\partial z} \frac{\partial h_j}{\partial v_l} - \frac{\partial h_j}{\partial z} \frac{\partial h_i}{\partial v_l}, \quad \frac{\partial h_j}{\partial z} \frac{\partial h_k}{\partial v_l} - \frac{\partial h_k}{\partial z} \frac{\partial h_j}{\partial v_l}, \quad \frac{\partial h_k}{\partial z} \frac{\partial h_i}{\partial v_l} - \frac{\partial h_i}{\partial z} \frac{\partial h_k}{\partial v_l}, \quad l = 1, \dots, m.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $V_{i,j,k}$ – конечномерное пространство, $\dim V_{i,j,k} = D$. Тогда система (2.2) эквивалентна системе гидродинамического типа для D линейно независимых уравнений вида

$$\sum_{l=1}^m \left(a_{rl}(v_1, \dots, v_m) \frac{\partial v_l}{\partial t_i} + b_{rl}(v_1, \dots, v_m) \frac{\partial v_l}{\partial t_j} + c_{rl}(v_1, \dots, v_m) \frac{\partial v_l}{\partial t_k} \right) = 0, \quad r = 1, \dots, D. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{S_1(z), \dots, S_D(z)\}$ – базис в пространстве $V_{i,j,k}$ и

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial z} \frac{\partial h_j}{\partial v_l} - \frac{\partial h_j}{\partial z} \frac{\partial h_i}{\partial v_l} &= \sum_{r=1}^D c_{rl} S_r, \\ \frac{\partial h_j}{\partial z} \frac{\partial h_k}{\partial v_l} - \frac{\partial h_k}{\partial z} \frac{\partial h_j}{\partial v_l} &= \sum_{r=1}^D a_{rl} S_r, \\ \frac{\partial h_k}{\partial z} \frac{\partial h_i}{\partial v_l} - \frac{\partial h_i}{\partial z} \frac{\partial h_k}{\partial v_l} &= \sum_{r=1}^D b_{rl} S_r. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.2) и приравнивая к нулю коэффициенты при $S_1, \dots, S_D$, получаем (2.3). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В теории интегрируемых систем гидродинамического типа систему (2.1) часто называют псевдопотенциальным представлением системы (2.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для всех известных примеров интегрируемых иерархий типа Уизема справедливо неравенство $m \leq D \leq 2m - 1$. Поэтому это неравенство можно рассматривать как критерий интегрируемости. Однако в нашей работе мы используем другой критерий интегрируемости, который дается методом гидродинамических редукций.

3. СТРУКТУРЫ ГЦ

Пусть семейство векторных полей

$$g(p) = \sum_{i=1}^m g_i(p, v_1, \dots, v_m) \frac{\partial}{\partial v_i}$$

параметризовано параметром p и $f(p_1, p_2, v_1, \dots, v_m)$ – некоторая функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Локальной структурой ГЦ называется семейство векторных полей $g(p)$ и функция $f(p_1, p_2)$ вида (1.12), удовлетворяющие соотношениям (1.13), (1.14).

Часто далее будем опускать в функциях дополнительные аргументы $v_1, \dots, v_m$. Также далее штрих означает частную производную по p .

Если задана структура ГЦ, то по ней можно разными способами построить новую структуру ГЦ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть функции $g(p)$, $f(p_1, p_2)$ удовлетворяют соотношениям (1.13), (1.14) и

$$\hat{g}(p) = f(p, u_1) \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + f(p, u_n) \frac{\partial}{\partial u_n} + g(p). \quad (3.1)$$

Тогда $\hat{g}(p)$, $f(p_1, p_2)$ также удовлетворяют соотношениям (1.13), (1.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость уравнения (1.13) при $n = 1$ проверяется прямым вычислением, а для произвольного n (при $n > 1$) – по индукции. Уравнение (1.14) остается тем же самым, поскольку $f(p_1, p_2)$ не зависит от $u_1, \dots, u_n$. ■

Будем говорить, что структура ГЦ для функций $\hat{g}(p)$, $f(p_1, p_2)$ получается из структуры ГЦ для функций $g(p)$, $f(p_1, p_2)$ добавлением n точек $u_1, \dots, u_n$. Такая процедура соответствует регулярному полевому расширению системы Гиббонса–Царева [7]. В случае структур ГЦ, соответствующих пространству модулей $M_{g,n}$ алгебраических кривых рода g с n проколами (см. раздел 6), эта процедура отвечает увеличению числа проколов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть функции $g(p)$, $f(p_1, p_2)$ удовлетворяют соотношениям (1.13), (1.14) и

$$\begin{aligned} \hat{g}^{(n_1, \dots, n_k)}(p) = & g(p) + \\ & + \sum_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ 0 \leq i_{j,1}, \dots, i_{j,n_j}, \\ i_{j,1} + \dots + i_{j,n_j} \leq n_j}} \frac{(i_{j,1} + 2i_{j,2} + \dots + n_j i_{j,n_j})!}{i_{j,1}! \dots i_{j,n_j}! (1!)^{i_{j,1}} \dots (n_j!)^{i_{j,n_j}}} \frac{\partial^{i_{j,1} + \dots + i_{j,n_j}} f(p, u_{j,0})}{\partial u_{j,0}^{i_{j,1} + \dots + i_{j,n_j}}} \frac{\partial}{\partial u_{j,i_{j,1} + \dots + i_{j,n_j}}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тогда $\hat{g}^{(n_1, \dots, n_k)}(p)$, $f(p_1, p_2)$ также удовлетворяют соотношениям (1.13), (1.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем со следующей локальной структуры ГЦ:

$$\hat{g}(p) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ 0 \leq l \leq n_j}} f(p, v_{j,l}) \frac{\partial}{\partial v_{j,l}} + g(p). \quad (3.3)$$

Сделаем замену координат

$$\begin{aligned} v_{j,0} &= u_{j,0}, \\ v_{j,1} &= u_{j,0} + \epsilon u_{j,1}, \\ v_{j,2} &= u_{j,0} + 2\epsilon u_{j,1} + \epsilon^2 u_{j,2}, \\ &\dots, \\ v_{j,n_j} &= u_{j,0} + n_j \epsilon u_{j,1} + \frac{n_j(n_j - 1)}{2} \epsilon^2 u_{j,2} + \dots + \epsilon^{n_j} u_{j,n_j}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В новых координатах имеем

$$\begin{aligned}\hat{g}(p) = & \sum_{1 \leq j \leq k} \left(f(p, u_{j,0}) \frac{\partial}{\partial u_{j,0}} + \frac{1}{\epsilon} (f(p, u_{j,0} + \epsilon u_{j,1}) - f(p, u_{j,0})) \frac{\partial}{\partial u_{j,1}} + \right. \\ & + \frac{1}{\epsilon^2} (f(p, u_{j,0} + 2\epsilon u_{j,1} + \epsilon^2 u_{j,2}) - 2f(p, u_{j,0} + \epsilon u_{j,1}) + f(p, u_{j,0})) \frac{\partial}{\partial u_{j,2}} + \dots + \\ & \left. + \frac{1}{\epsilon^{n_j}} (f(p, u_{j,0} + n_j \epsilon u_{j,1} + \dots + \epsilon^{n_j} u_{j,n_j}) - \dots + (-1)^{n_j} f(p, u_{j,0})) \frac{\partial}{\partial u_{j,n_j}} \right) + \\ & + g(p).\end{aligned}$$

Переходя к пределу $\epsilon \rightarrow 0$ получим (3.2). ■

Будем говорить, что структура ГЦ (3.2) получается из структуры ГЦ (3.3) столкновением точек $v_{j,0}, v_{j,1}, \dots, v_{j,n_j}$ для каждого j .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Уравнение (1.14) эквивалентно тождеству Якоби для (1.13) при условии, что векторные поля $g(p_1), g(p_2), g(p_3), g'(p_1), g'(p_2), g'(p_3)$ линейно независимы в точках p_1, p_2, p_3 общего положения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Локальную структуру ГЦ можно рассматривать как некоторый алгеброид Ли. Пусть

$$g(p) = e_2 + (p - z)e_3 + (p - z)^2 e_4 + \dots$$

Другими словами, пусть $e_{i+2} = i! g^{(i)}(z)$. Пусть $e_1 = \partial/\partial z$ и

$$f(p_1, p_2) = \frac{1}{p_1 - p_2} + \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{i,j}(z) (p_1 - z)^i (p_2 - z)^j.$$

Тогда $[e_1, e_i] = (i - 1)e_{i+1}$ и (1.13) эквивалентно уравнению

$$[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j} + \sum_{r=0}^{i-1} (i + r - 1) f_{j-2,r} e_{i-r+1} - \sum_{r=0}^{j-1} (j + r - 1) f_{i-2,r} e_{j-r+1}.$$

В частности, если $f(p_1, p_2) = 1/(p_1 - p_2)$, то $[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}$ для всех e_i, e_j . Заметим, что для $f(p_1, p_2) = 1/(p_1 - p_2)$ соотношение (1.14) всегда верно. Поэтому локальную структуру ГЦ можно считать некоторой деформацией алгебры Ли с базисом $e_1, e_2, \dots$ и скобкой $[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}$ в классе алгеброидов Ли.

Хотелось бы классифицировать все иерархии типа Уизема, связанные с заданной структурой ГЦ, которые интегрируются методом гидродинамических редукций и которые соответствуют данной системе Гиббонса–Царева. Оказалось, что для этого нужно найти все функции $\lambda(p_1, p_2, v_1, \dots, v_m)$, удовлетворяющие определенным условиям. Формально это можно сделать следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Обобщенная локальная структура ГЦ – это семейство векторных полей, состоящее из функций $g(p), f(p_1, p_2)$ и дополнительной функции $\lambda(p_1, p_2, v_1, \dots, v_m)$, которые удовлетворяют соотношениям (1.12)–(1.16).

Наша цель – найти векторное пространство всех потенциалов соответствующей иерархии типа Уизема для заданной обобщенной локальной структуры ГЦ. Во всех известных примерах эти пространства являются пространствами решений линейной системы уравнений в частных производных. Однако в общем случае мы можем задать такое векторное пространство как пространство решений линейного функционального уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Для заданной обобщенной локальной структуры ГЦ определим соответствующее векторное пространство потенциалов как пространство решений следующего функционального уравнения на функцию $h(p, v_1, \dots, v_m)$:

$$g(p_1)(h(p_2)) = \lambda(p_1, p_2)h'(p_1) - f(p_1, p_2)h'(p_2). \quad (3.5)$$

Заметим, что, разлагая (3.5) вблизи диагонали $p_2 = p_1$, мы получаем систему линейных уравнений в частных производных для $h(p, v_1, \dots, v_m)$, эквивалентную уравнению (3.5).

Следующая процедура предоставляет стандартный способ получения решений уравнения (3.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть γ – такая траектория в $\mathbb{C}$, что

$$\int_{\gamma} \frac{\partial(\lambda(t, p_2)f(p_1, t))}{\partial t} dt = 0.$$

Тогда функция

$$h(p) = \int_{\gamma} \lambda(t, p) dt$$

является решением уравнения (3.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим выражение для $h(p)$ в (3.5) и воспользуемся соотношением (1.15). Прямое вычисление показывает, что разность между правой и левой частями уравнения (3.5) есть

$$\int_{\gamma} \frac{\partial(\lambda(t, p_2)f(p_1, t))}{\partial t} dt;$$

тем самым предложение доказано. ■

Превратим локальную структуру ГЦ в дифференциально-геометрические структуры ГЦ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Соотношения (1.12)–(1.14) инвариантны относительно произвольных преобразований вида

$$\begin{aligned} p_i &= \mu(\tilde{p}_i, v_1, \dots, v_m), & \tilde{g}(\tilde{p}) &= \mu'(\tilde{p})^2 g(\mu(\tilde{p})), \\ \tilde{f}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) &= \frac{\mu'(\tilde{p}_1)^2}{\mu'(\tilde{p}_2)} \left(f(\mu(\tilde{p}_1), \mu(\tilde{p}_2)) - g(\mu(\tilde{p}_1))(\mu(\tilde{p}_2)) \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – расслоение с одномерным слоем F и m -мерной базой B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Структура ГЦ на раслоении π есть локальная структура ГЦ на каждой тривиализации для любого открытого $U \subset B$ такая, что данные локальные структуры для разных тривиализаций связаны соотношениями (3.6). Здесь $v_1, \dots, v_m$ являются координатами на B , а p – координата на F .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Соотношения (1.15) инвариантны относительно произвольных преобразований вида (3.6), если λ преобразуется следующим образом:

$$\tilde{\lambda}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \mu'(\tilde{p}_1) \lambda(\mu(\tilde{p}_1), \mu(\tilde{p}_2)). \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждений 3.4 и 3.5 получается непосредственными вычислениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Обобщенная структура ГЦ на раслоении π есть обобщенная локальная структура ГЦ на каждой тривиализации для любого открытого $U \subset B$ такая, что для разных тривиализаций данные обобщенные структуры ГЦ связаны соотношениями (3.6), (3.7).

ПРИМЕР 3.1. Из (6.8), (6.10) ясно, что $g(p) = G(p)$, $f(p_1, p_2) = F(p_1, p_2)$, построенные в разделе 6, представляют собой структуру ГЦ на расслоении $M_{g,1} \rightarrow M_g$.

Аналогичные структуры ГЦ¹⁾ существуют и для $g = 0, 1$. В случае $g = 0$ рассмотрим пространство модулей $M_{0,n+3}$ комплексных структур на $\mathbb{CP}^1$ с проколами в $n + 3$ точках. Фиксируем три точки $0, 1, \infty$. Переместим три точки в $0, 1, \infty$ с помощью дробно-линейного преобразования. Формулы для соответствующих структур ГЦ имеют вид

$$f(p_1, p_2) = \frac{p_2(p_2 - 1)}{(p_1 - p_2)p_1(p_1 - 1)}, \quad g(p) = \sum_{i=1}^n \frac{u_i(u_i - 1)}{(p - u_i)p(p - 1)} \frac{\partial}{\partial u_i}. \quad (3.8)$$

В случае $g = 1$ рассмотрим пространство модулей $M_{1,n+1}$ комплексных структур на эллиптической кривой с проколами в $n + 1$ точках. Фиксируем одну точку в нуле. Переместим одну точку в 0 с помощью сдвига вдоль эллиптической кривой. Деформируем также комплексную структуру на нашей эллиптической кривой. Пространство комплексных структур в этом случае одномерно. Будем использовать модулярный параметр τ с $\text{Im } \tau > 0$ в качестве координаты на пространстве модулей эллиптических кривых. Формулы для соответствующих структур ГЦ записываются как

$$f(p_1, p_2) = \rho(p_1 - p_2, \tau) - \rho(p_1), \quad g(p) = 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^n (\rho(p - u_j, \tau) - \rho(p, \tau)) \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad (3.9)$$

где

$$\rho(p, \tau) = \frac{\partial}{\partial p} \ln \theta(p, \tau), \quad \theta(p, \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{2\pi i (kp + k(k-1)\tau/2)}.$$

¹⁾Соответствующие системы Гиббонса-Царева для случаев $g = 0, 1, 2$ были построены ранее в работах [8], [7] способом, пригодным только для этих случаев.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. В полученных ГЦ-структурах мы также можем столкнуть точки и получить новые структуры ГЦ. Кроме того, в случае $g = 0$ (в случае $g = 1$) можно столкнуть точки с $0, 1, \infty$ (соответственно с 0) с помощью подстановки, аналогичной (3.4). В случае $g = 0$ можно также применить произвольное дробно-линейное преобразование с постоянными коэффициентами, отправив точки $0, 1, \infty$ в a, b, c , и столкнуть некоторые из точек a, b, c .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Рассмотрим обобщенную локальную структуру ГЦ с $g(p)$ вида (3.3). Сталкивая с помощью подстановки (3.4) точки $v_{j,0}, v_{j,1}, \dots, v_{j,n_j}$ и переходя к пределу $\epsilon \rightarrow 0$, мы можем затем применить эту же подстановку и предельный переход в функции λ , в результате получим новую обобщенную локальную структуру ГЦ.

4. СИСТЕМЫ ГИББОНСА–ЦАРЕВА

Системы Гиббонса–Царева являются основным элементом в основанном на гидродинамических редукциях подходе к интегрируемости иерархий типа Уизема и, в более общем виде, к интегрируемости квазилинейных систем вида (2.3). В этом подходе гидродинамические редукции данной иерархии параметризуются решениями системы Гиббонса–Царева.

В данном разделе мы объясним связь между системами Гиббонса–Царева (1.7) и структурами ГЦ. Пусть $p_1, \dots, p_N, v_1, \dots, v_m$ являются функциями вспомогательных переменных $r^1, \dots, r^N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из предположения о совместности следует, что пространство решений системы Гиббонса–Царева локально параметризуется $2N$ функциями одной переменной. Заметим, что f, g_i, q не зависят от N , и поэтому для данной системы Гиббонса–Царева N может быть сколь угодно большим.

Назовем систему Гиббонса–Царева невырожденной, если $f(p_1, p_2, v_1, \dots, v_m)$ имеет полюс первого порядка на диагонали $p_2 = p_1$. Далее будем считать, что все системы Гиббонса–Царева невырождены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Существует взаимно однозначное соответствие между невырожденными системами Гиббонса–Царева и локальными структурами ГЦ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переопределив функции f, g_i из (1.7), перепишем систему Гиббонса–Царева в виде

$$\begin{aligned} \partial_i p_j &= \frac{f(p_i, p_j, v_1, \dots, v_m)}{g_1(p_i, v_1, \dots, v_m)} \partial_i v_1, & i, j &= 1, \dots, N, \quad i \neq j, \\ \frac{\partial_i v_1}{g_1(p_i, v_1, \dots, v_m)} &= \frac{\partial_i v_j}{g_j(p_i, v_1, \dots, v_m)}, & j &= 2, \dots, m, \quad i = 1, \dots, N, \\ \partial_i \partial_j v_1 &= q(p_i, p_j, v_1, \dots, v_m) \partial_i v_1 \partial_j v_1, & i, j &= 1, \dots, N, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $f(p_1, p_2)$ имеет вид (1.12). В действительности $1/g_1(p_i)$ является вычетом функции $f(p_i, p_j)$ из системы (1.7) при $p_j = p_i$. Пусть

$$g(p) = \sum_{i=1}^m g_i(p, v_1, \dots, v_m) \frac{\partial}{\partial v_i}.$$

Совместность системы (4.1) влечет $\partial_1 \partial_2 \phi(p_3, v_1, \dots, v_m) = \partial_2 \partial_1 \phi(p_3, v_1, \dots, v_m)$ для произвольной функции ϕ . Это условие можно представить так:

$$\begin{aligned} & \left(f(p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial p_2} + f(p_1, p_3) \frac{\partial}{\partial p_3} + g(p_2) \right) \left(\left(f(p_2, p_3) \frac{\partial}{\partial p_3} + g(p_2) \right) \phi(p_3) \frac{\partial_2 u_1}{g_1(p_2)} \right) \frac{\partial_1 u_1}{g_1(p_1)} = \\ & = \left(f(p_2, p_1) \frac{\partial}{\partial p_1} + f(p_2, p_3) \frac{\partial}{\partial p_3} + g(p_1) \right) \left(\left(f(p_1, p_3) \frac{\partial}{\partial p_3} + g(p_1) \right) \phi(p_3) \frac{\partial_1 u_1}{g_1(p_1)} \right) \frac{\partial_2 u_1}{g_1(p_2)}. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и приравнявая коэффициенты при ϕ и ϕ_{p_3} , получаем

$$\begin{aligned} & f(p_1, p_2) f(p_2, p_3)_{p_2} - f(p_2, p_1) f(p_1, p_3)_{p_1} + f(p_1, p_3) f(p_2, p_3)_{p_3} - \\ & - f(p_2, p_3) f(f(p_1, p_3)_{p_3} + g(p_1)(f(p_2, p_3))) - g(p_2)(f(p_1, p_3)) + \\ & + f(p_2, p_3) \left(g_1(p_1) \frac{\partial_1 \partial_2 u_1}{\partial_1 u_1 \partial_2 u_1} - \frac{1}{g_1(p_2)} \left(f(p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial p_2} + g(p_1) \right) (g_1(p_2)) \right) - \\ & - f(p_1, p_3) \left(g_1(p_2) \frac{\partial_1 \partial_2 u_1}{\partial_1 u_1 \partial_2 u_1} - \frac{1}{g_1(p_1)} \left(f(p_2, p_1) \frac{\partial}{\partial p_1} + g(p_2) \right) (g_1(p_1)) \right) = 0, \\ & f(p_1, p_2) g'(p_2) - f(p_2, p_1) g'(p_1) + [g(p_1), g(p_2)] + \\ & + \left(g_1(p_1) \frac{\partial_1 \partial_2 u_1}{\partial_1 u_1 \partial_2 u_1} - \frac{1}{g_1(p_2)} \left(f(p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial p_2} + g(p_1) \right) (g_1(p_2)) \right) g(p_2) - \\ & - \left(g_1(p_2) \frac{\partial_1 \partial_2 u_1}{\partial_1 u_1 \partial_2 u_1} - \frac{1}{g_1(p_1)} \left(f(p_2, p_1) \frac{\partial}{\partial p_1} + g(p_2) \right) (g_1(p_1)) \right) g(p_1) = 0. \end{aligned}$$

Разлагая первое из этих уравнений вблизи диагонали $p_2 = p_3$ и замечая, что

$$f(p_1, p_2) f(p_2, p_3)_{p_2} + f(p_1, p_3) f(p_2, p_3)_{p_3} - f(p_2, p_3) f(p_1, p_3)_{p_3} = -\frac{2f(p_1, p_2)_{p_2}}{p_2 - p_3} + O(1),$$

имеем

$$g_1(p_1) \frac{\partial_1 \partial_2 u_1}{\partial_1 u_1 \partial_2 u_1} - \frac{1}{g_1(p_2)} \left(f(p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial p_2} + g(p_1) \right) (g_1(p_2)) = 2f(p_1, p_2)_{p_2}.$$

Подставим это выражение в наши уравнения, получим соотношения (1.14), (1.13) для локальной структуры ГЦ.

Можно проверить, что все описанные шаги обратимы и любая локальная структура ГЦ с соотношениями (1.13), (1.14) порождает систему Гиббонса–Царева (4.1); при этом

$$\partial_1 \partial_2 u_1 = \left(\frac{2f(p_1, p_2)_{p_2}}{g_1(p_1)} + \frac{1}{g_1(p_1)g_1(p_2)} \left(f(p_1, p_2) \frac{\partial}{\partial p_2} + g(p_1) \right) (g_1(p_2)) \right) \partial_1 u_1 \partial_2 u_1.$$

Предложение доказано. ■

5. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ИЕРАРХИЙ ТИПА УИЗЕМА

В этом разделе мы объясняем, как связаны интегрируемые иерархии типа Уизема и обобщенные структуры ГЦ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Иерархия типа Уизема с потенциалами $h_i(p, v_1, \dots, v_m)$, $i = 1, \dots, M$, интегрируема методом гидродинамических редукций тогда и только тогда, когда существует такая система Гиббонса–Царева (4.1), что в силу уравнений этой системы*

$$h'_j(p_1)\partial_1(h_i(p_2)) = h'_i(p_1)\partial_1(h_j(p_2)), \quad i, j = 1, \dots, M. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (5.1) можно представить в виде

$$f(p_1, p_2) = \frac{\sum_{k=1}^m (h'_i(p_1)h_j(p_2)_{v_k} - h'_j(p_1)h_i(p_2)_{v_k})g_k(p_1)}{h'_j(p_1)h'_i(p_2) - h'_j(p_2)h'_i(p_1)}, \quad (5.2)$$

и оно совпадает с формулой (77) из работы [7], где доказано, что уравнение (5.2) эквивалентно интегрируемости данной иерархии типа Уизема. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Существует взаимно однозначное соответствие между интегрируемыми иерархиями типа Уизема и обобщенными локальными структурами ГЦ. При таком соответствии пространство потенциалов иерархии типа Уизема совпадает с пространством решений линейной системы (3.5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напишем (5.1) в виде

$$\frac{\partial_1 h_i(p_2)}{h'_i(p_1)} = \frac{\partial_1 h_j(p_2)}{h'_j(p_1)}.$$

Взяв производную ∂_1 в числителях, получим

$$\frac{f(p_1, p_2)h'_i(p_2) + g(p_1)(h_i(p_2))}{h'_i(p_1)} = \frac{f(p_1, p_2)h'_j(p_2) + g(p_1)(h_j(p_2))}{h'_j(p_1)}.$$

Пусть $\lambda(p_1, p_2) = (f(p_1, p_2)h'_i(p_2) + g(p_1)(h_i(p_2)))/h'_i(p_1)$, эта функция не зависит от i . Поэтому имеем

$$g(p_1)(h_i(p_2)) = \lambda(p_1, p_2)h'_i(p_1) - f(p_1, p_2)h'_i(p_2),$$

что совпадает с уравнением (3.5). Применяя соотношение (1.13) к $h_i(p_3)$, можно написать равенство

$$\begin{aligned} g(p_1)g(p_2)(h_i(p_3)) - g(p_2)g(p_1)(h_i(p_3)) = \\ = f(p_2, p_1)b'(p_1)(h_i(p_3)) - f(p_1, p_2)b'(p_2)(h_i(p_3)) + \\ + 2f(p_2, p_1)_{p_1}b(p_1)(h_i(p_3)) - 2f(p_1, p_2)_{p_2}b(p_2)(h_i(p_3)). \end{aligned}$$

Вычисляя левую и правую части этого равенства с использованием (3.5), получаем уравнение (1.15). ■

6. ГОЛОМОРФНЫЕ ОБЪЕКТЫ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ И ДЕФОРМАЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУР

Пусть $\mathcal{E} = \mathbb{D}/\Gamma$ – компактная риманова поверхность рода $g > 1$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ – ее универсальное накрытие и $\Gamma = \pi_1(\mathcal{E})$. Обозначим через $a_\alpha, b_\alpha, \alpha = 1, \dots, g$, канонический базис группы гомологий $H_1(\mathcal{E}, \mathbb{Z})$. Выберем координаты в $\mathbb{D}$ и будем использовать одни и те же символы для голоморфных объектов на $\mathcal{E}$ и их поднятий на $\mathbb{D}$. Кроме того, будем использовать один и тот же символ для точки в $\mathcal{E}$, ее поднятия в $\mathbb{D}$ и для ее координаты. Пусть $\omega_\alpha(z) dz$ – базис голоморфных 1-форм на $\mathcal{E}$, нормированных условием $\int_{a_\alpha} \omega_\beta dz = \delta_{\alpha\beta}$. Выделим базисную точку z_0 и введем абелево отображение $q_\alpha(z) = \int_{z_0}^z \omega_\alpha(z) dz$. Заметим, что $\omega_\alpha = q'_\alpha$. Обозначим главную форму как²⁾ $E(x, y)(dx)^{-1/2}(dy)^{-1/2}$.

Пусть $B_{\alpha\beta} = \int_{b_\alpha} \omega_\beta dz$ – матрица b -периодов. Подробности, касающиеся голоморфных объектов на римановых поверхностях, изложены в работах [13]–[15]. Вспомним, что

$$E(v, u) = -E(u, v), \quad E(u, v) = u - v - \frac{1}{12}S(u)(u - v)^3 + O(u - v)^4, \quad (6.1)$$

где $S(p)$ – проективная связность Бергмана на $\mathcal{E}$. Заметим, что функция $E(u, v)$ многозначна. Если u или v сместить с помощью a_α , она остается инвариантной. Если u сместить с помощью b_α в $\bar{u}$ или v сместить с помощью b_α в $\bar{v}$, то

$$\begin{aligned} E(\bar{u}, v) &= E(u, v) e^{-\pi i B_{\alpha\alpha} + 2\pi i (q_\alpha(v) - q_\alpha(u))}, \\ E(u, \bar{v}) &= E(u, v) e^{-\pi i B_{\alpha\alpha} - 2\pi i (q_\alpha(v) - q_\alpha(u))}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Пусть $W(u, v) = (\ln(E(u, v)))_{uv}$ – ядро Бергмана. Известно, что

$$\begin{aligned} \int_{a_i} W(u, v) du &= 0, \quad \int_{b_\alpha} W(u, v) du = 2\pi i \omega_\alpha(v), \\ \int_{b_\alpha} \int_{b_\beta} W(u, v) du dv &= 2\pi i B_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Напомним описание пространства, касательного³⁾ к пространству M_g модулей римановых поверхностей в точке, соответствующей $\mathcal{E}$ [19], [20].

Пусть $p \in \mathcal{E}$ – центр малого диска $D \subset \mathcal{E}$. Пусть L – алгебра Ли голоморфных векторных полей на $D \setminus \{p\}$ и L_p, L_{out} – подалгебры алгебры L , состоящие из векторных полей голоморфных соответственно в точке p и на $\mathcal{E} \setminus \{p\}$. Известно, что пространство, касательное к пространству модулей M_g , изоморфно фактору $L/(L_p \oplus L_{\text{out}})$.

Пусть $M_{g,1}$ – пространство модулей римановых поверхностей с проколом в $u \in \mathcal{E}$. Касательное к $M_{g,1}$ пространство изоморфно фактору $L/(L_p \oplus L_{\text{out},u})$, где подалгебра $L_{\text{out},u} \subset L_{\text{out}}$ состоит из векторных полей с нулем в u . Построим векторные пространства, дуальные к этим касательным пространствам, используя теорему

²⁾В настоящей работе мы представляем дифференциально-геометрические объекты как функции с предписанными законами преобразований по отношению к произвольной замене координат. Например, если $x = \mu(\tilde{x})$, $y = \mu(\tilde{y})$, то главная форма преобразуется следующим образом: $\bar{E}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mu'(\tilde{x})^{-1/2} \mu'(\tilde{y})^{-1/2} E(\mu(\tilde{x}), \mu(\tilde{y}))$.

³⁾Различные подходы к теории деформаций комплексных структур изложены в [16]–[18].

Серра о двойственности [21]. Существует невырожденное спаривание между пространством L и пространством Q квадратичных дифференциалов, голоморфных на $D \setminus \{p\}$. Это спаривание задается условием $(v, q) = \text{Res}_p(vq)$. Пространство, являющееся дуальным пространству, касательному к M_g , совпадает с $(L_p \oplus L_{\text{out}})^\perp \subset Q$ и состоит из квадратичных дифференциалов, голоморфных на $\mathcal{E}$. Аналогично, пространство, являющееся дуальным пространству, касательному к $M_{g,1}$, совпадает с $(L_p \oplus L_{\text{out},u})^\perp \subset Q$ и состоит из голоморфных на $\mathcal{E} \setminus \{u\}$ квадратичных дифференциалов с полюсом в u порядка не выше первого. В общем случае пространство, являющееся дуальным пространству, касательному к пространству $M_{g,n}$ модулей римановых поверхностей с проколами в $u_1, \dots, u_n$, состоит из голоморфных на $\mathcal{E} \setminus \{u_1, \dots, u_n\}$ квадратичных дифференциалов с полюсами порядка не выше первого в точках $u_1, \dots, u_n$.

Пусть $v_1, \dots, v_{3g-3}$ – локальные координаты в пространстве модулей M_g . Пусть

$$\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_{3g-3}}$$

образуют соответствующий базис в касательном пространстве, а

$$g_1(p) dp^2, \dots, g_{3g-3}(p) dp^2$$

есть двойственный базис в пространстве квадратичных дифференциалов. Объект⁴⁾

$$G(p) dp^2 = \sum_{i=1}^{3g-3} g_i(p) dp^2 \frac{\partial}{\partial v_i}$$

не зависит от выбора координат. Аналогичное построение для пространства $M_{g,n}$ порождает объект

$$\hat{G}(p) dp^2 = \sum_{i=1}^n F(p, u_i) dp^2 \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{3g-3} g_j(p) dp^2 \frac{\partial}{\partial v_j},$$

где $u_1, \dots, u_n$ – координаты n точек в $\mathcal{E}$ и

$$F(p_1, p_2) = \frac{1}{p_1 - p_2} + O(1). \quad (6.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *При произвольном изменении координат*

$$p = \mu(\tilde{p}, v_1, \dots, v_{3g-3}), \quad u_i = \mu(\tilde{u}_i, v_1, \dots, v_{3g-3}) \quad (6.5)$$

объекты $G(p)$, $F(p_1, p_2)$ подчиняются следующим правилам преобразования:

$$\tilde{G}(\tilde{p}) = \mu'(\tilde{p})^2 G(\mu(\tilde{p})), \quad (6.6)$$

$$\tilde{F}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\mu'(\tilde{p}_1)^2}{\mu'(\tilde{p}_2)} (F(\mu(\tilde{p}_1), \mu(\tilde{p}_2)) - G(\mu(\tilde{p}_1))(\mu(\tilde{p}_2))). \quad (6.7)$$

⁴⁾Заметим, что функции G , g_i , F и т. д. также зависят от $v_1, \dots, v_{3g-3}$. Мы часто будем опускать эти аргументы для упрощения формул.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (6.6) означает, что $G(p)$ – квадратичный дифференциал в точке p (со значениями на множестве векторных полей от переменных $v_1, \dots, v_{3g-3}$). Чтобы получить равенство (6.7), произведем произвольную замену координат $p = \mu(\tilde{p}, v_1, \dots, v_{3g-3})$, $u_i = \mu(\tilde{u}_i, v_1, \dots, v_{3g-3})$, $v_j = \tilde{v}_j$ и потребуем, чтобы объект $\widehat{G}(p)$ преобразовывался как векторное поле от $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{3g-3}$. Соотношение (6.7) следует из этого требования. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Справедливы следующие тождества:*

$$[G(p_1), G(p_2)] = F(p_2, p_1)G'(p_1) - F(p_1, p_2)G'(p_2) + \\ + 2F(p_2, p_1)_{p_1}G(p_1) - 2F(p_1, p_2)_{p_2}G(p_2), \quad (6.8)$$

$$[\widehat{G}(p_1), \widehat{G}(p_2)] = F(p_2, p_1)\widehat{G}'(p_1) - F(p_1, p_2)\widehat{G}'(p_2) + \\ + 2F(p_2, p_1)_{p_1}\widehat{G}(p_1) - 2F(p_1, p_2)_{p_2}\widehat{G}(p_2), \quad (6.9)$$

$$G(p_2)(F(p_1, p_3)) - G(p_1)(F(p_2, p_3)) = F(p_1, p_2)F(p_2, p_3)_{p_2} - F(p_2, p_1)F(p_1, p_3)_{p_1} + \\ + F(p_1, p_3)F(p_2, p_3)_{p_3} - F(p_2, p_3)F(p_1, p_3)_{p_3} + \\ + 2F(p_2, p_3)F(p_1, p_2)_{p_2} - 2F(p_1, p_3)F(p_2, p_1)_{p_1}, \quad (6.10)$$

$$\frac{G(p_1)(E(p_2, p_3))}{E(p_2, p_3)} = \frac{1}{2}F(p_1, p_2)_{p_2} + \frac{1}{2}F(p_1, p_3)_{p_3} - F(p_1, p_2)\frac{E(p_2, p_3)_{p_2}}{E(p_2, p_3)} - \\ - F(p_1, p_3)\frac{E(p_2, p_3)_{p_3}}{E(p_2, p_3)} - \frac{1}{2}\left(\frac{E(p_1, p_2)_{p_1}}{E(p_1, p_2)} - \frac{E(p_1, p_3)_{p_1}}{E(p_1, p_3)}\right)^2, \quad (6.11)$$

$$G(p_1)\left(\int_{p_2}^{p_3} \omega_i\right) = F(p_1, p_2)\omega_i(p_2) - F(p_1, p_3)\omega_i(p_3) - \\ - \frac{E(p_1, p_2)_{p_1}}{E(p_1, p_2)}\omega_i(p_1) + \frac{E(p_1, p_3)_{p_1}}{E(p_1, p_3)}\omega_i(p_1), \quad (6.12)$$

$$G(p)(B_{jk}) = 2\pi i\omega_j(p)\omega_k(p). \quad (6.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что (6.9) является формальным следствием тождеств (6.8) и (6.10) (см. предложение 3.1).

Рассмотрим разность выражений в левой и правой частях каждого из уравнений (6.8), (6.10)–(6.12). Разлагая эти выражения на каждой диагонали $p_i = p_j$, $i \neq j$, и используя формулы (6.1) и (6.4), можно проверить, что все они голоморфны на всех диагоналях. Производя произвольную замену координат вида $p_i = \mu(\tilde{p}_i, v_1, \dots, v_{3g-3})$, $i = 1, 2, 3$, убедимся в том, что все эти разности преобразуются, как тензорные поля от переменных p_1, p_2, p_3 . В частности, разность левой и правой части уравнения (6.10) является голоморфным квадратичным дифференциалом в переменных p_1, p_2 и голоморфным векторным полем от p_3 . Это доказывает соотношение (6.10), поскольку всякое голоморфное векторное поле равно нулю.

Аналогично, разности между левыми и правыми частями уравнений (6.11), (6.12) являются голоморфными квадратичными дифференциалами от p_1 и голоморфными функциями переменных p_2, p_3 . Более того, эти функции равны нулю на диагонали $p_2 = p_3$. Это докажет соотношения (6.11), (6.12) (любая голоморфная функция постоянна), если доказать, что разности между левыми и правыми частями однозначны.

Взяв вторую производную уравнения (6.11), получим

$$G(p_1)(W(p_2, p_3)) = - \left(F(p_1, p_2) \frac{E(p_2, p_3)_{p_2}}{E(p_2, p_3)} + F(p_1, p_3) \frac{E(p_2, p_3)_{p_3}}{E(p_2, p_3)} - \frac{E(p_1, p_2)_{p_1} E(p_1, p_3)_{p_1}}{E(p_1, p_2) E(p_1, p_3)} \right)_{p_2 p_3}, \quad (6.14)$$

где $W(p_2, p_3) = (\ln E(p_2, p_3))_{p_2 p_3}$ – ядро Бергмана. Докажем это тождество. Пусть $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ – разность левой и правой частей равенства (6.14). Она представляет собой квадратичный дифференциал от p_1 и 1-форму по каждой из переменных p_2, p_3 . Используя свойства преобразования (6.2), заметим, что разность $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ однозначна. Поэтому

$$\Delta(p_1, p_2, p_3) = \sum_{\alpha, \beta=1}^g r_{\alpha\beta}(p_1) \omega_\alpha(p_2) \omega_\beta(p_3),$$

где $r_{\alpha\beta}(p_1)$ – некоторые голоморфные квадратичные дифференциалы. Вычисляя $\int_{a_\alpha} \int_{a_\beta} \Delta(p_1, p_2, p_3) dp_2 dp_3$, получаем $r_{\alpha\beta}(p_1) = 0$, что доказывает (6.14). Вычисляя $\int_{b_\alpha} \int_{b_\beta} dp_2 dp_3$ от левой и правой частей уравнения (6.14) и используя (6.3) и (6.2), получаем уравнение (6.13). Разность между левой и правой частями уравнения (6.12) однозначна в силу (6.13). Это доказывает соотношение (6.12).

Уравнение (6.11) доказывается аналогично. Заметим, что разность левой и правой частей уравнения (6.11) однозначна в силу (6.12). Уравнение (6.8) доказывается применением его левой и правой частей к B_{jk} . Например, в левой части мы имеем $G(p_1)(G(p_2)(B_{jk})) - G(p_2)(G(p_1)(B_{jk}))$. Проведя вычисления с помощью формул (6.13), (6.12), мы завершаем доказательство соотношения (6.8). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Напомним, что тета-функция Римана определяется выражением

$$\theta(z_1, \dots, z_g) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i \mathbf{m} \cdot \mathbf{z} + \pi i \mathbf{m} \mathbf{B} \mathbf{m}^t}.$$

Здесь $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_g)$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_g)$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{z} = m_1 z_1 + \dots + m_g z_g$, а $\mathbf{B}$ – матрица периодов. Имеем

$$\begin{aligned} G(p)(\theta(z_1, \dots, z_g)) &= \sum_{\alpha, \beta=1}^g \frac{\partial \theta(z_1, \dots, z_g)}{\partial B_{\alpha\beta}} G(p)(B_{\alpha\beta}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^g \frac{\partial^2 \theta(z_1, \dots, z_g)}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \omega_\alpha(p) \omega_\beta(p), \end{aligned}$$

где мы воспользовались уравнением теплопроводности для θ и формулой (6.13).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Разлагая (6.11) на диагонали $p_2 = p_3$, получаем

$$G(p_1)(S(p_2)) + F(p_1, p_2)_{p_2^3} + 2S(p_2)F(p_1, p_2)_{p_2} + S(p_2)_{p_2}F(p_1, p_2) - 6W(p_1, p_2)^2 = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Соотношения (6.8), (6.10) показывают, что G , F определяют структуру ГЦ на пространстве модулей M_g .

ПРИМЕР 6.1. Пусть $g = 2$. Представим $\mathcal{E}$ как двукратное накрытие пространства $\mathbb{C}P^1$. Пусть x – аффинная координата в $\mathbb{C}P^1$ и точки ветвления накрытия суть $x = 0, 1, \infty, a, b, c$. Кривая $\mathcal{E}$ задана уравнением $y^2 = x(x-1)(x-a)(x-b)(x-c)$. Можно проверить, что

$$G(p) = \frac{1}{2p(p-1)} \left(\frac{a(a-1)}{p-a} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{b(b-1)}{p-b} \frac{\partial}{\partial b} + \frac{c(c-1)}{p-c} \frac{\partial}{\partial c} \right),$$

$$F(p_1, p_2) = \frac{(p_1-a)(p_1-b)(p_1-c)p_2(p_2-1) + q_1q_2}{2(p_1-p_2)p_1(p_1-1)(p_1-a)(p_1-b)(p_1-c)},$$

где p, p_1, p_2 – аффинные координаты в $\mathbb{C}P^1$ и $q_i^2 = p_i(p_i-1)(p_i-a)(p_i-b)(p_i-c)$.

Сравним наши вариационные формулы с формулами Рауха. Уравнение (6.13) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p(p-1)} \left(\frac{a(a-1)}{p-a} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{b(b-1)}{p-b} \frac{\partial}{\partial b} + \frac{c(c-1)}{p-c} \frac{\partial}{\partial c} \right) (B_{jk}) dp^2 = \\ = 2\pi i \omega_j(p) dp \cdot \omega_k(p) dp. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Пусть τ – локальная координата вблизи точки ветвления a , тогда имеем $p = a + \tau^2$, $dp = 2\tau d\tau$. Разложив левую часть уравнения (6.15), получим $(2\frac{\partial B_{jk}}{\partial a} + O(\tau)) d\tau^2$. Поэтому

$$\frac{\partial B_{jk}}{\partial a} = \pi i \frac{\omega_j(p) dp}{d\tau} \Big|_{p=a} \frac{\omega_k(p) dp}{d\tau} \Big|_{p=a},$$

и мы приходим к формуле Рауха.

В общем случае, если $\mathcal{E}$ представлена как разветвленное накрытие пространства $\mathbb{C}P^1$ с точками ветвления в $a_k \in \mathbb{C}P^1$ и индексами ветвления r_k , $k = 1, 2, \dots$, то мы имеем

$$G(p) dp^2 = \left(\frac{1}{r_k(p-a_k)} \frac{\partial}{\partial a_k} + o((p-a_k)^{-1}) \right) dp^2,$$

при этом формулы Рауха можно получить из наших аналогичным образом.

ПРИМЕР 6.2. Выберем $B_{j_1, k_1}, \dots, B_{j_{3g-3}, k_{3g-3}}$ в качестве локальных координат в пространстве модулей M_g . Применяя (6.13) к B_{j_l, k_l} , получаем

$$G(p) = 2\pi i \sum_{l=1}^{3g-3} \omega_{j_l}(p) \omega_{k_l}(p) \frac{\partial}{\partial B_{j_l, k_l}}.$$

Снова применяя (6.13) к произвольной локальной координате B_{jk} , получаем квадратичные соотношения между нормированными дифференциалами. А именно, если равенство $S(B_{11}, B_{12}, \dots, B_{gg}) = 0$ связывает элементы матрицы периодов (из этих элементов $g(g+1)/2 - 3g + 3$ функционально независимы), то

$$\sum_{j,k=1}^g \frac{\partial S}{\partial B_{jk}} \omega_j(p) \omega_k(p) = 0.$$

Аналогичные формулы для квадратичных соотношений между нормированными дифференциалами приведены в работе [22].

7. УНИВЕРСАЛЬНАЯ ИЕРАРХИЯ УИЗЕМА

В этом разделе используются обозначения из раздела 6 включая $G(p)$ и $F(p_1, p_2)$.

Согласно работе [2] универсальная иерархия Уизема задается потенциалами, полученными интегрированием мероморфных дифференциалов на римановой поверхности. Мы строим эту иерархию в явном виде⁵⁾ и доказываем ее интегрируемость методом гидродинамических редукций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Фиксируем постоянные $s_1, \dots, s_m$ так, что $s_1 + \dots + s_m = 1$ (в простейшем случае $m = 1$ и $s_1 = 1$). Обобщенная структура ГЦ задается следующими формулами:*

$$g(p) = \sum_{j=1}^n F(p, u_j) \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{k=1}^m F(p, w_k) \frac{\partial}{\partial w_k} + G(p), \quad f(p_1, p_2) = F(p_1, p_2),$$

$$\lambda(p_1, p_2) = \frac{E(p_1, p_2)_{p_1}}{E(p_1, p_2)} - \sum_{k=1}^m s_k \frac{E(p_1, w_k)_{p_1}}{E(p_1, w_k)}. \quad (7.1)$$

Кроме того, пространству потенциалов этой обобщенной структуры ГЦ принадлежат следующие функции:

$$h_j(p) - h_1(p), \quad j = 2, \dots, n, \quad q_\alpha(p) - \sum_{k=1}^m s_k q_\alpha(w_k), \quad \alpha = 1, \dots, g,$$

где

$$h_j(p) = \ln E(p, u_j) - \sum_{k=1}^m s_k \ln E(u_j, w_k). \quad (7.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем тождества (1.15) и (3.5) для заданных $\lambda(p_1, p_2)$ и потенциалов. Это можно сделать прямыми вычислениями с помощью тождеств из предложения 6.2. Простейший способ – начать с формулы (3.5) для $h_j(p) - h_1(p)$ и проверить ее с помощью тождества (6.11). Из доказательства предложения 6.2 ясно, что (1.15) является следствием соотношения (3.5). Из предложения 3.3 следует, что $\frac{1}{2\pi i} \int_{b_\alpha} \lambda(t, p) dt$ также являются потенциалами нашей иерархии. Вычисляя эти интегралы с помощью (6.2), приходим к выводу, что функции $q_\alpha(p) - \sum_{k=1}^m s_k q_\alpha(w_k)$, $\alpha = 1, \dots, g$, принадлежат пространству потенциалов. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Универсальная иерархия Уизема интегрируема методом гидродинамических редукций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что векторное пространство, натянутое на производные по p от потенциалов, описанных в предыдущем предложении, совпадает с пространством дифференциалов, мероморфных на $\mathcal{E}$, голоморфных всюду, кроме точек $u_1, \dots, u_n$, и имеющих в этих точках полюсы порядка не выше первого. Поэтому мы получаем часть универсальной иерархии Уизема. Чтобы получить полную иерархию, мы применяем процедуру столкновения точек (см. предложение 3.2 и замечание 3.4). Это доказывает предложение в случае $g > 1$.

⁵⁾ Чтобы получить интегрируемую иерархию, нужно тщательно выбирать постоянную интегрирования.

В случае $g = 0$ определим обобщенную структуру ГЦ с помощью формул (3.8) и положим $\lambda(p_1, p_2) = 1/(p_1 - p_2)$. Пространство потенциалов содержит функции $h_j(p) - h_1(p)$, $j = 2, \dots, n + 2$, где

$$h_j(p) = \ln(p - u_j) \quad j = 1, \dots, n, \quad h_{n+1}(p) = \ln p, \quad h_{n+2}(p) = \ln(p - 1).$$

Это дает часть универсальной иерархии Уизема, соответствующую мероморфным дифференциалам на $\mathbb{CP}^1$ с полюсами порядка не выше первого в точках $u_1, \dots, u_n$ и 0, 1. Для получения полной иерархии столкнем эти точки с помощью процедуры, аналогичной использованной при доказательстве предложения 3.2; см. также замечания 3.3 и 3.4.

В случае $g = 1$ определим обобщенную структуру ГЦ по формулам (3.9) и положим

$$\lambda(p_1, p_2) = \rho(p_1 - p_2, \tau) - \rho(p_1) - 2\pi i.$$

Пространство потенциалов содержит $p - \tau$ и функции $h_j(p) - h_1(p)$, $j = 2, \dots, n$, где $h_j(p) = \ln \theta(p - u_j, \tau) - \ln \theta(u_j, \tau)$. Это дает часть универсальной иерархии Уизема, соответствующую мероморфным дифференциалам на $\mathcal{E}$ с полюсами порядка не выше первого в $u_1, \dots, u_n$. Чтобы получить полную иерархию, столкнем некоторые из этих точек с помощью процедуры, аналогичной той, что использовалась при доказательстве предложения 3.2, см. также замечание 3.4. ■

Благодарности. Я выражаю благодарность Максиму Концевичу за полезные обсуждения. Эта статья была закончена в течение моего визита в Institut des hautes études scientifiques (IHES) Я выражаю благодарность IHES за гостеприимство и отличную рабочую атмосферу.

Список литературы

- [1] V. E. Zakharov, “Dispersionless limit of integrable systems in $2 + 1$ dimensions”, *Singular Limits of Dispersive Waves* (Lyons, France, July 8–12, 1991), NATO ASI Series. Ser. B. Physics, **320**, eds. N. M. Ercolani, I. R. Gabitov, C. D. Levermore, D. Serre, Plenum, New York, 1994, 165–174.
- [2] I. M. Krichever, “The τ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475.
- [3] J. Gibbons, S. P. Tsarev, “Reductions of Benney’s equations”, *Phys. Lett. A*, **211**:1 (1996), 19–24; “Conformal maps and reductions of the Benney equations”, *Phys. Lett. A*, **258**:4–6 (1999), 263–270.
- [4] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, “On integrability of $(2+1)$ -dimensional quasilinear systems”, *Commun. Math. Phys.*, **248**:1 (2004), 187–206.
- [5] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, “The characterization of 2-component $(2 + 1)$ -dimensional integrable systems of hydrodynamic type”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:8 (2004), 2949–2963.
- [6] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, S. P. Tsarev, “On a class of three-dimensional integrable Lagrangians”, *Commun. Math. Phys.*, **261**:1 (2006), 225–243.
- [7] А. В. Одесский, В. В. Соколов, “Интегрируемые $(2 + 1)$ -мерные системы гидродинамического типа”, *ТМФ*, **163**:2 (2010), 179–221.
- [8] A. V. Odesskii, V. V. Sokolov, “Integrable pseudopotentials related to generalized hypergeometric functions”, *Selecta Math. (N. S.)*, **16**:1 (2010), 145–172.
- [9] И. М. Кривчер, “Метод усреднения для двумерных “интегрируемых” уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:3 (1988), 37–52.

- [10] A. V. Odesskii, “A family of $(2 + 1)$ -dimensional hydrodynamic type systems possessing a pseudopotential”, *Selecta Math. (N. S.)*, **13**:4 (2008), 727–742.
- [11] A. Odesskii, “A simple construction of integrable Whitham type hierarchies”, *Geometric Methods in Physics*, XXXII Workshop (Białowieża, Poland, June 30–July 6, 2013), Trends in Mathematics, eds. P. Kielanowski, P. Bieliavsky, A. Odesskii, A. Odziejewicz, M. Schlichenmaier, T. Voronov, Birkhäuser, Basel, 2014, 195–208.
- [12] B. A. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum Groups*, Lectures given at the 1st Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) (Montecatini Terme, June 14–22, 1993), Lecture Notes in Mathematics, **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348.
- [13] J. D. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, **352**, Springer, Berlin–New York, 1973.
- [14] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta II: Jacobian theta functions and differential equations*, Progress in Mathematics, **43**, Birkhäuser, Boston, MA, 1984.
- [15] A. Kokotov, D. Korotkin, “Tau-functions on spaces of Abelian differentials and higher genus generalizations of Ray–Singer formula”, *J. Differ. Geom.*, **82**:1 (2009), 35–100.
- [16] H. E. Rauch, “Weierstrass points, branch points, and moduli of Riemann surfaces”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **12**:3 (1959), 543–560.
- [17] J. D. Fay, *Kernel functions, analytic torsion, and moduli spaces*, Memoirs of the American Mathematical Society, **96**, № 464, AMS, Providence, RI, 1992.
- [18] K. Kodaira, *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2005.
- [19] М. Л. Концевич, “Алгебра Вирасоро пространства Тейхмюллера”, *Функц. анализ и его прил.*, **21**:2 (1987), 78–79.
- [20] A. A. Beilinson, V. V. Schechtman, “Determinant bundles and Virasoro algebras”, *Commun. Math. Phys.*, **118**:4 (1988), 651–701.
- [21] J. Tate, “Residues of differentials on curves”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4*, **1**:1 (1968), 149–159.
- [22] A. Andreotti, A. L. Mayer, “On period relations for Abelian integrals on algebraic curves”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **21**:2 (1967), 189–238.

Поступила в редакцию 13.09.2016,
после доработки 21.09.2016