Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. М. Мухамадиев, А. Н. Наимов, Исследование решений одного нелинейного дифференциального уравнения скалярного поля, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 1, 25–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:04:23

© 2017 г.

Э. М. Мухамадиев*, А. Н. Наимов*

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение, возникающее в математических моделях теории элементарных частиц. Для данного уравнения исследованы вопросы о продолжимости решений, об ограниченности решений на бесконечности и о поиске новых условий существования положительного частицеподобного решения.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение скалярного поля, продолжимость решения, ограниченность решения на бесконечности, частицеподобное решение.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9278>

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена исследованию ненулевых решений нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения следующего вида:

$$\psi''(x) = \left(1 + \frac{c}{x^2}\right)\psi(x) - \frac{1}{x^\alpha}|\psi(x)|^{k-1}\psi(x), \quad x > 0. \quad (1)$$

Здесь $\alpha > 0$, $k > 1$, c – вещественные параметры. Уравнения вида (1) возникают в математических моделях теории элементарных частиц (см. статьи [1]–[4]). В работе [3] уравнение (1) называется нелинейным уравнением скалярного поля, ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(+\infty) = 0, \quad (2)$$

называется частицеподобным решением.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 15-01-04713_a, 16-01-00150_a).

*Вологодский государственный университет, Россия.
E-mail: emuhamadiev@rambler.ru, nan67@rambler.ru

В статье [3] приведен вывод краевой задачи вида (1), (2) из нелинейного уравнения скалярного комплексного поля вида

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(t, z) - \Delta \Psi(t, z) + M^2(1 + F(\Psi^*(t, z)\Psi(t, z)))\Psi(t, z) = 0.$$

Этим объясняется актуальность исследования частицеподобных решений уравнений вида (1) для нелинейной полевой теории элементарных частиц. В работе [3] также приведен обзор литературы, посвященной исследованию частицеподобных решений для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений теории поля.

Вопрос о существовании частицеподобных решений уравнения (1) изучен в статьях [1]–[3], [5]. В работе [3] доказано существование положительного частицеподобного решения уравнения (1) в случае, когда $\alpha = k - 1$, $1 < k < 5$ и $c = l(l - 1)$, где l – целое неотрицательное число. А в работе [5] показано, что если выполнены условия $c > -1/4$, $k > 1$, $0 < 2\alpha < k + 3$, то существует счетное число частицеподобных решений уравнения (1) и среди них есть положительное решение.

Основная математическая проблема, рассматриваемая в настоящей работе, заключается в поиске новых условий, при которых существует ненулевое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2). Такое решение, в первую очередь, должно быть определено на промежутке $(0, +\infty)$. В связи с этим возникает вопрос о продолжимости решений уравнения (1): если $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению (1) на некотором интервале (a, b) , то можно ли продолжить $\psi(x)$ на промежуток $(0, +\infty)$ как решение уравнения (1)? Для уравнения (1), как и для любого нелинейного дифференциального уравнения, вопрос о продолжимости решений требует дополнительного исследования.

Если ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения (1) определено на промежутке $(0, +\infty)$ и удовлетворяет условиям (2), то оно должно быть ограничено на бесконечности в следующем смысле: $\sup\{|\psi(x)| : x \geq 1\} < \infty$. Поэтому необходимо, во-первых, выяснить, при каких условиях ненулевое решение уравнения (1) может быть ограничено на бесконечности. Во-вторых, среди решений, ограниченных на бесконечности, необходимо выделить те, которые удовлетворяют условиям (2).

Перечисленные выше математические проблемы не рассмотрены в работах, посвященных исследованию краевой задачи (1), (2).

В настоящей статье исследованы следующие вопросы: о продолжимости ненулевых решений уравнения (1); об ограниченности ненулевых решений уравнения (1) на бесконечности; о нахождении новых условий, при которых существуют положительное частицеподобное решение уравнения (1). В итоге доказана новая теорема о существовании частицеподобного решения уравнения (1). Данная теорема доказана методом, отличающимся от известных вариационных методов – метода Люстерника–Шнирельмана [6] и метода расслоений Похожаева [7], [8]. Суть метода заключается в построении однопараметрического семейства положительных решений уравнения (1), удовлетворяющих условию $\psi(0) = 0$, и в установлении критического значения параметра, при котором решение удовлетворяет также условию $\psi(+\infty) = 0$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем необходимые определения и формулировку основных результатов работы.

Ненулевым решением уравнения (1) назовем функцию $\psi(x)$, которая на некотором интервале $(a, b) \subset (0, +\infty)$ не равна тождественно нулю, дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1).

Согласно теореме Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. книгу [9]) при любых заданных числах $x_0 > 0$, y_0 , y_1 существует единственное решение $\psi(x)$ уравнения (1), определенное в некотором интервале (a, b) , содержащем точку x_0 , и удовлетворяющее начальным условиям $\psi(x_0) = y_0$, $\psi'(x_0) = y_1$. Решение $\psi(x)$, $x \in (a, b)$, уравнения (1) называется продолжимым на полуось $(0, +\infty)$, если $\psi(x)$ можно продолжить на полуось $(0, +\infty)$ так, что $\psi(x)$ будет решением уравнения (1) на полуоси $(0, +\infty)$. Для уравнения (1), как и для любого нелинейного дифференциального уравнения, вопрос о продолжимости решений требует дополнительного исследования.

Справедлива следующая теорема о продолжимости ненулевых решений уравнения (1).

ТЕОРЕМА 1. *Любое ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения (1) продолжимо на всю полуось $(0, +\infty)$, и верны оценки*

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} |\psi(x)|^{k-1} \leq \frac{k+1}{2}, \quad (3)$$

$$\sup_{x \geq 1} \frac{1}{x^\alpha} |\psi'(x)|^{k-1} < \infty, \quad \sup_{x \geq 1} \frac{1}{x^\alpha} |\psi''(x)|^{k-1} < \infty. \quad (4)$$

Ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения (1) назовем ограниченным на бесконечности, если

$$\sup_{x \geq 1} |\psi(x)| < \infty.$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения (1) ограничено на бесконечности тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} |\psi(x)|^{k-1} < 1. \quad (5)$$

Если решение $\psi(x)$ ограничено на бесконечности, то существуют и конечны пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \psi(x) = \psi_\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \psi'(x) = -\psi_\infty, \quad (6)$$

где $0 < |\psi_\infty| < \infty$.

Существование положительного частицеподобного решения уравнения (1) доказывается на основе теоремы 3.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\psi(x)$ – ненулевое решение уравнения (1) и $\varphi(x) = x^{-\nu} \psi(x)$, где $\nu = \alpha/(k-1)$. Тогда функция $\varphi(x)$ обладает следующими свойствами:*

1°) существуют и конечны пределы

$$I(\varphi) := \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{s} (\varphi'(s))^2 ds < \infty, \quad L(\varphi) := \lim_{x \rightarrow +\infty} F(\varphi(x), \varphi'(x)) < \infty, \quad (7)$$

где

$$F(u, v) = v^2 - u^2 + \frac{2}{k+1} |u|^{k+1}; \quad (8)$$

2°) верно неравенство $L(\varphi) \leq 0$;

3°) если $L(\varphi) < 0$, то имеют место пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\varphi(x)| = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0 \quad (9)$$

и, как следствие, $L(\varphi) = -1 + 2/(k+1)$;

4°) если $L(\varphi) = 0$ и $\varphi(x) \neq 0$ при $x > x_0$, то справедливы равенства для пределов

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, в силу теоремы 3 для любого ненулевого решения $\psi(x)$ уравнения (1) справедливы следующие утверждения:

1) существуют и конечны пределы (7), и верно неравенство $L(\varphi) \leq 0$;

2) если $L(\varphi) < 0$, то $\psi(x)$ не ограничено на бесконечности и имеют место пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} |\psi(x)|^{k-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} |\psi'(x)|^{k-1} = 0;$$

3) если $L(\varphi) = 0$ и $\psi(x)$ на промежутке $(1, +\infty)$ не имеет нулей или имеет конечное число нулей, то $\psi(x)$ ограничено на бесконечности и выполняются равенства (6).

Возникает вопрос: существует ли такое ненулевое решение $\psi(x)$ уравнения (1), которое имеет бесконечное число нулей на промежутке $(1, +\infty)$? На этот вопрос пока не удается ответить. Если такое решение существует, то оно не ограничено на бесконечности (в силу теоремы 2) и для него справедливо равенство $L(\varphi) = 0$.

Теоремы 1–3 верны при любых вещественных c , $\alpha > 0$, $k > 1$. В случае, когда $c = \nu(\nu - 1)$, где $\nu = \alpha/(k - 1)$, справедлива следующая теорема о существовании положительного частицеподобного решения уравнения (1).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha > 0$, $k > 1$, выполнено равенство $c = \nu(\nu - 1)$, где $\nu = \alpha/(k - 1)$, и пусть решение следующей задачи Коши:

$$z''(x) + \frac{2\nu}{x} z'(x) + z(x) |z(x)|^{k-1} = 0, \quad x > 0, \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = 0, \quad (11)$$

обращается в ноль в какой-нибудь точке. Тогда существует положительное частицеподобное решение $\psi(x)$ уравнения (1) такое, что имеют место пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^\nu} \psi(x) = \lambda_0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\nu-1}} \psi'(x) = \nu \lambda_0, \quad (12)$$

где $((k+1)/2)^{1/(k-1)} < \lambda_0 < \infty$.

Можно непосредственно проверить, что задача (11) эквивалентна интегральному уравнению

$$z(x) = 1 - \int_0^x \int_0^s \left(\frac{\tau}{s}\right)^{2\nu} |z(\tau)|^{k-1} d\tau ds, \quad x > 0. \quad (13)$$

Далее, аналогично лемме 3, приведенной и доказанной в разделе 5 настоящей работы, можно доказать существование и единственность решения интегрального уравнения (13). Численные эксперименты по приближенному решению задачи (11) показывают, что решение $z(x)$ задачи (11) обращается в ноль в какой-нибудь точке в том случае, когда выполняется неравенство $\nu < (k+3)/(2k-2)$.

3. ПРОДОЛЖИМОСТЬ РЕШЕНИЙ

В этом разделе мы доказываем теорему 1 о продолжимости ненулевых решений уравнения (1). Пусть $\psi(x)$ – произвольное ненулевое решение уравнения (1), определенное на максимальном интервале $(a, b) \subset (0, +\infty)$. Покажем, что $a = 0$ и $b = +\infty$.

В силу уравнения (1) для $\psi(x)$ при любых $x, y \in (a, b)$ имеет место равенство

$$2 \int_x^y \psi''(s) \psi'(s) ds = 2 \int_x^y \left(1 + \frac{c}{s^2}\right) \psi(s) \psi'(s) ds - 2 \int_x^y \frac{1}{s^\alpha} |\psi(s)|^{k-1} \psi(s) \psi'(s) ds.$$

Отсюда, интегрируя по частям, выводим, что

$$\begin{aligned} (\psi'(x))^2 - \left(1 + \frac{c}{x^2}\right) \psi^2(x) + \frac{2}{k+1} \frac{|\psi(x)|^{k+1}}{x^\alpha} + 2c \int_x^y \frac{\psi^2(s)}{s^3} ds = \\ = (\psi'(y))^2 - \left(1 + \frac{c}{y^2}\right) \psi^2(y) + \frac{2}{k+1} \frac{|\psi(y)|^{k+1}}{y^\alpha} + \frac{2\alpha}{k+1} \int_x^y \frac{|\psi(s)|^{k+1}}{s^{\alpha+1}} ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) следует, что при любых $x, y \in (a, b)$, где $x < y$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} -\left(1 + \frac{c}{x^2}\right) \psi^2(x) + \frac{2}{k+1} \frac{|\psi(x)|^{k+1}}{x^\alpha} \leq |c| \max_{x \leq t \leq y} \psi^2(t) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) + (\psi'(y))^2 - \\ - \left(1 + \frac{c}{y^2}\right) \psi^2(y) + \frac{2}{k+1} \frac{|\psi(y)|^{k+1}}{y^\alpha} + \frac{2\alpha}{k+1} \max_{x \leq t \leq y} |\psi(t)|^{k+1} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\alpha}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Предположим, что $a > 0$. Рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a+1/n \leq s \leq y} |\psi(s)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\psi(\xi_n)|.$$

Если этот предел конечен, то согласно теореме о продолжимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см. книгу [9]) решение $\psi(x)$ можно продолжить левее точки a , что противоречит максимальнойности интервала (a, b) . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\psi(\xi_n)| = +\infty.$$

В неравенстве (15) положим $x = \xi_n$, а затем поделим обе его части на $|\psi(\xi_n)|^{k+1}/\xi_n^\alpha$. В полученном неравенстве, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, приходим к противоречию:

$$\frac{2}{k+1} \leq \frac{2}{k+1} \left[1 - \left(\frac{a}{y}\right)^\alpha\right] < \frac{2}{k+1}.$$

Следовательно, наше предположение неверно и $a = 0$.

Аналогичным образом покажем, что $b = +\infty$. Для этого из равенства (14) при $x < y$ выводим неравенство

$$\begin{aligned} -\left(1 + \frac{c}{y^2}\right)\psi^2(y) + \frac{2}{k+1} \frac{|\psi(y)|^{k+1}}{y^\alpha} &\leq |c| \max_{x \leq t \leq y} \psi^2(t) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) + \\ &+ (\psi'(x))^2 - \left(1 + \frac{c}{y^2}\right)\psi^2(x) + \frac{2}{k+1} \frac{|\psi(x)|^{k+1}}{x^\alpha}. \end{aligned} \quad (16)$$

Предположим, что $b < +\infty$. Тогда для $\psi(y)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \leq s \leq b-1/n} |\psi(s)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\psi(\eta_n)| = +\infty.$$

В неравенстве (16) положим $y = \eta_n$, а затем поделим обе его стороны на $|\psi(\eta_n)|^{k+1}/\eta_n^\alpha$ и перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. В результате мы приходим к противоречию $2/(k+1) \leq 0$. Следовательно, наше предположение неверно и $b = +\infty$.

Теперь докажем оценку (3). Пусть

$$M = \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^\alpha} |\psi(y)|^{k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n^\alpha} |\psi(y_n)|^{k-1},$$

где $y_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что $M \leq (k+1)/2$.

Без ограничения общности можно считать, что $1 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < \dots$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq t \leq y_n} |\psi(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\psi(\eta_n)| = +\infty.$$

Очевидно, $\eta_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta_n^\alpha} |\psi(\eta_n)|^{k-1} &\leq \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^\alpha} |\psi(y)|^{k-1} = M, \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta_n^\alpha} |\psi(\eta_n)|^{k-1} &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta_n^\alpha} |\psi(y_n)|^{k-1} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n^\alpha} |\psi(y_n)|^{k-1} = M. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta_n^\alpha} |\psi(\eta_n)|^{k-1} = M.$$

В неравенстве (16) положим $y = \eta_n$ и $x = \eta_m$, где $\eta_n > \eta_m$, а затем поделим обе стороны на $|\psi(\eta_n)|^2$ и перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. В результате приходим к неравенству

$$-1 + \frac{2}{k+1} M \leq \frac{|c|}{\eta_m^2}.$$

Отсюда, устремляя m к бесконечности, получаем, что $-1 + 2M/(k+1) \leq 0$, т.е. верна оценка (3).

Из оценки (3) следует, что при всех $y \geq 1$ имеет место неравенство $|\psi(y)| \leq D_1 y^\nu$, где $\nu = \alpha/(k-1)$ и D_1 не зависит от y . Учитывая это, в равенстве (14) положим $x = 1$ и оценим $(\psi'(y))^2$ сверху при $y \geq 1$:

$$\begin{aligned} (\psi'(y))^2 - \left(1 + \frac{c}{y^2}\right)\psi^2(y) + \frac{2}{k+1} \frac{|\psi(y)|^{k+1}}{y^\alpha} &+ \frac{2\alpha}{k+1} \int_1^y \frac{|\psi(s)|^{k+1}}{s^{\alpha+1}} ds = \\ &= D_2 + 2c \int_1^y \frac{\psi^2(s)}{s^3} ds, \\ (\psi'(y))^2 &\leq D_3 \left(1 + y^{2\nu} + \int_1^y s^{2\nu-3} ds\right), \quad (\psi'(y))^2 \leq D_4 y^{2\nu}. \end{aligned}$$

Теперь, используя уравнение (1), оценим сверху $|\psi''(y)|$ при $y \geq 1$:

$$|\psi''(y)| \leq \left| 1 + \frac{c}{y^2} - \frac{1}{y^\alpha} |\psi(y)|^{k-1} \right| |\psi(y)| \leq D_5 y^\nu.$$

Таким образом, наряду с оценкой (3) имеют место оценки (4). Теорема 1 доказана.

4. ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

В этом разделе мы приводим доказательства теорем 2 и 3.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\psi(x)$ – ненулевое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5). Покажем, что $\psi(x)$ ограничено на бесконечности и справедливы формулы (6).

Из условия (5) вытекает, что $\psi(x)$ является ненулевым решением уравнения

$$z''(x) - q(x)z(x) = 0, \quad x \in (1, +\infty), \quad (17)$$

где коэффициент $q(x)$ определяется выражением

$$q(x) = 1 + \frac{c}{x^2} - \frac{1}{x^\alpha} |\psi(x)|^{k-1}$$

и удовлетворяет неравенствам

$$0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} q(x) \leq 1.$$

Функцию $\psi(x)$ как решение уравнения (4) сравним с каким-нибудь решением $y(x)$ уравнения

$$y''(x) - q_0 y(x) = 0, \quad (18)$$

где q_0 – положительное число такое, что $q(x) > q_0$ при $x > x_0$. Легко проверить, что решение $y(x)$ уравнения (18) не обращается в ноль при $x > x_1$, где $x_1 > x_0$. Отсюда в силу теоремы сравнения Штурма (см. книгу [9]) следует, что $\psi(x) \neq 0$ при всех $x > x_2$, где $x_2 > x_1$. Без ограничения общности можно считать, что $\psi(x) > 0$ при $x > x_2$.

Из знакоопределенности $\psi(x)$ вытекает, что коэффициент $q(x)$ уравнения (4) имеет непрерывную вторую производную на промежутке $(x_2, +\infty)$. Если к тому же $\psi(x)$ ограничена на бесконечности, то $q(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$. В этом случае для ограниченного решения $\psi(x)$ уравнения (4) согласно результатам, приведенным в книге [9], имеют место формулы (6). Таким образом, для полного доказательства теоремы 2 остается проверить ограниченность $\psi(x)$ на бесконечности.

Предположим, что $\psi(x)$ на промежутке $(x_2, +\infty)$ не ограничена. Тогда существует точка x_3 из этого промежутка, где $\psi'(x_3) > 0$. В силу уравнения (4) при всех $x > x_3$ верно неравенство $\psi'(x) > \psi'(x_3)$.

Рассмотрим функцию $u(x) = \psi'(x)/\psi(x)$. Для функции $u(x)$ при $x > x_3$ имеем $u(x) > 0$ и $u'(x) = q(x) - u^2(x)$ (в силу уравнения (4)). Пусть q_1 – нижний предел функции $\sqrt{q(x)}$ при $x \rightarrow +\infty$. Выберем $\varepsilon \in (0, q_1)$ и $x_4 > x_3$ так, чтобы при $x > x_4$ имело место неравенство $q(x) > (q_1 - \varepsilon)^2$. Покажем, что существует точка $x_5 > x_4$ такая, что при $x \geq x_5$ справедливо неравенство $u(x) \geq (q_1 - \varepsilon)/2$. Действительно,

если $u(x_*) < (q_1 - \varepsilon)/2$ при некотором $x_* > x_4$, то при $x > x_*$ и $u(x) \leq (q_1 - \varepsilon)/2$ имеем $u'(x) = q(x) - u^2(x) > (q_1 - \varepsilon)^2 - (q_1 - \varepsilon)^2/4 = 3(q_1 - \varepsilon)^2/4$. Отсюда вытекает существование точки $x_5 > x_*$ такой, что $u(x_5) = (q_1 - \varepsilon)/2$, $u'(x_5) > 0$. Следовательно, правее точки x_5 верно неравенство $u(x) > (q_1 - \varepsilon)/2$. Возьмем максимальный интервал (x_5, x_6) , где справедливо неравенство $u(x) > (q_1 - \varepsilon)/2$. Если x_6 конечно, то в точке x_6 , с одной стороны, должны выполняться равенство $u(x_6) = (q_1 - \varepsilon)/2$ и неравенство $u'(x_6) \leq 0$, а с другой стороны, имеем $u'(x_6) = q(x_6) - u^2(x_6) > (q_1 - \varepsilon)^2 - (q_1 - \varepsilon)^2/4 > 0$, т.е. приходим к противоречию. Следовательно, при всех $x > x_5$ имеет место неравенство $u(x) > (q_1 - \varepsilon)/2$. Отсюда вытекает, что

$$\int_{x_5}^x \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx > \frac{(q_1 - \varepsilon)(x - x_5)}{2} \quad \text{при } x > x_5,$$

$$\psi(x) > \psi(x_5)e^{(q_1 - \varepsilon)(x - x_5)/2} \quad \text{при } x > x_5.$$

Последнее неравенство противоречит условию (5). Таким образом, наше предположение о неограниченности $\psi(x)$ неверно. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. В уравнении (1) произведем замену $\psi(x) = \varphi(x)x^\nu$, где $\nu = \alpha/(k-1)$. Тогда имеем

$$\psi'(x) = \left(\varphi'(x) + \frac{\nu}{x} \varphi(x) \right) x^\nu, \quad \psi''(x) = \left(\varphi''(x) + \frac{2\nu}{x} \varphi'(x) + \frac{\nu(\nu-1)}{x^2} \varphi(x) \right) x^\nu,$$

$$\sup_{x \geq 1} (|\varphi(x)| + |\varphi'(x)| + |\varphi''(x)|) < \infty \quad (\text{в силу (3), (4)}),$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \|\varphi(x)\|^{k-1} \leq \frac{k+1}{2} \quad (\text{в силу (3)}), \quad (19)$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \|\varphi(x)\|^{k-1} \geq 1, \quad \text{если } \sup_{x \geq 1} |\psi(x)| = +\infty \quad (\text{в силу теоремы 2}), \quad (20)$$

$$\varphi''(x) + \frac{2\nu}{x} \varphi'(x) + \frac{c_\nu}{x^2} \varphi(x) = \varphi(x)(1 - |\varphi(x)|^{k-1}), \quad x > 0, \quad (21)$$

где $c_\nu = \nu(\nu-1) - c$. Умножая обе стороны уравнения (21) на $2\varphi'(x)$, а затем интегрируя от x до y , получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} & (\varphi'(x))^2 - \varphi^2(x) \left(1 - \frac{c_\nu}{x^2} - \frac{2}{k+1} |\varphi(x)|^{k-1} \right) - 2c_\nu \int_x^y \frac{\varphi^2(s)}{s^3} ds = \\ & = (\varphi'(y))^2 - \varphi^2(y) \left(1 - \frac{c_\nu}{y^2} - \frac{2}{k+1} |\varphi(y)|^{k-1} \right) + 4\nu \int_x^y \frac{(\varphi'(s))^2}{s} ds. \end{aligned} \quad (22)$$

Перейдем к доказательству свойств 1° – 4° .

1° . В равенстве (22) положим $x = 1$ и $y \geq 1$. Отсюда в силу ограниченности $\varphi(y)$ и $\varphi'(y)$ следует неравенство

$$\sup_{y \geq 1} \int_1^y \frac{(\varphi'(s))^2}{s} ds < \infty.$$

Следовательно, существует и конечен предел

$$I(\varphi) := \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y \frac{(\varphi'(s))^2}{s} ds < \infty. \quad (23)$$

Из (22) и (23) вытекает существование и конечность предела

$$L(\varphi) := \lim_{y \rightarrow +\infty} F(\varphi(y), \varphi'(y)) < \infty,$$

где $F(u, v) = v^2 - u^2 + (2/(k+1))|u|^{k+1}$.

2°. Если $\psi(x)$ ограничено на бесконечности, то $\varphi(x) \rightarrow 0$ и $\varphi'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ (в силу теоремы 2), отсюда $L(\varphi) = 0$.

Пусть $\psi(x)$ не ограничено на бесконечности. Покажем, что $L(\varphi) \leq 0$. Для $\varphi(x)$ согласно (19) и (20) имеем неравенства

$$1 \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \|\varphi(x)\|^{k-1} \leq \frac{k+1}{2}. \quad (24)$$

Обозначим

$$B = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |\varphi(x)|.$$

Очевидно, что $1 \leq B^{k-1} \leq (k+1)/2$. Далее воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 1. *Если функция $g(x)$ непрерывна и дифференцируема на промежутке $(1, +\infty)$ и имеет конечный верхний предел на бесконечности*

$$-\infty < \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} g(x) = m < +\infty,$$

то существует последовательность точек $\{z_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (1, +\infty)$ такая, что

$$z_j \rightarrow +\infty, \quad g(z_j) \rightarrow m, \quad g'(z_j) \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множества

$$E_j = \{x: x > j, g(x) > m - 1/j\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Очевидно, E_j непусто при $j > j_0$. При каждом $j > j_0$ можно выделить два случая: либо $(a_j, +\infty) \subset E_j$ при некотором $a_j > j$, либо $(\alpha_j, \beta_j) \subset E_j$, $g(\alpha_j) = g(\beta_j) = m - 1/j$ при некоторых α_j, β_j , где $j < \alpha_j < \beta_j$. В первом случае выберем t_j так, чтобы выполнялись условия $g'(t_j) = g(a_j + 1) - g(a_j)$, $t_j \in [a_j, a_j + 1]$, а во втором случае – условия $g'(t_j) = 0$, $t_j \in (\alpha_j, \beta_j)$. Тогда при каждом $j > j_0$ справедливы неравенства

$$t_j > j, \quad g(t_j) > m - \frac{1}{j}, \quad |g'(t_j)| \leq \sup_{x > j} g(x) - m + \frac{1}{j}.$$

Следовательно, $z_j = t_{j_0+j}$, $j = 1, 2, \dots$, есть искомая последовательность. Лемма доказана.

Для функции $\varphi^2(x)$ согласно лемме 1 существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$y_n \rightarrow +\infty, \quad \varphi^2(y_n) \rightarrow B^2, \quad \varphi(y_n)\varphi'(y_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Так как $1 \leq B^{k-1} \leq (k+1)/2$, то $\varphi'(y_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((\varphi'(y_n))^2 - (\varphi(y_n))^2 + \frac{2}{k+1} |\varphi(y_n)|^{k+1} \right) = -B^2 + \frac{2}{k+1} B^{k+1} \leq 0.$$

Таким образом, доказано, что для $\varphi(x)$ имеет место неравенство $L(\varphi) \leq 0$.

3°. Пусть $L(\varphi) < 0$. Тогда $\psi(x)$ не ограничено на бесконечности, так как в случае ограниченности $\psi(x)$ должно выполняться равенство $L(\varphi) = 0$. Из неограниченности $\psi(x)$ согласно (19) и (20) следуют неравенства $1 \leq B^{k-1} \leq (k+1)/2$, где B – верхний предел $|\varphi(x)|$ при $x \rightarrow +\infty$. Пусть A – нижний предел $|\varphi(x)|$ при $x \rightarrow +\infty$. Проверим, что если $A = B$, то $\varphi'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ и $A = B = 1$.

Если $A = B$, то из существования предела $L(\varphi)$ вытекает существование предела $\varphi'(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Этот предел равен нулю, так как функция $\varphi(x)$ ограничена при $x \geq 1$. Если $A = B$ и $B > 1$, то в силу уравнения (21) при больших x значение $\varphi''(x)$ отделено от нуля. А это противоречит ограниченности $\varphi'(x)$ при $x \geq 1$. Следовательно, если $A = B$, то $B = 1$. Таким образом, мы установили, что если $A = B$, то имеют место пределы (9).

Теперь докажем, что на самом деле выполняется равенство $A = B$. Предположим, что $A < B$. Применяя к функциям $-\varphi^2(x)$ и $\varphi^2(x)$ лемму 1, получаем, что

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow +\infty, \quad \varphi^2(x_n) \rightarrow A^2, \quad \varphi(x_n)\varphi'(x_n) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \\ y_n \rightarrow +\infty, \quad \varphi^2(y_n) \rightarrow B^2, \quad \varphi(y_n)\varphi'(y_n) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из неравенства $B \geq 1$ следует, что $\varphi'(y_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и верно равенство $L(\varphi) = -B^2 + (2/(k+1))B^{k+1}$. Если $A = 0$, то предел неотрицательной числовой последовательности $(\varphi'(x_n))^2$ равен отрицательному числу $L(\varphi)$, т. е. мы приходим к противоречию. Следовательно, $A > 0$ и $L(\varphi) = -A^2 + (2/(k+1))A^{k+1}$. Значит, справедливы неравенства $0 < A < B \leq ((k+1)/2)^{1/(k-1)}$ и равенство $f(A) = f(B)$, где $f(t) = -t^2 + (2/(k+1))t^{k+1}$. Функция $f(t)$ на интервале $(0, 1)$ убывает, а на интервале $(1, ((k+1)/2)^{1/(k-1)})$ возрастает. Поэтому равенство $f(A) = f(B)$ возможно лишь в том случае, когда $A < 1 < B$ и $B^{k-1} < (k+1)/2$. Покажем, что из неравенств $0 < A < 1 < B$ следует равенство $I(\varphi) = +\infty$, противоречащее (7). Тогда свойство 3° будет доказано.

Без ограничения общности можно считать, что функция $\varphi(x)$ положительна при достаточно больших положительных x . Из неравенств $0 < A < 1 < B$ и существования предела $L(\varphi)$, где $L(\varphi) < 0$, вытекает, что точка $(\varphi(x), \varphi'(x))$ при $x \rightarrow +\infty$ приближается к замкнутой линии $\Gamma(\varphi) = \{(u, v): F(u, v) = L(\varphi), u > 0\}$. Отсюда следует существование малых положительных чисел δ, ε и возрастающей последовательности чисел $1 < a_1 < a_2 < \dots$ таких, что при $n = 0, 1, \dots$ выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\varphi'(x)| < \delta, \quad |\varphi(x) - A| < \varepsilon, \quad \varphi''(x) > \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in (a_{4n}, a_{4n+1}), \\ \delta < \varphi'(x) < 1 \quad \text{при} \quad x \in (a_{4n+1}, a_{4n+2}), \\ |\varphi'(x)| < \delta, \quad |\varphi(x) - B| < \varepsilon, \quad \varphi''(x) < -\varepsilon \quad \text{при} \quad x \in (a_{4n+2}, a_{4n+3}), \\ -1 < \varphi'(x) < -\delta \quad \text{при} \quad x \in (a_{4n+3}, a_{4n+4}). \end{aligned}$$

Оценим снизу разность $a_{4n+2} - a_{4n+1}$:

$$\begin{aligned} a_{4n+2} - a_{4n+1} &\geq \int_{a_{4n+1}}^{a_{4n+2}} \varphi'(x) dx = \varphi(a_{4n+2}) - \varphi(a_{4n+1}) > B - A - 2\varepsilon, \\ \frac{a_{4n+2}}{a_{4n+1}} &\geq 1 + \frac{B - A - 2\varepsilon}{a_{4n+1}}. \end{aligned} \tag{25}$$

А теперь оценим сверху a_{4n+1} :

$$\begin{aligned}
 a_{4n+1} &= (a_{4n+1} - a_{4n}) + (a_{4n} - a_{4n-1}) + (a_{4n-1} - a_{4n-2}) + (a_{4n-2} - a_{4n-3}) + a_{4n-3}, \\
 a_{4n+1} - a_{4n} &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{a_{4n}}^{a_{4n+1}} \varphi''(x) dx = \frac{\varphi'(a_{4n+1}) - \varphi'(a_{4n})}{\varepsilon} = \frac{2\delta}{\varepsilon}, \\
 a_{4n} - a_{4n-1} &\leq -\frac{1}{\delta} \int_{a_{4n-1}}^{a_{4n}} \varphi'(x) dx = \frac{\varphi(a_{4n-1}) - \varphi(a_{4n})}{\delta} < \frac{B + \varepsilon}{\delta}, \\
 a_{4n-1} - a_{4n-2} &\leq -\frac{1}{\varepsilon} \int_{a_{4n-2}}^{a_{4n-1}} \varphi''(x) dx = \frac{\varphi'(a_{4n-2}) - \varphi'(a_{4n-1})}{\varepsilon} = \frac{2\delta}{\varepsilon}, \\
 a_{4n-2} - a_{4n-3} &\leq \frac{1}{\delta} \int_{a_{4n-3}}^{a_{4n-2}} \varphi'(x) dx = \frac{\varphi(a_{4n-2}) - \varphi(a_{4n-3})}{\delta} < \frac{B + \varepsilon}{\delta}, \\
 a_{4n+1} &< a_{4n-3} + \frac{4\delta}{\varepsilon} + \frac{2(B + \varepsilon)}{\delta} < \dots < a_1 + n \left(\frac{4\delta}{\varepsilon} + \frac{2(B + \varepsilon)}{\delta} \right). \quad (26)
 \end{aligned}$$

Из (25) и (26) следует оценка

$$\frac{a_{4n+2}}{a_{4n+1}} > 1 + \frac{B - A - 2\varepsilon}{a_1 + n \left(\frac{4\delta}{\varepsilon} + \frac{2(B + \varepsilon)}{\delta} \right)}.$$

Учитывая эту оценку, оценим снизу интеграл $I(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
 I(\varphi) &= \int_1^{+\infty} \frac{(\varphi'(s))^2}{s} ds > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_{4n+1}}^{a_{4n+2}} \frac{(\varphi'(s))^2}{s} ds \geq \delta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{a_{4n+2}}{a_{4n+1}} \right) > \\
 &> \delta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{B - A - 2\varepsilon}{a_1 + n \left(\frac{4\delta}{\varepsilon} + \frac{2(B + \varepsilon)}{\delta} \right)} \right) = +\infty.
 \end{aligned}$$

Мы пришли к противоречию. Свойство 3° доказано.

4°. Пусть $L(\varphi) = 0$ и $\varphi(x) > 0$ при $x > x_0$. Покажем, что $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда из равенства $L(\varphi) = 0$ следует, что $\varphi'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Для A и B (нижнего и верхнего пределов $\varphi(x)$ при $x \rightarrow +\infty$) согласно лемме 1 существуют последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что при $n \rightarrow \infty$ имеют место пределы

$$\begin{aligned}
 x_n &\rightarrow +\infty, & \varphi(x_n) &\rightarrow A, & \varphi'(x_n) &\rightarrow 0, \\
 y_n &\rightarrow +\infty, & \varphi(y_n) &\rightarrow B, & \varphi'(y_n) &\rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда следуют равенства

$$L(\varphi) = -A^2 + \frac{2}{k+1} A^{k+1} = -B^2 + \frac{2}{k+1} B^{k+1} = 0. \quad (27)$$

Предположим, что $B > 0$. Тогда из (27) вытекает, что $B^{k-1} = (k+1)/2$ и либо $A = 0$, либо $A^{k-1} = (k+1)/2$. Случай $A^{k-1} = (k+1)/2$ исключается, так как тогда в силу уравнения (21) при больших x вторая производная $\varphi''(x)$ отделена от нуля и первая производная $\varphi'(x)$ оказывается неограниченной. Следовательно, $\varphi(x_n) \rightarrow 0$ и $\varphi(y_n) \rightarrow ((k+1)/2)^{1/(k-1)}$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда и из равенства $L(\varphi) = 0$ следует, что точка $(\varphi(x), \varphi'(x))$ при $x \rightarrow +\infty$ приближается к замкнутой линии $\Gamma_0(\varphi) = \{(u, v): F(u, v) = 0, u \geq 0\}$. Поэтому, не теряя общности, можно считать,

что при всех $n = 1, 2, \dots$ выполнены условия $x_n < y_n < x_{n+1}$, $\varphi'(x_n) = \varphi'(y_n) = 0$, $F(\varphi(x_n), \varphi'(x_n)) < 0$, $\varphi'(x) > 0$ при $x \in (x_n, y_n)$ и $\varphi'(x) < 0$ при $x \in (y_n, x_{n+1})$.

Для производной функции $F(\varphi(x), \varphi'(x))$ в силу уравнения (21) имеем равенство

$$(F(\varphi(x), \varphi'(x)))' = -\frac{2}{x}\varphi'(x)\left(2\nu\varphi'(x) + \frac{c_\nu}{x}\varphi(x)\right). \quad (28)$$

Если $c_\nu = 0$, то из (28) вытекает, что $F(\varphi(x), \varphi'(x)) < F(\varphi(x_1), \varphi'(x_1))$ при $x > x_1$. Переходя к пределу при $x \rightarrow +\infty$, приходим к противоречию: $L(\varphi) < 0$.

Покажем, что в случае, когда $c_\nu \neq 0$, также имеет место неравенство $L(\varphi) < 0$. Достаточно рассмотреть случай $c_\nu > 0$. Учитывая равенство (28), выберем точку $z_n \in (y_n, x_{n+1})$, где производная функции $F(\varphi(x), \varphi'(x))$ обращается в ноль. Тогда функция $F(\varphi(x), \varphi'(x))$ на интервалах (x_n, y_n) , (z_n, x_{n+1}) убывает, а на интервале (y_n, z_n) возрастает. Следовательно, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \Delta_{1n} &= F(\varphi(y_n), \varphi'(y_n)) - F(\varphi(x_n), \varphi'(x_n)) < 0, \\ \Delta_{2n} &= F(\varphi(z_n), \varphi'(z_n)) - F(\varphi(y_n), \varphi'(y_n)) > 0, \\ \Delta_{3n} &= F(\varphi(x_{n+1}), \varphi'(x_{n+1})) - F(\varphi(z_n), \varphi'(z_n)) < 0. \end{aligned}$$

Покажем, что при больших n имеет место неравенство

$$\Delta_{1n} + \Delta_{2n} < 0. \quad (29)$$

Тогда отсюда следует противоречивое неравенство $L(\varphi) < 0$.

Оценим сверху Δ_{1n} . Для этого, фиксируя малое положительное число σ , выберем отрезок $[a_n, b_n] \subset (x_n, y_n)$ так, чтобы выполнялись условия $\varphi'(a_n) = \varphi'(b_n) = \sigma$, $\varphi(a_n) < \sigma$, $\varphi(b_n) > 1 + \sigma$, $\varphi'(x) > \sigma$ при $x \in (a_n, b_n)$. На отрезке $[a_n, b_n]$ имеет место неравенство $F(\varphi(x), \varphi'(x)) < 0$, следовательно, $\varphi'(x) < 1$ при $x \in [a_n, b_n]$. Оценим снизу длину отрезка $[a_n, b_n]$:

$$b_n - a_n \geq \int_{a_n}^{b_n} \varphi'(x) dx = \varphi(b_n) - \varphi(a_n) > 1.$$

Оценим Δ_{1n} , используя равенство (28):

$$\begin{aligned} \Delta_{1n} &= -2 \int_{x_n}^{y_n} \left(\frac{2\nu}{x}(\varphi'(x))^2 + \frac{c_\nu}{x^2}\varphi(x)\varphi'(x) \right) dx < -4\nu \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x}(\varphi'(x))^2 dx \leq \\ &\leq -4\nu\sigma^2 \int_{a_n}^{b_n} \frac{dx}{x} \leq -\frac{4\nu\sigma^2}{b_n}(b_n - a_n) < -\frac{4\nu\sigma^2}{y_n}. \end{aligned} \quad (30)$$

Теперь оценим сверху Δ_{2n} . Для этого заметим, что в силу уравнения (21) имеет место неравенство $\varphi''(x) < -\sigma$ при $x \in (y_n, z_n)$ и больших n . Отсюда следует, что

$$\varphi'(z_n) - \varphi'(y_n) = \int_{y_n}^{z_n} \varphi''(x) dx \leq -\sigma(z_n - y_n).$$

Но $\varphi'(y_n) = 0$ и $\varphi'(z_n) = -c_\nu\varphi(z_n)/(2\nu z_n)$. Поэтому верно неравенство $z_n - y_n \leq c_\nu\varphi(z_n)/(2\nu\sigma z_n)$. Учитывая его и используя равенство (28), оценим Δ_{2n} :

$$\Delta_{2n} = \int_{y_n}^{z_n} \left| \frac{2}{x}\varphi'(x) \left(2\nu\varphi'(x) + \frac{c_\nu}{x}\varphi(x) \right) \right| dx \leq \frac{D}{y_n} \int_{y_n}^{z_n} dx = \frac{D}{y_n}(z_n - y_n) \leq \frac{D}{y_n} \frac{c_\nu\varphi(z_n)}{2\nu\sigma z_n}. \quad (31)$$

Здесь D положительно и не зависит от n . Из (30) и (31) следует, что при больших n имеет место неравенство (29). Этим завершается доказательство свойства 4°. Теорема 3 доказана.

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧАСТИЦЕПОДОБНОГО РЕШЕНИЯ

Докажем теорему 4 о существовании положительного частицеподобного решения уравнения (1).

Пусть $c = \nu(\nu - 1)$. Исследуем ограниченность решений уравнения (21) на интервале $(0, 1)$. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2. *Если $c = \nu(\nu - 1)$ и решение $\varphi(x)$ уравнения (21) вместе со своей производной $\varphi'(x)$ ограничены на интервале $(0, 1)$, то существуют пределы*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lambda, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{x} = \frac{\lambda(1 - |\lambda|^{k-1})}{2\nu + 1} \quad (32)$$

и $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda + \int_0^x \int_0^s \left(\frac{\tau}{s} \right)^{2\nu} \varphi(\tau) (1 - |\varphi(\tau)|^{k-1}) d\tau ds, \quad x > 0. \quad (33)$$

И обратно, если $\varphi(x)$ ограничена на интервале $(0, 1)$ и $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения (33), то $\varphi'(x)$ также ограничена на интервале $(0, 1)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (21) при $c = \nu(\nu - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, из ограниченности $\varphi'(x)$ на интервале $(0, 1)$ следует существование предела $\varphi(x) \rightarrow \lambda$ при $x \rightarrow 0$. Для производной $\varphi'(x)$ в силу уравнения (21) можно записать

$$(x^{2\nu} \varphi'(x))' = x^{2\nu} \varphi(x) (1 - |\varphi(x)|^{k-1}),$$

$$x^{2\nu} \varphi'(x) = \varphi'(1) - \int_x^1 \tau^{2\nu} \varphi(\tau) (1 - |\varphi(\tau)|^{k-1}) d\tau.$$

Отсюда, учитывая ограниченность $\varphi'(x)$, получаем, что

$$\varphi'(1) = \int_0^1 \tau^{2\nu} \varphi(\tau) (1 - |\varphi(\tau)|^{k-1}) d\tau,$$

$$x^{2\nu} \varphi'(x) = \int_0^x \tau^{2\nu} \varphi(\tau) (1 - |\varphi(\tau)|^{k-1}) d\tau,$$

далее, по правилу Лопитала

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2\nu} \varphi(x) (1 - |\varphi(x)|^{k-1})}{(2\nu + 1)x^{2\nu}} = \frac{\lambda(1 - |\lambda|^{k-1})}{2\nu + 1},$$

следовательно,

$$\varphi(x) = \lambda + \int_0^x \frac{1}{s^{2\nu}} \left(\int_0^s \tau^{2\nu} \varphi(\tau) (1 - |\varphi(\tau)|^{k-1}) d\tau \right) ds.$$

Обратно, если $\varphi(x)$ ограничена на интервале $(0, 1)$ и $\varphi(x)$ является решением интегрального уравнения (33), то легко проверить, что существуют пределы (32) и $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (21) при $c = \nu(\nu - 1)$. Лемма доказана.

Если $c = \nu(\nu - 1)$ и $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ ограничены на интервале $(0, 1)$, то из леммы 2 следует, что в равенстве (22) можно перейти к пределу при $x \rightarrow 0$, и в результате получаем соотношение

$$F(\varphi(y), \varphi'(y)) < F(\lambda, 0) = -\lambda^2 \left(1 - \frac{2}{k+1} |\lambda|^{k-1} \right) \quad \text{при } y > 0. \quad (34)$$

Линии уровня $F(u, v) = C$ функции F обладают следующими свойствами: если $C_1 < C_2$, то линия уровня $F(u, v) = C_1$ расположена внутри линии уровня $F(u, v) = C_2$; если $F(u, v) = F(u_0, 0)$, то $|u| \leq \max[(k+1)/2]^{1/(k-1)}, |u_0|]$. Поэтому из (34) вытекает, что

$$|\varphi(y)| \leq \max[(k+1)/2]^{1/(k-1)}, |\lambda| \quad \text{при } y \geq 0. \quad (35)$$

ЛЕММА 3. *Ограниченное на интервале $(0, 1)$ решение интегрального уравнения (33) существует, единственно и непрерывно зависит от параметра λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируя λ и $R > 0$, выберем $x_0 > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$x_0^2(R + |\lambda|)(1 + (R + |\lambda|)^{k-1}) \leq R, \quad x_0^2(1 + k(R + |\lambda|)^{k-1}) < 1.$$

Тогда легко проверить, что оператор

$$M\varphi \equiv \lambda + \int_0^x \int_0^s \left(\frac{\tau}{s} \right)^{2\nu} \varphi(\tau) (1 - |\varphi(\tau)|^{k-1}) d\tau ds$$

в пространстве $C[0, x_0]$ отображает в себя шар радиуса R с центром в точке λ и это отображение сжимающее. Отсюда следует существование функции $\varphi \in C[0, x_0]$, удовлетворяющей интегральному уравнению (33) на отрезке $[0, x_0]$. Данное решение можно продолжить при $x > x_0$ как решение уравнения (21).

Докажем, что для любого отрезка $[a, b]$, где меняется параметр λ , существует $x_1 = x_1(a, b) > 0$ такое, что для любых двух ограниченных на $(0, 1)$ решений $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ уравнения (33), соответствующих $\lambda_1, \lambda_2 \in [a, b]$, имеет место неравенство

$$\max_{0 \leq x \leq x_1} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq 2|\lambda_1 - \lambda_2|. \quad (36)$$

Тогда отсюда следуют единственность ограниченного на $(0, 1)$ решения интегрального уравнения (33) и непрерывная зависимость решения от λ .

Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – два решения уравнения (33), соответствующие $\lambda_1, \lambda_2 \in [a, b]$. Из (35) следует, что при $x \geq 0$ имеют место неравенства $|\varphi_1(x)| \leq C$, $|\varphi_2(x)| \leq C$, где $C = \max[(k+1)/2]^{1/(k-1)}, |a|, |b|]$. Учитывая их, оценим разность решений:

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq |\lambda_1 - \lambda_2| + D \int_0^x \int_0^s |\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| d\tau ds,$$

где $D > 0$ и D зависит лишь от C и k , откуда получаем, что

$$\max_{0 \leq x \leq x_1} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq |\lambda_1 - \lambda_2| + Dx_1^2 \max_{0 \leq x \leq x_1} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|,$$

$$\max_{0 \leq x \leq x_1} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \frac{1}{1 - Dx_1^2} |\lambda_1 - \lambda_2|.$$

Отсюда вытекает, что если выбрать $x_1 = \sqrt{1/2D}$, то имеет место неравенство (36). Лемма доказана.

Обозначим через $\Phi(x, \lambda)$ решение интегрального уравнения (33). Из (34) и (35) следует, что если $0 < \lambda \leq ((k+1)/2)^{1/(k-1)}$, то $L(\Phi(\cdot, \lambda)) < 0$ и $\Phi(x, \lambda) > 0$ при всех $x \geq 0$. Рассмотрим множество

$$\Lambda = \{\lambda: \lambda > 0, L(\Phi(\cdot, \lambda)) < 0, \Phi(x, \lambda) > 0 \text{ при } x \geq 0\}.$$

Очевидно, множество Λ содержит полуинтервал $(0, ((k+1)/2)^{1/(k-1)})$. Заметим, что множество Λ – открытое. Это следует из свойства 3° теоремы 3 и непрерывной зависимости $\Phi(x, \lambda)$ от λ . Пусть $(0, \lambda_0)$ – максимальный интервал, содержащийся в множестве Λ . Проверим, что 1) $\lambda_0 < \infty$; 2) $L(\Phi(\cdot, \lambda_0)) = 0$ и $\Phi(x, \lambda_0) > 0$ при $x \geq 0$. Отсюда следует, что функция $\psi(x) = x^\nu \Phi(x, \lambda_0)$ является ограниченным на бесконечности решением уравнения (1) (в силу свойства 4° теоремы 3) и имеют место пределы (12) (в силу леммы 2). Этим мы завершим доказательство теоремы 4.

Предположим, что $\lambda_0 = \infty$. Рассмотрим семейство функций

$$z_\lambda(x) = \lambda^{-1} \Phi(\lambda^{-(k-1)/2} x, \lambda), \quad \lambda \geq 1.$$

Для этих функций справедливо соотношение

$$\begin{aligned} z_\lambda''(x) + \frac{2\nu}{x} z_\lambda'(x) &= \frac{1}{\lambda^{k-1}} z_\lambda(x) - z_\lambda(x) |z_\lambda(x)|^{k-1}, & x > 0, \\ z_\lambda(0) &= 1, \quad z_\lambda'(0) = 0, & 0 < z_\lambda(x) \leq 1. \end{aligned} \quad (37)$$

Из (34) вытекает, что для $\Phi'(x, \lambda)$ при $\lambda \geq 1$ и всех $x \geq 0$ выполняется неравенство $|\Phi'(x, \lambda)| \leq D \lambda^{(k+1)/2}$, где D не зависит от λ и x . Отсюда следует, что $|z_\lambda'(x)| \leq D$. Следовательно, семейство функций $z_\lambda(x)$, $\lambda \geq 1$ равномерно ограничено и равномерно непрерывно. Уравнение (37) вместе с условиями $z_\lambda(0) = 1$, $z_\lambda'(0) = 0$ эквивалентно интегральному уравнению

$$z_\lambda(x) = 1 + \int_0^x \int_0^s \left(\frac{\tau}{s}\right)^{2\nu} z_\lambda(\tau) \left(\frac{1}{\lambda^{k-1}} - |z_\lambda(\tau)|^{k-1}\right) d\tau ds, \quad x > 0.$$

В данном интегральном уравнении перейдем к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$z(x) = 1 - \int_0^x \int_0^s \left(\frac{\tau}{s}\right)^{2\nu} z(\tau) |z(\tau)|^{k-1} d\tau ds, \quad x > 0.$$

Кроме того, верны равенства $z(0) = 1$, $z'(0) = 0$ и неравенства $0 \leq z(x) \leq 1$. Отсюда следует, что $z(x)$ является положительным решением задачи Коши (11). А это противоречит условию теоремы 4. Таким образом, доказано, что $\lambda_0 < \infty$.

Из определения λ_0 и его конечности следует, что либо $L(\Phi(\cdot, \lambda_0)) = 0$, либо $\Phi(x_0, \lambda_0) = 0$ при некотором $x_0 > 0$. Если $\Phi(x_0, \lambda_0) = 0$ при некотором $x_0 > 0$, то при всех λ из малой окрестности λ_0 функция $\Phi(x, \lambda)$ также обращается в ноль (в силу непрерывной зависимости $\Phi(x, \lambda)$ от λ). Так как λ_0 является предельной точкой множества Λ , для некоторых λ из Λ функция $\Phi(x, \lambda)$ обращается в ноль, и мы приходим к противоречию. Следовательно, $\Phi(x, \lambda_0) > 0$ при $x \geq 0$ и $L(\Phi(\cdot, \lambda_0)) = 0$. Теорема 4 доказана.

Список литературы

- [1] Z. Nehari, “On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics”, *Proc Roy. Irish Acad. A*, **62**:9 (1963), 117–135; *РЖМат*, 1964, 2Б463.
- [2] Е. П. Жидков, В. П. Шириков, “Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **4**:5 (1964), 804–816.
- [3] И. В. Амирханов, Е. П. Жидков, Г. И. Макаренко, *Достаточное условие существования положительного частицеподобного решения нелинейного уравнения скалярного поля*, Сообщения ОИЯИ Р5-11705, ОИЯИ, Дубна, 1978.
- [4] И. Т. Кигурадзе, Б. Л. Шехтер, “Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Нов. достиж.*, **30** (1987), 105–201.
- [5] Э. М. Мухамадиев, А. Н. Наимов, “Об ограниченных решениях одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Матем. сб.*, **202**:9 (2011), 121–134.
- [6] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975.
- [7] С. И. Похожаев, “О методе расслоения решения нелинейных краевых задач”, *Тр. МИАН*, **192** (1990), 146–163.
- [8] П. Е. Жидков, “О существовании счетного множества решений в одной задаче теории полярона”, *Матем. сб.*, **183**:2 (1992), 102–111.
- [9] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.

Поступила в редакцию 25.09.2016,
после доработки 9.10.2016