Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Хуссейн, С. С. Ахтар, Ф. Хан, Классификация локально вращательно-симметричных пространств-времен типа Бианки-I с использованием конформных коллинеаций Риччи, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 1, 133–145

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9279>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:18:54

© 2017 г.

Т. Хуссейн*, С. С. Ахтар*, Ф. Хан*

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛОКАЛЬНО ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ-ВРЕМЕН ТИПА БИАНКИ-I С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНФОРМНЫХ КОЛЛИНЕАЦИЙ РИЧЧИ

Приведена исчерпывающая классификация локально вращательно-симметричных пространств-времен типа Бианки-I в соответствии с их конформными коллинеациями Риччи. В случае, когда тензор Риччи невырожден, найден общий вид векторного поля, порождающего конформные коллинеации Риччи, удовлетворяющие некоторым условиям интегрируемости. После нахождения решений условий интегрируемости оказалось, что локально вращательно-симметричные пространства-времена типа Бианки-I допускают семи-, десяти-, одиннадцати- или пятнадцатимерную алгебру Ли конформных коллинеаций Риччи в случае невырожденного тензора Риччи. Более того, оказалось, что эти пространства-времена допускают бесконечное количество конформных коллинеаций Риччи, если тензор Риччи вырожден. Приведены несколько примеров локально вращательно-симметричного пространства-времени типа Бианки-I, допускающего нетривиальные конформные коллинеации Риччи и являющегося моделью идеальной жидкости.

Ключевые слова: конформные коллинеации Риччи, коллинеации Риччи, пространства-времена типа Бианки-I.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9279>

1. ВВЕДЕНИЕ

Основной революционной идеей общей теории относительности Эйнштейна являлось предположение о том, что присутствие материи порождает кривизну пространства-времени. Данная идея связала друг с другом геометрию и материю по-

*Department of Mathematics, University of Peshawar, Khyber Pakhtunkhwa, Pakistan.
E-mail: tahirhussain@uop.edu.pk

средством хорошо известных уравнений Эйнштейна (см. книгу [1])

$$R_{ab} - \frac{R}{2}g_{ab} = GT_{ab}, \quad (1.1)$$

где через R_{ab} , T_{ab} и g_{ab} обозначены тензоры Риччи, энергии-импульса и метрический тензор соответственно, R – скаляр Риччи, G – гравитационная постоянная. Поиск точных решений уравнений Эйнштейна – важная задача общей теории относительности, открывшей новые перспективы в нашем понимании устройства вселенной. В силу того, что эти уравнения в высшей степени нелинейны, очень сложно найти их точные решения. Поэтому в литературе рассмотрено лишь некоторое относительно малое количество физически интересных решений уравнений Эйнштейна (см. работы [1]–[3]). Все данные решения получены в предположении, что они обладают некоторой симметрией.

Симметрии (коллинеации) суть векторные поля, сохраняющие некоторые интересные геометрические объекты пространства-времени. Среди данных объектов можно отметить метрический тензор, тензоры Римана, энергии-импульса и Риччи. Для того чтобы геометрический объект Ω сохранялся при коллинеации (векторном поле) ξ , потребуем, чтобы производная Ли объекта Ω была равна нулю вдоль направления ξ , а именно (см. книгу [4]):

$$\mathcal{L}_\xi \Omega = 0, \quad (1.2)$$

где через $\mathcal{L}_\xi$ обозначен оператор производной Ли вдоль векторного поля ξ . Поле ξ является вектором Киллинга (ВК), если в выражении (1.2) Ω есть метрический тензор g_{ab} . Если в (1.2) через Ω обозначен тензор Риччи R_{ab} или тензор Римана R_{bcd}^a , тогда соответствующие им симметрии называются коллинеациями Риччи (КР) или коллинеациями, сохраняющими кривизну (КК) [5]. Аналогично можно задать коллинеации, сохраняющие материю (КМ), заменяя в формуле (1.2) Ω на тензор энергии-импульса. ВК являются предметом всесторонних исследований, поскольку с их помощью можно лучше понять решения уравнений Эйнштейна и соответствующие законы сохранения [1], [2]. КР и КК также подробно исследуются в различных работах для того, чтобы достичь лучшего понимания физики пространства-времени в рамках общей теории относительности. Пионер этих исследований Катцин в работе [6] утверждал, что КК следует изучать, поскольку это позволит получить дополнительную информацию о физике пространства-времени, которую нельзя получить с использованием ВК. Всеобъемлющая и заслуживающая внимания книга [4], посвященная КК, опубликована Холлом. В ней также традиционно обсуждаются другие типы симметрий. Поскольку тензор Риччи является следом тензора Римана, КР естественным образом обладают значимостью с геометрической точки зрения [7]–[9]. Важность КР с физической точки зрения также изучена в литературе. Дэвис с соавторами в статьях [10], [11] детально рассмотрел этот вопрос, используя законы сохранения, допустимые в полях материи некоторых типов. Они также предложили несколько интересных приложений своих результатов в релятивистской гидродинамике и физике плазмы. Оливер и Дэвис в работе [12] использовали КР, чтобы получить выражения для законов сохранения в идеальных жидкостях. Некоторые интересные свойства пространств-времен идеальной жидкости исследованы в статье [13]). Помимо всех этих причин важности

КР с геометрической и физической точек зрения они в том числе полезны при классификации известных точных решений уравнений Эйнштейна, а также при поиске новых точных решений [7], [14]–[18].

Наследованные симметрии представляют особый интерес, поскольку они позволяют более глубоко понять геометрию пространства-времени и важны с точки зрения физического смысла. Данные симметрии применяются при поиске естественной взаимосвязи между геометрией и материей с использованием уравнений Эйнштейна. Одной из хорошо известных наследованных симметрий является конформный вектор Киллинга (КВК), удовлетворяющий соотношению [4]

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 2\lambda g_{ab}, \quad (1.3)$$

где λ – гладкая вещественнозначная функция, зависящая от координат пространств-времен, называемая конформным множителем. Если $\lambda = 0$, тогда решение уравнения (1.3) является ВК, а при $\lambda = \text{const}$ оно является гомотетичным вектором (ГВ). КВК называется специальным КВК, если $\lambda_{;ab} = 0$. КВК отображают нулевые геодезические в нулевые геодезические и сохраняют структуру нулевого конуса. Также они порождают интегралы движения вдоль нулевых геодезических для безмассовых частиц. Это свойство связывает конформную симметрию с корректно определенной и имеющей физический смысл сохраняющейся величиной. Влияние конформных симметрий в том числе можно увидеть на кинематическом и динамическом уровнях [19]. Более подробно КВК рассмотрены в статьях [20]–[25].

После метрического тензора g_{ab} важным объектом исследования, играющим значительную роль в понимании геометрической структуры пространства-времени, является тензор Риччи R_{ab} . Если в выражении (1.3) вместо g_{ab} использован тензор R_{ab} , то ξ называется конформной коллинеацией Риччи (ККР). В этом случае формулу (1.3) можно переписать в явном виде [26], [27]

$$R_{ab,c}\xi^c + R_{bc}\xi_{,a}^c + R_{ac}\xi_{,b}^c = 2\lambda R_{ab}. \quad (1.4)$$

При $\lambda = \text{const}$ ККР называется гомотетичной коллинеацией Риччи (ГКР), а если $\lambda = 0$, то ККР превращаются в КР. Если ξ одновременно представляет собой КВК с конформным множителем α и ККР с конформным множителем λ , то в таком случае α и λ связаны следующим соотношением [26]:

$$\alpha_{;ab} = -\lambda \left(R_{ab} - \frac{R}{6} g_{ab} \right), \quad (1.5)$$

где в правой части член в скобках – хорошо известный тензор Схоутена, который обозначен как A_g . Важность тензора Схоутена в рамках конформной геометрии обусловлена тем, что он участвует в разложении тензора кривизны Римана R_g : $R_g = W_g + A_g \odot g$, где W_g – конформно-инвариантный тензор Вейля метрики g и $\odot$ есть произведение Кулкарни–Номидзу.

Множество $CRC(M)$, состоящее из всех ККР метрики пространства-времени, представляющих многообразие M , образует векторное пространство, размерность которого может оказаться бесконечной в случае, если тензор Риччи вырожден (т. е. $\det R_{ab} = 0$). Однако для невырожденного тензора Риччи ($\det R_{ab} \neq 0$) множество $CRC(M)$ образует конечномерную алгебру Ли такую, что $\dim CRC(M) \leq 15$.

Наибольшее значение размерности пространства $CRC(M)$ достигается, если и только если пространство-время является конформно-плоским [26].

В то время как КР и ГКР активно обсуждаются в литературе [28]–[30], ККР вызывают относительно меньший интерес. Лишь для пространства-времени Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ) и сферически-симметричного статического пространства-времени осуществлена классификация в соответствии с их ККР [16], [26]. Мы надеемся, что классификация пространств-времен в соответствии с конформными коллинеациями тензора Риччи может представлять интерес, и поэтому проводим в настоящей статье исчерпывающую классификацию локально вращательно-симметричных пространств-времен типа Бианки-I с использованием ККР.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы вкратце описываем пространства-времени типа Бианки и приводим десять связанных уравнений для поиска ККР в случае локально вращательно-симметричных пространств-времен типа Бианки-I. В разделе 3 мы проводим исчерпывающую классификацию этих пространств-времен в соответствии с их ККР, если тензор Риччи невырожден, а в разделе 4 мы решаем уравнения для поиска ККР в случае вырожденного тензора Риччи. В заключительном разделе 5 приводится краткое изложение работы и рассмотрены некоторые физические приложения полученных результатов.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ККР

Космологические модели типа Бианки-I, Бианки-II, ..., Бианки-IX – это пространственно однородные пространства-времена размерности $1 + 3$, допускающие группу движений G_3 , действующую на пространственноподобных гиперповерхностях [1], [31]. В литературе данные пространства-времена активно обсуждаются в точки зрения симметричного подхода. Пространства-времена типа Бианки-I среди них являются наиболее простыми космологическими моделями, для которых группа G_3 есть абелева группа трансляций трехмерного евклидова пространства. Метрика пространств-времен типа Бианки-I в синхронных координатах имеет вид [1]

$$ds^2 = -dt^2 + h^2(t) dx^2 + k^2(t) dy^2 + l^2(t) dz^2, \quad (2.1)$$

где $h(t)$, $k(t)$ и $l(t)$ – функции только от временной координаты. Три основных ВК, допускаемые этой метрикой, выглядят следующим образом:

$$\xi_{(1)} = \partial_x, \quad \xi_{(2)} = \partial_y, \quad \xi_{(3)} = \partial_z. \quad (2.2)$$

Если две из трех метрических функций h , k и l равны, тогда пространство-время типа Бианки-I превращается в важный класс локально вращательно-симметричных (ЛВС) пространств-времен [1], и в этом случае допускается еще один вращательный ВК $z\partial_y - y\partial_z$. В нашей статье мы полагаем, что в выражении (2.1) $k = l$, и вычисляем ККР для метрики ЛВС-пространства-времени типа Бианки-I. Оставшиеся компоненты тензора Риччи для этой метрики имеют вид

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{h''k + 2hk''}{hk} = A(t), \\ R_{11} &= \frac{hh''k + 2hh'k'}{k} = B(t), \\ R_{22} = R_{33} &= \frac{hkk'' + h'kk' + hk'^2}{h} = C(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где штрих у метрической функции означает производную по t . Скаляр кривизны Риччи R определяется как

$$R = 2\left(\frac{h''}{h} + 2\frac{k''}{k}\right) + 2\left(\frac{k'^2}{k^2} + \frac{2h'k'}{hk}\right). \quad (2.4)$$

Метрический тензор Риччи для ЛВС-пространств-времен типа Бианки-I можно записать посредством выражения

$$ds_{\text{Ric}}^2 = R_{ab} dx^a dx^b = A(t) dt^2 + B(t) dx^2 + C(t)(dy^2 + dz^2), \quad (2.5)$$

совпадающего с исходным выражением для метрики ЛВС-пространств-времен типа Бианки-I. Сигнатура записанной выше метрики тензора Риччи является лоренцевой, если A и B , C имеют противоположные знаки, и является положительно или отрицательно определенной, если A , B и C имеют одинаковые знаки. Используя уравнений Эйнштейна (1.1) при $G = 1$, мы получаем следующие компоненты тензора энергия-импульса:

$$\begin{aligned} T_{00} &= 2\frac{h'k'}{hk} + \frac{k'^2}{k^2}, \\ T_{11} &= -h^2\left(\frac{k'^2}{k^2} + \frac{2k''}{k}\right), \\ T_{22} &= T_{33} = -k^2\left(\frac{h''}{h} + \frac{k''}{k} + \frac{h'k'}{hk}\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя компоненты тензора Риччи (2.3) в формулу (1.4), приходим к уравнениям для ККР

$$\begin{aligned} A'\xi^0 + 2A\xi_{,0}^0 &= 2\lambda A, & A\xi_{,1}^0 + B\xi_{,0}^1 &= 0, \\ A\xi_{,2}^0 + C\xi_{,0}^2 &= 0, & A\xi_{,3}^0 + C\xi_{,0}^3 &= 0, \\ B'\xi^0 + 2B\xi_{,1}^1 &= 2\lambda B, & B\xi_{,2}^1 + C\xi_{,1}^2 &= 0, \\ B\xi_{,3}^1 + C\xi_{,1}^3 &= 0, & C'\xi^0 + 2C\xi_{,2}^2 &= 2\lambda C, \\ C(\xi_{,3}^2 + \xi_{,2}^3) &= 0, & C'\xi^0 + 2C\xi_{,3}^3 &= 2\lambda C. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Данная система содержит десять связанных между собой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, линейных по конформному вектору $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ и по конформному множителю λ . Решая эту систему, можно найти явный вид для ККР в ЛВС-пространствах-временах типа Бианки-I. В следующих двух разделах мы решаем данные уравнения, рассматривая случаи невырожденного и соответственно вырожденного тензора Риччи, не используя никаких ограничений на вид тензора энергии-импульса T_{ab} .

3. ККР В СЛУЧАЕ НЕВЫРОЖДЕННОГО ТЕНЗОРА РИЧЧИ

В настоящем разделе мы считаем, что тензор Риччи R_{ab} невырожден: $\det R_{ab} \neq 0$. Это означает, что A , B и C не равны нулю. Используя алгебраические преобразования, можно найти общее решение системы (2.7) в терминах некоторых неизвестных

функций по переменным t и x :

$$\begin{aligned}
 \xi^0 &= -\frac{C}{A} \left[\frac{y^2 + z^2}{2} P_t^1(t, x) + z P_t^2(t, x) + y P_t^3(t, x) \right] + P^0(t, x), \\
 \xi^1 &= -\frac{C}{B} \left[\frac{y^2 + z^2}{2} P_x^1(t, x) + z P_x^2(t, x) + y P_x^3(t, x) \right] + P^4(t, x), \\
 \xi^2 &= a_2 y z + a_3 \left(\frac{z^2 - y^2}{2} \right) + a_4 z + y P^1(t, x) + P^3(t, x), \\
 \xi^3 &= a_2 \left(\frac{z^2 - y^2}{2} \right) - a_3 y z - a_4 y + z P^1(t, x) + P^2(t, x),
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где конформный множитель имеет вид

$$\begin{aligned}
 \lambda &= -\frac{C'}{2A} \left[\frac{y^2 + z^2}{2} P_t^1(t, x) + z P_t^2(t, x) + y P_t^3(t, x) \right] + \frac{C'}{2C} P^0(t, x) + \\
 &\quad + a_2 z - a_3 y + P^1(t, x).
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Эта система является общим решением уравнений ККР если выполнены следующие условия интегрируемости:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \left(\frac{C'}{C} - \frac{B'}{B} \right) P_t^1(t, x) - \frac{A}{B} P_{xx}^1(t, x) = 0, \\
 &\frac{1}{2} \left(\frac{C'}{C} - \frac{B'}{B} \right) P_t^2(t, x) - \frac{A}{B} P_{xx}^2(t, x) - a_2 \frac{A}{C} = 0, \\
 &\frac{1}{2} \left(\frac{C'}{C} - \frac{B'}{B} \right) P_t^3(t, x) - \frac{A}{B} P_{xx}^3(t, x) + a_3 \frac{A}{C} = 0, \\
 &2C P_{tx}^1(t, x) + B \left(\frac{C}{B} \right)' P_x^1(t, x) = 0, \quad 2C P_{tx}^2(t, x) + B \left(\frac{C}{B} \right)' P_x^2(t, x) = 0, \\
 &2C P_{tx}^3(t, x) + B \left(\frac{C}{B} \right)' P_x^3(t, x) = 0, \quad \frac{C}{A} P_{tt}^1(t, x) + \frac{1}{2} \left(\frac{C}{A} \right)' P_t^1(t, x) = 0, \\
 &\frac{C}{A} P_{tt}^2(t, x) + \frac{1}{2} \left(\frac{C}{A} \right)' P_t^2(t, x) + a_2 = 0, \quad \frac{C}{A} P_{tt}^3(t, x) + \frac{1}{2} \left(\frac{C}{A} \right)' P_t^3(t, x) - a_3 = 0, \\
 &\frac{1}{2} \left(\frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} \right) P^0(t, x) + P_x^4(t, x) - P^1(t, x) = 0, \\
 &\frac{1}{2} \left(\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C} \right) P^0(t, x) + P_t^0(t, x) - P^1(t, x) = 0, \\
 &AP_x^0(t, x) + BP_t^4(t, x) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Для того чтобы получить окончательные выражения для ККР и соответствующего конформного множителя, требуется решить систему (3.3). Если обозначить $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = ((y^2 + z^2)/2, z, y)$ и $P^i = (P^1, P^2, P^3)$, тогда, применяя правило Эйнштейна суммирования по повторяющимся индексам, мы можем переписать

систему (3.1) и выражение (3.2) для конформного множителя следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \xi^0 &= -\frac{C}{A}\eta_i P_t^i + P^0, & \xi^1 &= -\frac{C}{B}\eta_i P_x^i + P^4, \\
 \xi^2 &= (\eta_i)_{,2} P^i + a_2 y z + a_3 \left(\frac{z^2 - y^2}{2} \right) + a_4 z, \\
 \xi^3 &= (\eta_i)_{,3} P^i + a_2 \left(\frac{z^2 - y^2}{2} \right) - a_3 y z - a_4 y, \\
 \lambda &= -\frac{C'}{2A}\eta_i P_t^i + \frac{C'}{2C}P^0 + P^1 + a_2 z - a_3 y.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Далее, эти условия интегрируемости (3.3) сводятся к условиям

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \left(\frac{C'}{C} - \frac{B'}{B} \right) P_t^i(t, x) - \frac{A}{B} P_{xx}^i(t, x) + k_i \frac{A}{C} &= 0, \\
 2C P_{tx}^i(t, x) + B \left(\frac{C}{B} \right)' P_x^i(t, x) &= 0, \\
 \frac{C}{A} P_{tt}^i(t, x) + \frac{1}{2} \left(\frac{C}{A} \right)' P_t^i(t, x) - k_i &= 0, \\
 \frac{1}{2} \left(\frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} \right) P^0(t, x) + P_x^4(t, x) - P^1(t, x) &= 0, \\
 \frac{1}{2} \left(\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C} \right) P^0(t, x) + P_t^0(t, x) - P^1(t, x) &= 0, \\
 A P_x^0(t, x) + B P_t^4(t, x) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

в которых $k_i = 0, -a_2, a_3$ для $i = 1, 2, 3$ соответственно. Чтобы получить исчерпывающую классификацию при невырожденном тензоре Риччи, мы решаем уравнения (3.5), рассматривая следующие случаи:

- ND1) $A' = B' = C' = 0$,
- ND2) $A' = C' = 0, B' \neq 0$,
- ND3) $B' = C' = 0, A' \neq 0$,
- ND4) $A' = B' = 0, C' \neq 0$,
- ND5) $B' = 0, A' \neq 0, C' \neq 0$,
- ND6) $B' \neq 0, A' = 0, C' \neq 0$,
- ND7) $B' \neq 0, A' \neq 0, C' = 0$,
- ND8) $A' \neq 0, B' \neq 0, C' \neq 0$.

Получая решения системы (3.5) во всех перечисленных случаях, мы видим, что ЛВС-пространства-времени типа Бианки-I допускают семи-, десяти-, одиннадцати- или пятнадцатимерную алгебру Ли ККР. Полученные ККР, их конформный множитель и соответствующие ограничения на компоненты тензора Риччи для всех случаев приведены в табл. 1–8 электронной версии настоящей статьи [32].

4. ККР В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕННОГО ТЕНЗОРА РИЧЧИ

Если тензор Риччи вырожден, т. е. $\det R_{ab} = ABC^2 = 0$, тогда либо $A = B = C = 0$, где каждое направление является ККР, либо имеет место одна из следующих ситуаций:

$$D1) A \neq 0, B \neq 0, C = 0,$$

$$D2) A = 0, B \neq 0, C \neq 0,$$

$$D3) A \neq 0, B = 0, C \neq 0,$$

$$D4) A \neq 0, B = C = 0,$$

$$D5) A = C = 0, B \neq 0,$$

$$D6) A = B = 0, C \neq 0.$$

Во всех перечисленных случаях мы решаем систему уравнений (2.7). Если имеет место случай D1, остаются уравнения

$$A'\xi^0 + 2A\xi_{,0}^0 = 2\lambda A, \quad (4.1)$$

$$A\xi_{,1}^0 + B\xi_{,1}^1 = 0, \quad (4.2)$$

$$\xi_{,2}^0 = \xi_{,3}^0 = \xi_{,2}^1 = \xi_{,3}^1 = 0, \quad (4.3)$$

$$B'\xi^0 + 2B\xi_{,1}^1 = 2\lambda B. \quad (4.4)$$

Находя решения уравнений (4.2) и (4.3), имеем

$$\xi^0 = -\frac{B}{A}f_t(t, x) + g(t), \quad \xi^1 = f_x(t, x), \quad (4.5)$$

где $f(t, x)$ и $g(t)$ – произвольные функции интегрирования. Подставляя ξ^0 (4.5) в (4.1), получаем равенство

$$\lambda = \left(\frac{A'B - 2B'A}{2A^2} \right) f_t(t, x) - \frac{B}{A} f_{tt}(t, x) + \frac{A'}{2A} g(t) + g_t(t). \quad (4.6)$$

Используя выражения (4.5) и (4.6), упрощаем формулу (4.4) и приходим к уравнению

$$\frac{1}{2} \left(\frac{B}{A} \right)' f_t(t, x) + \frac{B}{A} f_{tt}(t, x) + f_{xx}(t, x) + \left(\frac{B'}{2B} - \frac{A'}{2A} \right) g(t) - g_t(t) = 0, \quad (4.7)$$

которое является в высшей степени нелинейным и не решается в общем виде. Однако можно выбрать некоторые функции $f(t, x)$ и $g(t)$ так, чтобы это уравнение выполнялось. Используя эти функции, можно записать две компоненты ξ^0 и ξ^1 для ККР, представленные в (4.5), в окончательном виде. Другие две компоненты ξ^2 и ξ^3 являются произвольными функциями по переменным t, x, y и z . Следовательно, в рассматриваемом случае существует бесконечное число ККР, если имеет место дифференциальное ограничение (4.7).

В остальных пяти случаях нетрудно решить систему для ККР аналогичным образом и увидеть, что в каждом из них существует бесконечное количество удовлетворяющих ей ККР. Эти ККР приведены в табл. 9 в [32].

5. КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей статье получена исчерпывающая классификация ЛВС-пространств-времен типа Бианки-I в соответствии с их ККР. Это исследование является расширением нашей предыдущей работы [28], посвященной ГКР в таких пространствах-временах. Считая, что конформный множитель $\lambda = 0$, можно провести классификацию ЛВС-пространств-времен типа Бианки-I согласно их КР. Чтобы получить исчерпывающую классификацию ЛВС-пространств-времен типа Бианки-I в соответствии с их ККР, мы рассмотрели случаи невырожденного и вырожденного тензора Риччи. Первым результатом нашей работы является то, что в случае вырожденного тензора Риччи ЛВС-пространства-времена типа Бианки-I допускают бесконечное количество ККР. Более того, наше исследование продемонстрировало, что эти пространства-времена допускают семи-, десяти-, одиннадцати- или пятнадцатимерную алгебру Ли ККР в случае невырожденного тензора Риччи.

Для большинства рассмотренных в статье ситуаций оказалось, что ККР подчиняются некоторым дифференциальным ограничениям, которым удовлетворяют компоненты тензора Риччи. Когда количество ККР равно семи, тогда ККР либо превращаются в ГКР (см. случаи ND2(b) и ND4(b) (здесь и ниже речь идет о случаях, рассмотренных в электронной версии [32]), либо допустима одна собственная ККР вместе с одной собственной ГКР и пятью КР (см. случай ND4(a)). В случае ND7(b) имеется десять ККР, среди которых две являются собственными ККР, одна – собственной ГКР и семь являются КР. В случае одиннадцати ККР четыре суть собственные ККР, не имеется ни одной ГКР и семь являются КР (см. случай ND4(b)). Во всех остальных ситуациях, когда тензор Риччи невырожден, мы получили пятнадцать ККР и это количество является максимальным для четырехмерного пространства.

Полагая, что конформный множитель $\lambda = 0$ при невырожденном тензоре Риччи, можно видеть, что количество независимых КР, допускаемых в ЛВС-пространствах-временах типа Бианки-I, равно четырем, пяти, шести, семи или десяти. Во всех этих случаях, находя решение дифференциальных условий, которым удовлетворяют компоненты тензора Риччи, мы вывели явный вид для метрик ЛВС-пространств-времен типа Бианки-I, допускающих рассматриваемые ККР. Можно видеть, что упомянутые дифференциальные ограничения в высшей степени нелинейны и их трудно решить в общем виде. Однако с помощью нашей классификации можно понять, что обсуждаемые ККР в принципе существуют. Также можно выбрать некоторые метрические функции h и k таким образом, что дифференциальные условия оказываются верными. Например, полагая $h(t) = t$ и $k(t) = t^2$, мы получаем следующую метрику ЛВС-пространства-времени типа Бианки-I:

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 dx^2 + t^4(dy^2 + dz^2). \quad (5.1)$$

Данная метрика удовлетворяет всем условиям в случае ND5(b) статьи и, таким образом, допускает пятнадцать ККР. Среди этих ККР семь являются КР, а восемь оставшихся – собственными ККР. Скаляр Риччи R для метрики (5.1) имеет вид $R = 24/t^2$, а компоненты тензора энергии-импульса суть $T_{00} = 8/t^2$, $T_{11} = -8$ и $T_{22} = T_{33} = -4t^2$, откуда следует, что метрический тензор вещества является невырожденным и лоренцевым. Для остальных случаев можно аналогичным образом найти подобные метрики.

В процессе получения классификации ККР мы не использовали никаких предположений о виде тензора энергии-импульса T_{ab} . Для того чтобы привести пример физического приложения полученных результатов, предположим, что тензор энергии-импульса T_{ab} соответствует модели идеальной жидкости и имеет вид [14]

$$T_{ab} = (p + \rho)u_a u_b + pg_{ab}, \quad (5.2)$$

где p , ρ и u^a суть давление, плотность энергии и 4-скорость идеальной жидкости. Мы полагаем, что скорость жидкости $u^a = \delta_0^a$, тогда из формулы (5.2) можно вывести, что $T_{00} = \rho$, $T_{11} = ph^2$ и $T_{22} = T_{33} = pk^2$, откуда вытекает следующее выражение для метрического тензора вещества в случае идеальной жидкости:

$$ds_{\text{Perfect}}^2 = \rho dt^2 + ph^2 dx^2 + pk^2(dy^2 + dz^2); \quad (5.3)$$

данный тензор положительно определен, если $\rho > 0$ и $p > 0$. Далее, система (2.6) сводится к системе

$$2\frac{h'k'}{hk} + \frac{k'^2}{k^2} = \rho, \quad \frac{k'^2}{k^2} + \frac{2k''}{k} = -p, \quad \frac{h''}{h} + \frac{k''}{k} + \frac{h'k'}{hk} = -p. \quad (5.4)$$

Используя формулы (5.4), можно записать компоненты тензора Риччи (2.3) в виде

$$A(t) = \frac{3p + \rho}{2}, \quad B(t) = \frac{h^2}{2}(\rho - p), \quad C(t) = \frac{k^2}{2}(\rho - p), \quad (5.5)$$

а метрический тензор Риччи (2.5) тогда определяется выражением

$$2 ds_{\text{Ric}}^2 = (3p + \rho) dt^2 + h^2(\rho - p) dx^2 + k^2(\rho - p)(dy^2 + dz^2). \quad (5.6)$$

Метрика (5.6) положительно определена, если $\rho > 0$, $3p + \rho > 0$ и $\rho > |p|$, а именно, если выполняются слабое, сильное и общее энергетические условия. Ниже приведен линейный вид уравнения состояния баротропного газа для $p = p(\rho)$:

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (5.7)$$

где γ – некоторая константа. Значения $\gamma = 1, 2, 4/3$ отвечают вселенной, заполненной пылью, твердым веществом и некогерентным излучением соответственно. Значение $\gamma = 0$ отвечает вакуумной жидкости. Для идеальной жидкости энергетические условия имеют вид [14]

$$\rho > 0, \quad 0 \leq p \leq \rho, \quad 0 \leq \frac{dp}{d\rho} \leq 1. \quad (5.8)$$

В нашем исследовании ККР в ЛВС-пространствах-временах типа Бианки-I состояние идеальной жидкости допускается не во всех случаях, когда тензор Риччи порожден, а именно, это состояние не допускается в ситуациях D1, D3, D5 и D6. Поэтому в них может выбираться другое состояние вещества. В случае D2 уравнение состояния имеет вид $3p + \rho = 0$ и для него не выполняется сильное энергетическое условие. Также из выражений (2.3) следует, что $h''k + 2hk'' = 0$. Можно подобрать функции $h(t)$ и $k(t)$, удовлетворяющие этому равенству, чтобы получить метрику

ЛВС-пространства-времени типа Бианки-I идеальной жидкости в явном виде. Ниже выписано выражение для одной из таких метрик:

$$ds^2 = -dt^2 + (c_1 t + c_2)^2 dx^2 + (c_3 t + c_4)^2 [dy^2 + dz^2], \quad c_1 \neq 0, \quad c_3 \neq 0. \quad (5.9)$$

Компоненты тензора энергии-импульса для данной метрики суть

$$T_{00} = \frac{c_3}{c_3 t + c_4} \left(\frac{2c_1}{c_1 t + c_2} + \frac{c_3}{c_3 t + c_4} \right), \quad T_{11} = -c_3^2 \left(\frac{c_1 t + c_2}{c_3 t + c_4} \right)^2, \\ T_{22} = T_{33} = -c_1 c_3 \left(\frac{c_3 t + c_4}{c_1 t + c_2} \right).$$

Скаляр Риччи R в рассматриваемом случае принимает вид

$$R = \frac{2c_3}{c_3 t + c_4} \left(\frac{c_3}{c_3 t + c_4} + \frac{2c_1}{c_1 t + c_2} \right).$$

Аналогично, из ограничений в случае D4 вытекает условие $p = \rho = A/2$, являющееся условием для состояния твердого вещества. Тогда система (2.3) приводит к равенствам $h''k + 2h'k' = 0$ и $hkk'' + h'kk' + hk'^2 = 0$. Один из вариантов метрики ЛВС-пространства-времени типа Бианки-I идеальной жидкости имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2t} dx^2 + e^{-t} [dy^2 + dz^2]. \quad (5.10)$$

Здесь скаляр Риччи принимает значение $R = 3/2$. Компоненты тензора энергии импульса даются формулами $T_{00} = -3/4$, $T_{11} = -3/4e^{2t}$ и $T_{22} = T_{33} = -3/4e^{-t}$. Давление и плотность энергии идеальной жидкости удовлетворяют равенству $p = \rho = -3/4$, которое противоречит энергетическим условиям. Также интересно отметить, что соответствующий метрический тензор вещества невырожден и имеет отрицательно определенную сигнатуру.

Если имеет место случай ND1, из условий состояния идеальной жидкости следует, что $3\rho + p = 2$, $\rho = 2/h^2 + p$ и $h = k$. Таким образом, метрика ЛВС-пространства-времени типа Бианки-I является хорошо знакомой конформно-плоской метрикой ФРУ при $K = 0$. Более подробное обсуждение КР и ККР в метрике ФРУ приведено в статье [16]. Аналогичные замечания справедливы и в случае ND3, когда условия состояния идеальной жидкости приводят к равенствам $h = k$ и $p = \rho - 2/h^2$. Здесь из системы (2.3) вытекает, что $A = -3h'/h$, где h удовлетворяет дифференциальному ограничению $hh'' + 2h'^2 = 1$.

Во всех оставшихся ситуациях, когда тензор Риччи невырожден, уравнения идеальной жидкости устанавливают взаимосвязь между давлением p жидкости и плотностью энергии ρ , однако из системы (2.3) следуют дифференциальные ограничения на функции h и k , имеющие высокую степень нелинейности и поэтому трудноразрешимые. В этом случае можно подобрать некоторые функции h и k , для которых данные ограничения выполняются, чтобы получить выражение для метрики ЛВС-пространства-времени типа Бианки-I.

Благодарности. Авторы благодарны рецензентам за ценные замечания, способствующие значительному улучшению статьи.

Список литературы

- [1] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [2] А. З. Петров, *Пространства Эйнштейна*, Физматгиз, М., 1961.
- [3] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1973.
- [4] G. S. Hall, *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*, Lecture Notes in Physics, **46**, World Sci., Singapore, 2004.
- [5] A. H. Bokhari, A. R. Kashif, "Curvature collineations of some static spherically symmetric space-times", *J. Math. Phys.*, **37**:7 (1996), 3498–3504.
- [6] G. H. Katzin, J. Levine, "Applications of Lie derivatives to symmetries, geodesic mappings, and first integrals in Riemannian spaces", *Colloq. Math.*, **26** (1972), 21–38.
- [7] İ. Yavuz, U. Camci, "Ricci collineations of the Bianchi type II, VIII, and IX space-times", *Gen. Relativ. Gravit.*, **28**:6 (1996), 691–700.
- [8] U. Camci, H. Baysal, İ. Tarhan, İ. Yilmaz, İ. Yavuz, "Ricci collineations of the bianchi types I and III, and Kantowski–Sachs spacetimes", *Internat. J. Modern Phys. D*, **10**:5 (2001), 751–765.
- [9] U. Camci, İ. Yavuz, "Classifications of Kantowski–Sachs, Bianchi Types I and III spacetimes according to Ricci collineations", *Internat. J. Modern Phys. D*, **12**:1 (2003), 89–100.
- [10] W. R. Davis, G. H. Katzin, "Mechanical conservation laws and the physical properties of groups of motions in flat and curved space-times", *Amer. J. Phys.*, **30**:10 (1962), 750–764.
- [11] W. R. Davis, L. H. Green, L. K. Norris, "Relativistic matter fields admitting Ricci collineations and related conservation laws", *Nuovo Cimento B*, **34**:2 (1976), 256–280.
- [12] D. R. Oliver Jr., W. R. Davis, "Perfect fluids and symmetry mappings leading to conservation laws", *J. Math. Phys.*, **17**:10 (1976), 1790–1792.
- [13] M. Tsamparlis, D. P. Mason, "Ricci collineation vectors in fluid space-times", *J. Math. Phys.*, **31**:7 (1990), 1707–1722.
- [14] U. Camci, İ. Türkyilmaz, "Ricci collineations in perfect fluid Bianchi V spacetime", *Gen. Relativ. Gravit.*, **36**:9 (2004), 2005–2019.
- [15] G. Contreras, L. A. Núñez, U. Percoco, "Ricci collineations for non-degenerate, diagonal and spherically symmetric Ricci tensors", *Gen. Relativ. Gravit.*, **32**:2 (2000), 285–294.
- [16] U. Camci, A. Barnes, "Ricci collineations in Friedmann–Robertson–Walker spacetimes", *Class. Quantum Grav.*, **19**:2 (2002), 393–404.
- [17] A. H. Bokhari, "Ricci tensor with six collineations", *Internat. J. Theor. Phys.*, **31**:12 (1992), 2091–2094.
- [18] J. Llosa, "Collineations of a symmetric 2-covariant tensor: Ricci collineations", *J. Math. Phys.*, **54**:7 (2013), 072501, 13 pp.
- [19] M. Tsamparlis, A. Paliathanasis, L. Karpathopoulos, "Exact solutions of Bianchi I space-times which admit conformal Killing vectors", *Gen. Relativ. Gravit.*, **47**:2 (2015), 15, 21 pp.
- [20] S. Moopanar, S. D. Maharaj, "Conformal symmetries of spherical spacetimes", *Internat. J. Theor. Phys.*, **49**:8 (2010), 1878–1885.
- [21] S. Moopanar, S. D. Maharaj, "Relativistic shear-free fluids with symmetry", *J. Eng. Math.*, **82** (2013), 125–131.
- [22] K. L. Duggal, R. Sharma, "Conformal Killing vector fields on spacetime solutions of Einstein's equations and initial data", *Nonlinear Anal.*, **63**:5–7 (2005), e447–e454.
- [23] R. Maartens, S. D. Maharaj, B. O. J. Tupper, "General solution and classification of conformal motions in static spherical spacetimes.", *Class. Quantum Grav.*, **12**:10 (1995), 2577–2586.
- [24] S. Khan, T. Hussain, A. H. Bokhari, G. A. Khan, "Conformal Killing vectors in LRS Bianchi type V spacetimes", *Commun. Theor. Phys.*, **65**:3 (2016), 315–320.

- [25] S. Khan, T. Hussain, A. H. Bokhari, G. A. Khan, “Conformal Killing vectors of plane symmetric four dimensional lorentzian manifolds”, *Eur. Phys. J. C*, **75** (2015), 523, 9 pp.
- [26] U. Camci, A. Qadir, K. Saifullah, “Conformal Ricci collineations of static spherically symmetric spacetimes”, *Commun. Theor. Phys.*, **49**:6 (2008), 1527–1532.
- [27] M. Tsamparlis, P. S. Apostolopoulos, “Ricci and matter collineations of locally rotationally symmetric space-times”, *Gen. Relat. Gravit.*, **36**:1 (2004), 47–69.
- [28] T. Hussain, S. S. Akhtar, S. Khan, “Ricci inheritance collineation in Bianchi type I space-times”, *Eur. Phys. J. Plus*, **130** (2015), 44.
- [29] T. Hussain, S. S. Akhtar, A. H. Bokhari, S. Khan, “Ricci inheritance collineations in Bianchi type II spacetime”, *Modern Phys. Lett. A*, **31**:17 (2016), 1650102, 16 pp.
- [30] T. Hussain, A. Musharaf, S. Khan, “Ricci inheritance collineations in Kantowski–Sachs spacetimes”, *Internat. J. Geom. Meth. Modern Phys.*, **13**:5 (2016), 1650057, 14 pp.
- [31] R. M. Wald, *General Relativity*, Chicago Univ. Press, Chicago, IL, 1984.
- [32] T. Hussain, S. S. Akhtar, S. Khan, “Classification of LRS Bianchi type I spacetimes via conformal Ricci collineations”, [arXiv: 1701.06900](https://arxiv.org/abs/1701.06900).

Поступила в редакцию 26.09.2016,
после доработки 16.12.2016