Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. де Бур, М. Б. Халперн, Конформные теории поля: от старых к новым, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 2, 221–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf928>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 05:33:43

© 1998 г.

Й. де Бур*, М.Б. Халперн†

КОНФОРМНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ: ОТ СТАРЫХ К НОВЫМ

Рассмотрена общая проблема построения действий новых конформных теорий поля, исходя из старых конформных теорий поля. В качестве примера обсуждаются новые калибровочные сигма-модели для спина 2, которые возникают из общей конформной нелинейной сигма-модели.

Мы посвящаем эту работу памяти Ф. А. Лунева

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема построения новых конформных теорий поля (КТП) на основе старых КТП восходит к исследованию ковариантности относительно K -сопряжения [1–5], косет-конструкциям [1–3], а также общим аффинным конструкциям Вирасоро [5–7]. Данное построение получается в случае, если старая КТП допускает существование новых конформных тензоров энергии-импульса в своей киральной алгебре. Простейшим примером являются косет-конструкции, чьи новые калибровочные действия Весса–Зумино–Виттена (ВЗВ) [8, 9] для спина 1 получаются из старых действий ВЗВ. Однако косет-конструкции представляют собой особый случай более высокой симметрии, поэтому в работах [10–12], где была решена задача нахождения действий в общих аффинных конструкциях Вирасоро, новые калибровочные действия ВЗВ для спина 2 были получены исходя из старого действия ВЗВ.

В предыдущих работах [13–15] мы распространили этот подход на новые КТП, которые могут быть получены подобным образом из старой общей нелинейной сигма-модели. Этот памятный выпуск дает нам возможность представить общий обзор подобного подхода. Материал второго и в третьего разделов основан на результатах, первоначально полученных в работах [10, 16], а материал четвертого раздела – на результатах работ [13–15].

*Department of Physics, University of California at Berkeley, Berkeley, U.S.A.

†Theoretical Physics Group, Ernest Orlando Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, U.S.A.

2. КОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ТЕРМИНАХ ДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим КТП C_* с киральными/антикиральными тензорами энергии-импульса T_* и $\bar{T}_*$ и соответствующими киральными/антикиральными алгебрами $\mathcal{A}_*$ и $\bar{\mathcal{A}}_*$:

$$T_* \in \mathcal{A}_*, \quad \bar{T}_* \in \bar{\mathcal{A}}_*, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{A}_*$ и $\bar{\mathcal{A}}_*$ определены таким образом, что включают все взаимно локальные голоморфные/антиголоморфные объекты в теории. “Наивный” гамильтониан КТП C_* имеет вид

$$H_{*0} = \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{H}_{*0}, \quad \mathcal{H}_{*0} = T_* + \bar{T}_*. \quad (2.2)$$

Заметим, однако, что C_* представляет собой калибровочную теорию, если централизаторы $\mathcal{A}'_*$ и $\bar{\mathcal{A}}'_*$ гамильтониана $\mathcal{H}_{*0}$ в алгебрах $\mathcal{A}_*$ и $\bar{\mathcal{A}}_*$, соответственно равны

$$\mathcal{A}'_* = \{X(z) \in \mathcal{A}_* \mid [X(z), T_*] = 0\}, \quad \bar{\mathcal{A}}'_* = \{X(\bar{z}) \in \bar{\mathcal{A}}_* \mid [X(\bar{z}), \bar{T}_*] = 0\}, \quad (2.3)$$

являются нетривиальными¹⁾. Для простоты мы будем рассматривать случай, когда все элементы централизатора могут быть выражены как дифференциальные полиномы от конечного локального набора базисных элементов. Обозначим их также $\mathcal{A}'_*$ и $\bar{\mathcal{A}}'_*$. Централизаторы в действительности представляют собой бесконечномерные $\mathbf{Z}$ -градуированные алгебры. Соответствующие положительно-частотные моды централизаторов мы обозначим как $\mathcal{A}'_*(+)$ и $\bar{\mathcal{A}}'_*(+)$. Согласно подходу Гупты и Блейлера теорию C_* можно описать с помощью гамильтониана H_{*0} , действующего на физическом гильбертовом пространстве, определенном следующим образом:

$$\mathcal{A}'_*(+)|\text{phys}\rangle = \bar{\mathcal{A}}'_*(+)|\text{phys}\rangle = 0. \quad (2.4)$$

Это означает, что физические состояния являются примарными по отношению к алгебрам $\mathcal{A}'_*$ и $\bar{\mathcal{A}}'_*$.

Когда КТП C_* имеет гладкий классический предел, можно ожидать, что она будет описываться в терминах действия. Чтобы найти это действие, необходимо прежде всего найти классический предел (описание на языке скобок Пуассона) упомянутых выше объектов и алгебр. Положим для простоты, что классический предел централизатора не содержит центральных членов, т. е. что базисные элементы централизатора образуют набор связей первого рода по терминологии Дирака. Тогда полный классический гамильтониан КТП C_* может быть записан как

$$H_* = \int d\sigma \mathcal{H}_*, \quad \mathcal{H}_* = \mathcal{H}_{*0} + v \cdot \mathcal{A}'_* + \bar{v} \cdot \bar{\mathcal{A}}'_*, \quad (2.5)$$

где v и $\bar{v}$ — лагранжевы множители, а действие S_* теории C_* получается обычным каноническим методом. Множители v и $\bar{v}$ образуют калибровочные поля на мировом листе, спины которых совпадают со спинами соответствующих элементов централизаторов $\mathcal{A}'_*$ и $\bar{\mathcal{A}}'_*$ поля C_* .

¹⁾Обычно киральная алгебра КТП определяется как алгебра, чьи централизаторы содержат только единичный оператор, а калибровочные степени свободы уже отфакторизованы. Однако мы допускаем сначала более общий случай, когда КТП вложена в большую калибровочно-ковариантную систему, которая только затем факторизуется по калибровочным степеням свободы.

3. НОВЫЕ КОНФОРМНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Рассмотрим теперь более подробно случай, представляющий особый интерес, когда киральные/антикиральные алгебры $\mathcal{A}_*$ и $\bar{\mathcal{A}}_*$ КТП C_* содержат два *новых* киральных/антикиральных объекта спина 2: T и $\bar{T}$, которые принадлежат коммутирующим алгебрам Вирасоро. В этом случае следует ожидать существование еще двух киральных/антикиральных тензоров $\tilde{T}$ и $\tilde{\bar{T}}$ со спином 2, так что все эти четыре тензора энергии-импульса

$$T, \tilde{T}, \bar{T}, \tilde{\bar{T}}; \quad T, \tilde{T} \in \mathcal{A}_*, \quad \bar{T}, \tilde{\bar{T}} \in \bar{\mathcal{A}}_*, \quad (3.1)$$

представляют собой коммутирующие операторы Вирасоро. Четыре новых тензора энергии-импульса суммируются попарно, в результате чего получаются тензоры энергии-импульса T_* и $\bar{T}_*$ теории C_* :

$$T_* = T + \tilde{T}, \quad \bar{T}_* = \bar{T} + \tilde{\bar{T}}. \quad (3.2)$$

Это и называется ковариантностью относительно K -сопряжения [1–5]. Подобное явление более всего известно из косет-конструкций (где $T_* = T_g$, $T = T_{g/h}$ и $\tilde{T} = T_h$) и явно присутствует в общей аффинной конструкции Вирасоро. В общем виде обоснование явления ковариантности относительно K -сопряжения было дано в работе [4].

Видно, что при наличии ковариантности относительно K -сопряжения КТП C_* представляет собой тензорное произведение пары K -сопряженных КТП C и $\tilde{C}$,

$$C_* = C \otimes \tilde{C} \quad (3.3a)$$

с тензорами энергии-импульса

$$C: T, \bar{T}, \quad \tilde{C}: \tilde{T}, \tilde{\bar{T}}. \quad (3.3b)$$

Далее мы подробно исследуем только теорию C , однако на любом этапе рассмотрения путем K -сопряжения может быть получено соответствующее описание теории $\tilde{C}$.

“Наивный” гамильтониан теории C имеет вид

$$H_0 = \int d\sigma \mathcal{H}_0, \quad \mathcal{H}_0 = T + \bar{T}, \quad (3.4)$$

откуда следует, что теория C является, вообще говоря²⁾, калибровочной теорией спина 2, поскольку операторы Вирасоро $\tilde{T}$ и $\tilde{\bar{T}}$ лежат соответственно в централизаторах $\mathcal{A}'$ и $\bar{\mathcal{A}}'$ гамильтониана $\mathcal{H}_0$. Таким образом, в классическом пределе полный гамильтониан H теории C общего вида записывается как

$$H = \int d\sigma \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = T + \bar{T} + v\tilde{T} + \bar{v}\tilde{\bar{T}}, \quad (3.5)$$

²⁾Случай косет-конструкции g/h является особым случаем высших симметрий: это калибровочные теории спина 1, поскольку централизатор $T_{g/h}$ порождается h -токами, а T_h – составной оператор.

где v и $\bar{v}$ образуют калибровочное поле спина 2 на мировом листе.

Поскольку в общем случае централизаторы гамильтониана H_0 – это $\tilde{T}$ и $\tilde{\bar{T}}$, то гамильтониан (3.5) адекватно описывает новую КТП C общего вида. Однако в особых случаях высших симметрий необходимо ввести калибровку новой теории C с помощью полного централизатора гамильтониана $\mathcal{H}_0$:

$$\mathcal{H} = T + \bar{T} + v \cdot \mathcal{A}' + \bar{v} \cdot \bar{\mathcal{A}}', \quad (3.6)$$

где $\mathcal{A}'$, $\bar{\mathcal{A}}'$ могут удовлетворять алгебрам Вирасоро, W_3 -алгебрам и т.д. Добавляя в (3.6) член, пропорциональный $v\bar{v}$, можно также включить в рассмотрение случаи локальных симметрий спина 1, которые связаны с аффинными алгебрами Ли. Тогда выражения для действий новых КТП получатся путем применения обычного канонического формализма.

4. НОВЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИГМА-MODEЛИ СПИНА 2

В предыдущих работах [14, 15] мы начинали с рассмотрения действия общей конформной нелинейной сигма-модели

$$S_* = S_G = \int d^2\xi \mathcal{L}_G, \quad \mathcal{L}_G = (G_{ij} + B_{ij})\partial_+ x^i \partial_- x^j, \quad (4.1)$$

с конформными тензорами энергии-импульса T_G и $\bar{T}_G$. Используя сигма-модель в качестве фона, мы искали все четыре новых киральных/антикиральных тензора энергии-импульса T , $\tilde{T}$, $\bar{T}$ и $\tilde{\bar{T}}$ в общем виде:

$$T \sim L_{ij} \partial_+ x^i \partial_+ x^j. \quad (4.2)$$

Оказалось, что все они существуют в виде K -сопряженных пар

$$T_* = T_G = T + \tilde{T}, \quad \bar{T}_* = \bar{T}_G = \bar{T} + \bar{\tilde{T}} \quad (4.3)$$

при некоторых условиях на коэффициенты L_{ij} , которые мы обсудим ниже (см. уравнения (4.5а) и (4.5б)). Квантовое продолжение уравнений (4.2) и (4.3) с учетом дилатона было на однопетлевом уровне проверено в работах [13, 14].

Следуя описанной выше программе, мы показали, что новые конформные теории поля общего вида $C = T, \bar{T}$ описываются следующим набором новых калибровочных сигма-моделей спина 2:

$$S = \int d^2\xi \mathcal{L}, \quad (4.4a)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[\alpha \tilde{L}_{ij} B^i B^j + \bar{\alpha} \tilde{\bar{L}}_{ij} \bar{B}^i \bar{B}^j - (B^i - \partial_+ x^i) G_{ij} (\bar{B}^j - \partial_- x^j) \right], \quad (4.4b)$$

$$\hat{\nabla}_i^+ \tilde{L}_j^k = \hat{\nabla}_i^- \tilde{\bar{L}}_j^k = 0, \quad (4.5a)$$

$$\tilde{L}_i^j = 2\tilde{L}_i^k \tilde{L}_k^j, \quad \tilde{\bar{L}}_i^j = 2\tilde{\bar{L}}_i^k \tilde{\bar{L}}_k^j. \quad (4.5b)$$

Здесь α и $\bar{\alpha}$ образуют калибровочное поле спина 2, которое тесно связано с множителями v и $\bar{v}$, а B и $\bar{B}$ – вспомогательные поля. По одной новой КТП $C = T, \bar{T}$ было получено для каждого решения уравнений (4.5а) и (4.5б). Градиенты $\hat{\nabla}^\pm$ в уравнении (4.5а) являются обобщенными ковариантными производными с кручением. Более детальное описание этих результатов можно найти в работе [15], где, кроме того, рассматривается калибровочная инвариантность действий для спина 2, а также нелинейная форма этих действий, полученная после исключения вспомогательных полей.

Уравнения (4.5а) и (4.5б) представляют собой не что иное, как условия замкнутости классических киральных алгебр. Необходимые и достаточные условия для решения этих уравнений обсуждаются также в работах [13–15]. Для спина 2 были исследованы примеры калибровочных действий ВЗВ и калибровочных g/h -косет-конструкций. В первом случае действие $S_* = S_{\text{ВЗВ}}$ – это действие ВЗВ, а действие S в выражении (4.4а) – общее аффинное действие Вирасоро [10–12], которое описывает аффинную конструкцию Вирасоро общего вида. Во втором случае [15], когда $S_* = S_{g/h}$ является сигма-модельной формулировкой косет-конструкции, действия S определяются как ли- h -инвариантные КТП, которые в общем случае являются иррациональными КТП с дополнительной локальной калибровочной h -симметрией. Поскольку такие теории имеют дополнительную локальную h -симметрию, они не являются случаем общего положения и не включаются, таким образом, в общее калибровочное действие ВЗВ для спина 2.

В тех случаях, когда централизатор T шире алгебры Вирасоро, можно построить действие для КТП $C = T, \bar{T}$. Если централизатор порожден голоморфными/антиголоморфными полиномами $P_r(x^i, \partial_+ x^i)$ и $\bar{P}_r(x^i, \partial_- x^i)$, то действие имеет вид (4.4б):

$$S = \int d^2\xi \mathcal{L}, \quad (4.6а)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \frac{1}{4\pi\alpha'} \left[\sum_r \alpha_r P_r(x^i, B^i) + \sum_r \bar{\alpha}_r \bar{P}_r(x^i, \bar{B}^i) - \right. \\ \left. - (B^i - \partial_+ x^i) G_{ij} (\bar{B}^j - \partial_- x^j) \right], \end{aligned} \quad (4.6б)$$

где выражение $\alpha \tilde{L}_{ij} B^i B^j$ заменено суммой $\sum_r \alpha_r P_r(x^i, B^i)$ и аналогичная замена выполнена для члена, содержащего $\bar{\alpha}$. Примечательно, что путем введения вспомогательных полей широкий класс действий может быть приведен к простому полиномиальному виду. Исключая вспомогательные поля, можно получить нелинейную форму этих действий, которые в общем случае также являются нелокальными.

Действие (4.4б) и его обобщения могут служить отправной точкой для пертурбативного БРСТ-квантования новых КТП [11]. Было бы интересно изучить эту проблему, а также ее связь с некритическими теориями струн.

Действие (4.4б) описывает новые КТП в конформной калибровке для теории C , т. е. метрика h_{mn} теории C на мировом листе пропорциональна δ_{mn} . Дополнительно калибруя тензоры энергии-импульса $T, \bar{T}$ теории C :

$$H_2 = \int d\sigma \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H}_2 = uT + \bar{u}\bar{T} + v\tilde{T} + \bar{v}\tilde{\bar{T}}, \quad (4.7)$$

мы получим “дважды калиброванное” действие [10–12, 15] для новых КТП с произвольной метрикой h_{mn} для теории S на мировом листе, построенной из калибровочных полей u и $\bar{u}$. Теория в действительности содержит две метрики на мировом листе, причем “ K -сопряженная” метрика $\tilde{h}_{mn}$ (метрика на мировом листе теории $\tilde{S}$) построена из старых калибровочных полей v и $\bar{v}$, а описание K -сопряженной пары КТП S и $\tilde{S}$ становится формально симметричным. Для описания КТП S метрику h_{mn} рассматривают как фиксированную метрику на мировом листе и интегрируют по калибровочным полям $\tilde{h}_{mn}$ спина 2, тогда как для описания КТП $\tilde{S}$ процедура противоположна.

В описанном выше подходе K -сопряженная пара КТП S и $\tilde{S}$ интерпретируется как различные КТП. Альтернативный подход заключается в исключении обоих калибровочных полей h_{mn} и $\tilde{h}_{mn}$ спина 2, что определяет новый класс струнных теорий, в которых физические состояния являются примарными по отношению к K -сопряженным парам операторов Вирасоро. Первым примером теорий такого типа была “спин-орбитальная” модель из работы [1] (см. также [17]). Кроме того, этот новый класс теорий струн может быть связан с моделями работы [18].

Данная работа была выполнена при поддержке NSF (грант PHY-95-14797) и DOE (грант DE-AC03-76SF00098).

Список литературы

- [1] *K. Bardakçi, M. B. Halpern.* Phys. Rev. D. 1971. V. 3. P. 2493.
- [2] *M. B. Halpern.* Phys. Rev. D. 1971. V. 4. P. 2398.
- [3] *P. Goddard, A. Kent, D. Olive.* Phys. Lett. B. 1985. V. 152. P. 88.
- [4] *E. Kiritsis.* Mod. Phys. Lett. A. 1989. V. 4. P. 437.
- [5] *M. B. Halpern, E. Kiritsis.* Mod. Phys. Lett. A. 1989. V. 4. P. 1373; P. 1797.
- [6] *A. Yu. Morozov, A. M. Perelomov, A. A. Rosly, M. A. Shifman, A. V. Turbiner.* Int. J. Mod. Phys. A. 1990. V. 5. P. 803.
- [7] *M. B. Halpern, E. Kiritsis, N. A. Obers, K. Clubok.* Phys. Rep. 1996. V. 265. P. 1.
- [8] *K. Bardakçi, E. Rabinovici, B. Säring.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 299. P. 151; *D. Altschuler, K. Bardakçi, E. Rabinovici.* Commun. Math. Phys. 1988. V. 118. P. 241.
- [9] *K. Gawedski, A. Kupainen.* Phys. Lett. B. 1988. V. 215. P. 119; Nucl. Phys. B. 1989. V. 320. P. 625.
- [10] *M. B. Halpern, J. P. Yamron.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 351. P. 333.
- [11] *J. de Boer, K. Clubok, M. B. Halpern.* Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 2451.
- [12] *K. Clubok, M. B. Halpern.* The generic world-sheet action of irrational conformal field theory. In: Strings'95. Eds I. Bars et al. Singapore: World Scientific, 1996. P. 120.
- [13] *J. de Boer, M. B. Halpern.* Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 1551.
- [14] *J. de Boer, M. B. Halpern.* Unification of the General Non-Linear Sigma Model and the Virasoro Master Equation. In: New Developments in Quantum Field Theory. New York: Zakopane Plenum Press, 1998. P. 79.
- [15] *J. de Boer, M. B. Halpern.* New Spin-Two Gauged Sigma Models and General Conformal Field Theory (to appear).
- [16] *M. B. Halpern.* Recent progress in irrational conformal field theory. In: Proc. of the conference “Strings 1993”. Eds M. B. Halpern et al. Singapore: World Scientific, 1995. P. 119.
- [17] *M. B. Halpern, E. Kiritsis, N. A. Obers.* Int. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. № 1. P. 339.
- [18] *I. Bars, C. Kounnas.* Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 3664.

Поступила в редакцию 14.IV.1998 г.