Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Казаков, Д. Е. Власенко, Ультрафиолетовые расходимость в восьмимерной $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 1, 89–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9280>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 18:32:13

© 2017 г.

Д. И. Казаков^{*†}, Д. Е. Власенко[‡]

УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ РАСХОДИМОСТИ В ВОСЬМИМЕРНОЙ $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Для лестничных диаграмм в планарном пределе рассмотрены лидирующие ультрафиолетовые расходимости и расходимости следующего за лидирующим порядка для четырехточечных амплитуд на массовой поверхности в восьмимерной $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Выведены рекуррентные соотношения, которые позволяют алгебраическим путем получить расходимости лидирующего и следующего за лидирующим порядка во всех порядках теории возмущений, начиная с однопетлевой (для лидирующих расходимостей) или двухпетлевой (для расходимостей следующего за лидирующим порядка) диаграмм. Суммирование встречающихся рядов теории возмущений осуществлено с помощью дифференциальных уравнений, которые являются обобщением ренормгрупповых уравнений на неперенормируемый случай. Обсуждаются свойства полученных решений, а также схемозависимость построенных контрчленов.

Ключевые слова: амплитуды, максимальная суперсимметрия, ультрафиолетовые расходимости.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9280>

Посвящается Д. В. Ширкову

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы наблюдается значительный интерес к проблеме вычисления амплитуд рассеяния в максимально суперсимметричных теориях Янга–Миллса (СЯМ) [1], [2] и в максимально суперсимметричной теории гравитации [3] (максимально суперсимметричными называют теории, в которых реализована максимальная группа

Работа поддержана РФФИ (гранты № 17-02-00872 и № 17-0232-00837).

^{*}Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: kazakovd@theor.jinr.ru

[†]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Физический факультет, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

суперсимметрии в данной размерности пространства). Речь идет об амплитудах рассеяния на массовой поверхности, причем вычисления проводятся в так называемом планарном пределе, когда рассматривается теория с числом цветов $N_c \rightarrow \infty$ при условии, что константа связи g удовлетворяет соотношениям $g^2 \rightarrow 0$, $g^2 N_c \rightarrow \text{const}$. Наибольших успехов удалось добиться в случае четырехмерной $N = 4$ суперсимметричной калибровочной теории и в четырехмерной $N = 8$ теории супергравитации. В них происходит сокращение всех или почти всех ультрафиолетовых (УФ) расходимостей, а также имеет место факторизация высших радиационных поправок. Последнее свойство находит свое проявление в так называемом анзаце Берна–Диксона–Смирнова (БДС) [1] в четырехмерной $N = 4$ теории СЯМ и породило аналогичные попытки в других максимально суперсимметричных теориях в высших измерениях. Обзор различных результатов вычисления амплитуд (S -матрицы) в калибровочных теориях в различных измерениях можно найти в работах [4].

Настоящая статья посвящена вычислению УФ-расходимостей в восьмимерной $N = 1$ теории СЯМ на примере четырехточечных амплитуд на массовой поверхности в планарном пределе во всех порядках теории возмущений (ТВ). В этом случае даже на массовой поверхности отсутствуют инфракрасные расходимости и интерес представляют УФ-расходимости, которые в силу того, что константа связи имеет размерность $[4 - D] = -4$, являются неперенормируемыми по подсчету степеней. В недавних работах [5], [6] мы рассмотрели лидирующие УФ-расходимости для амплитуд рассеяния на массовой поверхности в шестимерной $N = 2$, восьмимерной $N = 1$ и десятимерной $N = 1$ суперсимметричных теориях. В настоящей статье мы ограничиваемся случаем восьмимерной $N = 1$ теории СЯМ, но зато также рассматриваем расходимости следующего за лидирующим порядка во всех порядках ТВ.

Наш подход к вычислению амплитуд основан на следующем формализме: сначала производится факторизация цветовых степеней свободы путем выделения коэффициентов при неприводимых комбинациях цветовых матриц. В пределе бесконечного числа цветов это приводит к различным перестановкам цветовых матриц внутри однократных следов от их произведений. В результате выделяются так называемые парциальные цветовые амплитуды. Далее используется спинорно-киральная формализм [2], с помощью которого парциальные амплитуды представляются в виде произведения древесных амплитуд на остаточный член, который представляет собой ряд ТВ из скалярных мастер-интегралов универсального вида. Следует отметить, что в этом случае древесные амплитуды также имеют относительно простую универсальную форму и всегда факторизуются. Для случая четырехточечной амплитуды полученное разложение схематически показано на рис. 1.

Отметим, что полученное разложение содержит только диаграммы типа “боксов”, в то время как в общем случае можно ожидать появления также диаграмм типа простых петель и треугольников. Причина этого явления заключается в максимальной суперсимметрии: все петли и треугольники сокращаются во всех порядках ТВ. Заметим, что это свойство не зависит от размерности пространства и одинаково проявляется во всех максимально суперсимметричных теориях.

На массовой поверхности четырехточечные амплитуды зависят только от переменных Мандельштама s , t и u , удовлетворяющих условию $s + t + u = 0$. В рамках размерной регуляризации (редукции) УФ-расходимости проявляются в виде полюсов с числителями, являющимися полиномами от переменных Мандельштама.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{A}_4}{\mathcal{A}_4^{(0)}} &= 1 + \sum_L M_4^{(L)}(s, t) = \\
&= 1 - g^2 st + \boxed{} \\
&\quad + g^4 s^2 t \boxed{} \boxed{} + st^2 \boxed{} \boxed{} - \\
&\quad - g^6 s^3 t \boxed{} \boxed{} \boxed{} + 2s^2 t \boxed{} \boxed{} \boxed{} + 2st^2 \boxed{} \boxed{} \boxed{} + st^3 \boxed{} \boxed{} \boxed{} + \dots
\end{aligned}$$

Рис. 1. Универсальное разложение для четырехточечной амплитуды рассеяния в максимально суперсимметричной теории Янга–Миллса в терминах мастер-интегралов. Соединенные пунктирной линией засечки на линиях обозначают квадрат соответствующего импульса.

В силу неперенормируемости теории степени полиномов возрастают вместе с порядком ТВ.

В теории D измерений первые УФ-расходимости появляются в $L = 6/(D - 4)$ петлях. Следовательно, при $D = 6$ они появляются в трех петлях, а при $D = 8, 10$ — уже в одной петле, хотя однопетлевый случай является исключением. В настоящей работе мы рассматриваем случай $D = 8$, поскольку число петель меньше, чем в случае $D = 6$, а полиномы в числителе заметно короче, чем при $D = 10$. Более того, в отличие от статьи [6] мы ограничиваемся только лестничными диаграммами. Как показывает анализ, проведенный в работе [7], лестничные диаграммы дают адекватное приближение полного ответа и позволяют получить наглядные аналитические или полуаналитические выводы.

2. $\mathcal{R}'$ -ОПЕРАЦИЯ И ПОЛЮСНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЛИДИРУЮЩЕМ И СЛЕДУЮЩЕМ ПОСЛЕ ЛИДИРУЮЩЕГО ПОРЯДКАХ

Любая локальная квантовая теория поля обладает тем примечательным свойством, что после выполнения неполной $\mathcal{R}$ -операции — так называемой $\mathcal{R}'$ -операции — оставшиеся УФ-расходимости всегда локальны. Кратко напомним основные свойства $\mathcal{R}$ -операции [8], [9]. Применение $\mathcal{R}$ -операции к любой функции Грина Γ (или к любому графу G) приводит к вычитанию всех УФ-расходимостей, включая их подграфы, и оставляет конечное выражение. Использование $\mathcal{R}$ -операции эквивалентно добавлению контрчленов к исходному лагранжиану. Можно записать $\mathcal{R}$ -операцию в терминах операторов вычитания в факторизованной форме:

$$\mathcal{R}G = \prod_{\gamma} (1 - M_{\gamma})G, \quad (1)$$

где оператор вычитания M_γ вычитает УФ-расходимости определенного подграфа γ и произведение вычисляется по всем расходящимся подграфам, включая сам граф G .

Полезно также определить неполную $\mathcal{R}$ -операцию, которую обозначим $\mathcal{R}'$, вычитающую только подрасходимости данного графа G и оставляющую лишь расходимость графа как такового. Полная $\mathcal{R}$ -операция в таком случае определяется как

$$\mathcal{R}G = (1 - \mathcal{K})\mathcal{R}'G, \quad (2)$$

где $\mathcal{K}$ – оператор, который выделяет расходящуюся часть данного графа (для минимальной схемы вычитания оператор $\mathcal{K}$ выделяет полюсные члены $1/\epsilon^n$). Тогда $\mathcal{K}\mathcal{R}'G$ есть контрчлен, соответствующий графу G . Каждый контрчлен содержит поверхностные расходимости, которые локальны в координатном представлении (в нашем случае это полиномы от внешних импульсов в числителе и полиномы степени ϵ в знаменателе).

Для любого графа G можно определить $\mathcal{R}'$ -операцию с помощью формулы лесов, но для наших вычислений более подходящим является использование рекурсивного определения через $\mathcal{R}'$ -операцию для расходящихся подграфов (детали и примеры см. в книге [10]):

$$\mathcal{R}'G = \left(1 - \sum_{\gamma} \mathcal{K}R'_\gamma + \sum_{\gamma, \gamma'} \mathcal{K}R'_\gamma \mathcal{K}R'_{\gamma'} - \dots\right)G. \quad (3)$$

Сумма вычисляется по всем одночастично неприводимым УФ-расходящимся подграфам данной диаграммы, суммы по нескольким индексам включают только непесекающиеся подграфы.

Применяя эту формулу к n -петлевой диаграмме, можно обнаружить, что $\mathcal{R}'$ -операция приводит к следующему ряду (мы рассматриваем только расходимости лидирующего и следующего за лидирующим порядка):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'G_n = & \frac{\mathcal{A}_n^{(n)}(\mu^2)^{n\epsilon}}{\epsilon^n} + \frac{\mathcal{A}_{n-1}^{(n)}(\mu^2)^{(n-1)\epsilon}}{\epsilon^n} + \dots + \frac{\mathcal{A}_1^{(n)}(\mu^2)^\epsilon}{\epsilon^n} + \\ & + \frac{\mathcal{B}_n^{(n)}(\mu^2)^{n\epsilon}}{\epsilon^{n-1}} + \frac{\mathcal{B}_{n-1}^{(n)}(\mu^2)^{(n-1)\epsilon}}{\epsilon^{n-1}} + \dots + \frac{\mathcal{B}_1^{(n)}(\mu^2)^\epsilon}{\epsilon^{n-1}} + \\ & + \text{полюсы низшего порядка}, \end{aligned} \quad (4)$$

где такие члены, как $\mathcal{A}_k^{(n)}(\mu^2)^{k\epsilon}/\epsilon^n$ и $\mathcal{B}_k^{(n)}(\mu^2)^{k\epsilon}/\epsilon^{n-1}$ происходят из k -петлевого графа, который остается после вычитания $(n - k)$ -петлевого контрчлена. Полное выражение (4) должно быть локальным, иначе говоря, не должно содержать членов типа $(\log \mu^2)^k/\epsilon^m$ для всех $k, m > 0$, будучи разложенным в ряд по ϵ . Это требование дает нам $n - 1$ уравнение для коэффициентов $\mathcal{A}_i^{(n)}$ и $n - 2$ уравнений для коэффициентов $\mathcal{B}_i^{(n)}$. Их решение относительно одно- и двухпетлевых подграфов имеет вид

$$\mathcal{A}_n^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{\mathcal{A}_1^{(n)}}{n}, \quad (5)$$

$$\mathcal{B}_n^{(n)} = (-1)^n \left(\frac{2}{n} \mathcal{B}_2^{(n)} + \frac{n-2}{n} \mathcal{B}_1^{(n)} \right). \quad (6)$$

Также полезно иметь аналогичные выражения для контрчленов $\mathcal{K}R'$, определяемых как

$$\mathcal{K}R'G_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mathcal{A}_k^{(n)}}{\epsilon^n} + \frac{\mathcal{B}_k^{(n)}}{\epsilon^{n-1}} \right) \equiv \frac{\mathcal{A}_n^{(n)'}}{\epsilon^n} + \frac{\mathcal{B}_n^{(n)'}}{\epsilon^{n-1}}. \quad (7)$$

Имеем соответственно равенства

$$\mathcal{A}_n^{(n)'} = (-1)^{n+1} \mathcal{A}_n^{(n)} = \frac{\mathcal{A}_1^{(n)}}{n}, \quad (8)$$

$$\mathcal{B}_n^{(n)'} = \left(\frac{2}{n(n-1)} \mathcal{B}_2^{(n)} + \frac{2}{n} \mathcal{B}_1^{(n)} \right). \quad (9)$$

Они означают, что, применяя $\mathcal{R}'$ -операцию, мы можем заботиться только об однопетлевых диаграммах, остающихся после вычитания, и получить все лидирующие полюсы, используя соотношение (5) для $\mathcal{A}_1^{(n)}$. Добавив двухпетлевые диаграммы, можно получить все полюсы следующего за лидирующим порядка из $\mathcal{B}_1^{(n)}$ и $\mathcal{B}_2^{(n)}$ с помощью соотношения (6). Это наблюдение значительно упрощает вычисление полюсов лидирующего и следующего за лидирующим порядка. Более того, в точности как и в перенормируемых теориях, из выражений (5), (6) следует, что все лидирующие полюсы полностью описываются однопетлевыми диаграммами и их можно вычислить в любом порядке ТВ исключительно алгебраическим путем. Для того чтобы найти расходимости следующего за лидирующим порядка, достаточно вычислить расходимости следующего за лидирующим порядка для двухпетлевых диаграмм. Ниже мы демонстрируем, как этот метод работает на практике, и получаем конкретные формулы для лидирующих расходимостей и расходимостей следующего за лидирующим порядка во всех петлях.

3. РАСХОДИМОСТИ ЛИДИРУЮЩЕГО И СЛЕДУЮЩЕГО ЗА ЛИДИРУЮЩИМ ПОРЯДКА ВО ВСЕХ ПЕТЛЯХ

Начнем с лидирующих расходимостей и рассмотрим применение $\mathcal{R}'$ -операции к лестничным диаграммам (см. рис. 2).

Для вычисления вкладов в $\mathcal{A}_1^{(n)}$ необходимо вычислить полюсную часть однопетлевых диаграмм из первого и третьего ряда. Для диаграмм в s -канале они зависят только от s , поэтому $\mathcal{A}_n^{(n)} = s^{n-1} A_n$. Вычисляя необходимые диаграммы и подставляя результат в (5), получаем рекуррентное соотношение

$$nA_n = -\frac{2}{4!} A_{n-1} + \frac{2}{5!} \sum_{k=1}^{n-2} A_k A_{n-1-k}, \quad n \geq 3, \quad (10)$$

причем $A_1 = 1/3!$. Начиная с этого значения, можно вычислить любой полюсный член A_n с помощью рекуррентного соотношения (10), хотя явный вид решения рекуррентного соотношения неочевиден. Однако, поскольку нас интересует сумма всего ряда ТВ, явное решение не требуется. Умножая обе части (10) на $(-z)^{n-1}$

$$\begin{aligned}
R': & \left[\underbrace{\text{Diagram 1}}_n - \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \right. \\
& - \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6} + \\
& + \sum_{k=1}^{n-2} \text{Diagram 7} + \\
& + \sum_{k=1}^{n-3} \text{Diagram 8} + \sum_{k=1}^{n-3} \text{Diagram 9} + \\
& + \sum_{k=1}^{n-3} \text{Diagram 10} - \\
& \left. - \sum_{\substack{k+l \leq n-2 \\ k=1, \\ l=1}} \text{Diagram 11} \right] \left| \begin{array}{l} \mathcal{A}_1^{(n)} \mathcal{B}_1^{(n)} \\ \mathcal{B}_2^{(n)} \\ \mathcal{A}_1^{(n)} \mathcal{B}_1^{(n)} \\ \mathcal{B}_2^{(n)} \\ \mathcal{B}_2^{(n)} \\ \mathcal{B}_2^{(n)} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Рис. 2. Применение $\mathcal{R}'$ -операции к лестничным диаграммам. Справа за вертикальной чертой указано, к каким членам разложения (4) относятся соответствующие вклады.

и суммируя от трех до бесконечности, получаем равенство

$$\sum_{n=3}^{\infty} n A_n (-z)^{n-1} = -\frac{2}{4!} \sum_{n=3}^{\infty} A_{n-1} (-z)^{n-1} + \frac{2}{5!} \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-2} A_k (-z)^k A_{n-1-k} (-z)^{n-1-k}. \quad (11)$$

Обозначая теперь сумму $\sum_{n=m}^{\infty} A_n (-z)^n$ как Σ_m и производя замену порядка суммирования в нелинейном члене, имеем уравнение

$$-\frac{d}{dz} \Sigma_3 = -\frac{2}{4!} \Sigma_2 + \frac{2}{5!} \Sigma_1 \Sigma_1. \quad (12)$$

Принимая во внимание, что

$$\Sigma_3 = \Sigma_1 + A_1 z - A_2 z^2, \quad \Sigma_2 = \Sigma_1 + A_1 z, \quad A_1 = \frac{1}{3!}, \quad A_2 = -\frac{1}{3!4!},$$

закключаем, что уравнение для $\Sigma_A \equiv \Sigma_1$ имеет вид

$$\frac{d}{dz} \Sigma_A = -\frac{1}{3!} + \frac{2}{4!} \Sigma_A - \frac{2}{5!} \Sigma_A^2. \quad (13)$$

Его решение записывается как

$$\Sigma_A(z) = -\sqrt{5/3} \frac{4 \operatorname{tg}(z/(8\sqrt{15}))}{1 - \operatorname{tg}(z/(8\sqrt{15}))\sqrt{5/3}} = \sqrt{10} \frac{\sin(z/(8\sqrt{15}))}{\sin(z/(8\sqrt{15}) - z_0)}, \quad (14)$$

где $z_0 = \arcsin(\sqrt{3/8})$.

Представление $\Sigma_A(z)$ в виде ряда ТВ весьма нетривиально, ибо разложение $\operatorname{tg} z$ содержит числа Бернулли:

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}.$$

При подстановке этого разложения в формулу (14) получаем, что

$$\Sigma_A(z) = -\left(\frac{z}{6} + \frac{z^2}{144} + \frac{z^3}{2880} + \frac{7z^4}{414720} + \dots\right). \quad (15)$$

Заметим, что с учетом комбинаторных факторов и из соображений размерности безразмерная переменная z определяется как $z = g^2 s^2 / \epsilon$.

Этот ряд воспроизводит s -канальные лестничные диаграммы во всех порядках ТВ. То же самое, очевидно, справедливо и для t -канальных лестничных диаграмм с заменой $s \rightarrow t$. Функция Σ_A , определяемая формулой (14), имеет бесконечное количество простых полюсов и тем самым не имеет предела при $z \rightarrow \infty$, т. е. при $\epsilon \rightarrow 0$.

Перейдем к расходимостям следующего за лидирующим порядком. В отличие от лидирующих расходимостей исходными в этом случае являются не только однопетлевые, но и двухпетлевые диаграммы. Для вычисления $\mathcal{B}_1^{(n)}$ требуются конечные части однопетлевых диаграмм, а для $\mathcal{B}_2^{(n)}$ – лидирующие полюсы и полюсы следующего за лидирующим порядком двухпетлевых диаграмм из второго и пятого ряда на рис. 2. Полюс двойного бокса следующего за лидирующим порядком следует вычислять напрямую, его нельзя вывести из рекуррентных соотношений, что вытекает из уравнения (6). Прямой расчет дает выражения

$$\text{Box} = \frac{1}{3! \epsilon}, \quad \text{DoubleBox} = -\frac{1}{3!4!} \left(\frac{s}{\epsilon^2} + \frac{27}{4} \frac{s}{\epsilon} + \frac{1}{6} \frac{t}{\epsilon} \right). \quad (16)$$

Вместе с остальными одно- и двухпетлевыми диаграммами, рассчитанными вплоть до следующего за лидирующим порядком, мы получаем выражения для $\mathcal{B}_1^{(n)}$ и $\mathcal{B}_2^{(n)}$. Отметим, что вычисление некоторых двухпетлевых диаграмм является весьма сложной задачей. Так, например, ромбовидная диаграмма была рассчитана с использованием техники интегрирования по частям [11]. Здесь и далее мы используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^{(n)} &= s^{n-1} A_n, & \mathcal{A}_n^{(n)'} &= s^{n-1} A_n', \\ \mathcal{B}_n^{(n)} &= s^{n-1} B_{sn} + s^{n-2} t B_{tn}, & \mathcal{B}_n^{(n)'} &= s^{n-1} B_{sn}' + s^{n-2} t B_{tn}'. \end{aligned}$$

В конечном итоге получаем равенства

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_1^{(n)} = & -A'_{n-1}s^{n-2}\left(-\frac{s}{4!}\right)\frac{19}{6} \cdot 2 - B'_{sn-1}s^{n-2}\left(-\frac{s}{4!}\right) \cdot 2 - \\
 & - B'_{tn-1}s^{n-3}\left(-\frac{s}{5!}\right)(t-2s) \cdot 2 + \sum_{k=1}^{n-2} A'_k s^{k-1} A'_{n-1-k} s^{n-2-k} \left(\frac{2s^2}{5!}\right) \frac{46}{15} + \\
 & + \sum_{k=1}^{n-2} A'_k s^{k-1} B'_{sn-1-k} s^{n-2-k} \left(\frac{2s^2}{5!}\right) \cdot 2 + \sum_{k=1}^{n-2} A'_k s^{k-1} B'_{tn-1-k} s^{n-3-k} \left(-\frac{s^3}{5!}\right) \cdot 2,
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_2^{(n)} = & -A'_{n-2}s^{n-3}\left(\frac{s^2}{3!4!}\right)\frac{5063}{2400} \cdot 2 - B'_{sn-2}s^{n-3}\left(\frac{s^2}{3!4!}\right)\frac{13}{40} \cdot 2 - \\
 & - B'_{tn-1}s^{n-4}\left(\frac{s^2}{5!5!}\right)\frac{t-32s}{2} \cdot 2 - A'_{n-2}s^{n-3}\left(-\frac{s}{4!}\right)\left(-\frac{s}{4!}\frac{19}{6}\right) \cdot 2 - \\
 & - B'_{sn-2}s^{n-3}\left(-\frac{s}{4!}\right)\left(-\frac{s}{4!}\right) - B'_{tn-2}s^{n-4}\left(-\frac{s^2}{5!5!}\right)(12s-t) + \\
 & + \sum_{k=1}^{n-3} A'_k s^{k-1} A'_{n-2-k} s^{n-3-k} \left(-\frac{s^3}{5!4!}\right) \frac{938}{15} + \\
 & + \sum_{k=1}^{n-3} A'_k s^{k-1} B'_{sn-2-k} s^{n-3-k} \left(-\frac{s^3}{5!2}\right) + \\
 & + \sum_{k=1}^{n-3} A'_k s^{k-1} B'_{tn-2-k} s^{n-4-k} \left(\frac{442s^4}{5!5!12}\right) - \\
 & - \sum_{k,l=1}^{n-k+l < n-2} A'_k s^{k-1} A'_l s^{l-1} A'_{n-2-k-l} s^{n-3-k-l} \left(\frac{2s^2}{5!}\right) \left(\frac{2s^2}{5!}\right) \frac{46}{15} \cdot 2 - \\
 & - \sum_{k,l=1}^{n-k+l < n-2} A'_k s^{k-1} A'_l s^{l-1} B'_{sn-2-k-l} s^{n-3-k-l} \left(\frac{2s^2}{5!}\right) \left(\frac{2s^2}{5!}\right) \cdot 2 - \\
 & - \sum_{k,l=1}^{n-k+l < n-2} A'_k s^{k-1} A'_l s^{l-1} B'_{tn-2-k-l} s^{n-4-k-l} \left(\frac{2s^2}{5!}\right) \left(-\frac{s^3}{5!}\right) \cdot 2 - \\
 & - \sum_{k,l=1}^{n-k+l < n-2} A'_k s^{k-1} B'_{tl} s^{l-2} A'_{n-2-k-l} s^{n-3-k-l} \left(\frac{-2s^5}{5!5!}\right).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Эти выражения, в свою очередь, позволяют построить с использованием уравнения (9) следующие рекуррентные соотношения для штрихованных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 B'_{tn} = & -\frac{2}{n(n-1)} B'_{tn-2} \frac{10}{5!5!} + \frac{2}{n} B'_{tn-1} \frac{2}{5!}, \\
 B'_{sn} = & \frac{2}{n(n-1)} \left[-A'_{n-2} \frac{2321}{5!5!2} - B'_{sn-2} \frac{18}{4!5!} + B'_{tn-2} \frac{44}{5!5!} - \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^{n-3} A'_k A'_{n-2-k} \frac{938}{4!5!15} - \sum_{k=1}^{n-3} A'_k B'_{sn-2-k} \frac{1}{5!2} + \sum_{k=1}^{n-3} A'_k B'_{tn-2-k} \frac{442}{5!5!12} - \right.
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k,l=1}^{n-k+l < n-2} A'_k A'_l A'_{n-2-k-l} \frac{8}{5!} \frac{46}{5!} \frac{12}{15} - \sum_{k,l=1}^{n-k+l < n-2} A'_k A'_l B'_{sn-2-k-l} \frac{12}{5!} \frac{12}{5!} + \\
& + \sum_{k,l=1}^{n-k+l < n-2} A'_k A'_l B'_{tn-2-k-l} \frac{4}{5!} \frac{4}{5!} + \sum_{k,l=1}^{n-k+l < n-2} B'_k A'_l A'_{sn-2-k-l} \frac{2}{5!} \frac{2}{5!} \Big] + \\
& + \frac{2}{n} \left[A'_{n-1} \frac{19}{3 \cdot 4!} + B'_{sn-1} \frac{2}{4!} - B'_{tn-1} \frac{4}{5!} + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{n-2} A'_k A'_{n-1-k} \frac{2}{5!} \frac{46}{15} + \sum_{k=1}^{n-2} A'_k B'_{sn-1-k} \frac{4}{5!} - \sum_{k=1}^{n-2} A'_k B'_{tn-1-k} \frac{2}{5!} \right]. \quad (20)
\end{aligned}$$

Запишем также соответствующие соотношения для нештрихованных коэффициентов в терминах штрихованных. Для B_{tn} они выглядят следующим образом:

$$B_{tn} = (-1)^n \left[-\frac{2}{n} B'_{tn-2} \frac{10}{5!} \frac{10}{5!} + \frac{n-2}{n} B'_{tn-1} \frac{2}{5!} \right], \quad (21)$$

и для B_{sn} имеют аналогичный вид. Теперь, используя начальные значения коэффициентов

$$\begin{aligned}
B'_{s1} = B'_{t1} = 0, \quad B'_{s2} = -\frac{1}{3!} \frac{5}{4!} \frac{5}{12}, \quad B'_{t2} = -\frac{1}{3!} \frac{1}{4!} \frac{1}{6}, \\
B_{s2} = -\frac{1}{3!} \frac{27}{4!} \frac{27}{4}, \quad B_{t2} = -\frac{1}{3!} \frac{1}{4!} \frac{1}{6}, \quad A_1 = \frac{1}{3!},
\end{aligned}$$

можно рассчитать эти коэффициенты в любом порядке ТВ, используя рекуррентные выражения.

Последним шагом является суммирование полного ряда. Для того чтобы это осуществить, мы снова записываем дифференциальные уравнения для сумм. Начнем с B'_{tn} . Умножая уравнение (19) на z^{n-2} и суммируя от трех до бесконечности, получаем дифференциальное уравнение для $\Sigma'_{tB} \equiv \Sigma'_{tB2} = \sum_2^\infty z^n B'_{tn}$, аналогичное уравнению (13). Оно имеет вид

$$\frac{d^2 \Sigma'_{tB}(z)}{dz^2} - \frac{1}{30} \frac{d \Sigma'_{tB}(z)}{dz} + \frac{\Sigma'_{tB}(z)}{720} = -\frac{1}{432}. \quad (22)$$

Принимая во внимание граничные условия $\Sigma'_{tB}(0) = d \Sigma'_{tB}(0)/dz = 0$, записываем решение

$$\Sigma'_{tB}(z) = \frac{5}{6} \left[e^{z/60} \left(-\sin \frac{z}{30} + 2 \cos \frac{z}{30} \right) - 2 \right]. \quad (23)$$

Можно записать решение для нештрихованной суммы $\Sigma_{tB} \equiv \Sigma_{tB2} = \sum_2^\infty (-z)^n B_{tn}$. Как следует из уравнения (21),

$$\frac{d \Sigma_{tB}(z)}{dz} = \frac{1}{60} z \frac{d \Sigma'_{tB}(z)}{dz} - \frac{\Sigma'_{tB}(z)}{60} - z \frac{\Sigma'_{tB}(z)}{720} - \frac{z}{432}. \quad (24)$$

Решая это уравнение и используя выражение (23), приходим к равенству

$$\Sigma_{tB}(z) = -\frac{1}{36} \left[60 + z + e^{z/60} \left(-(60 + z) \cos \frac{z}{30} - 2(-15 + z) \sin \frac{z}{30} \right) \right]. \quad (25)$$

Намного сложнее получить замкнутое выражение для Σ'_{sB} и Σ_{sB} . Как и прежде, мы начинаем со штрихованных коэффициентов. Используя уравнение (20), умножая его на z^{n-2} и суммируя от трех до бесконечности, мы записываем следующие дифференциальные уравнения для $\Sigma'_{sB} \equiv \Sigma'_{sB2} = \sum_2^\infty z^n B'_{sn}$:

$$\frac{d^2 \Sigma'_{sB}(z)}{dz^2} + f_1(z) \frac{d \Sigma'_{sB}(z)}{dz} + f_2(z) \Sigma'_{sB}(z) = f_3(z), \quad (26)$$

где

$$f_1(z) = -\frac{1}{6} + \frac{\Sigma_A}{15},$$

$$f_2(z) = \frac{1}{80} - \frac{\Sigma_A}{120} + \frac{\Sigma_A^2}{600} + \frac{1}{15} \frac{d \Sigma_A}{dz},$$

$$f_3(z) = \frac{2321}{5!5!2} \Sigma_A + \frac{11}{1800} \Sigma'_{tB} - \frac{469}{5!90} \Sigma_A^2 - \frac{442}{5!5!6} \Sigma_A \Sigma'_{tB} + \frac{23}{6750} \Sigma_A^3 + \frac{1}{1200} \Sigma_A^2 \Sigma'_{tB} - \\ - \frac{19}{36} \frac{d \Sigma_A}{dz} - \frac{1}{15} \frac{d \Sigma'_{tB}}{dz} + \frac{23}{225} \frac{d \Sigma_A^2}{dz} + \frac{1}{30} \frac{d(\Sigma_A \Sigma'_{tB})}{dz} - \frac{3}{32}.$$

Это уравнение является уравнением Риккати общего вида. Удивительно, что оказалось возможным найти решение с помощью простой подстановки. Мы обсуждаем это решение в следующем разделе.

Подобно уравнению (24) можно построить уравнение для нештрихованных коэффициентов $\Sigma_{sB} \equiv \Sigma_{sB2} = \sum_2^\infty (-z)^n B_{sn}$. Его можно разрешить относительно Σ'_{sB} и Σ'_{tB} следующим образом:

$$\Sigma_{sB} = \left(z \frac{d}{dz} - 1 \right) \Sigma'_{sB} - z \left(-\frac{19}{72} \Sigma_A + \frac{1}{12} \Sigma'_{sB} - \frac{1}{30} \Sigma'_{tB} + \frac{23}{450} \Sigma_A^2 - \frac{1}{30} \Sigma_A \Sigma'_{sB} + \frac{1}{60} \Sigma_A \Sigma'_{tB} \right), \quad (27)$$

причем Σ_{sB} определяется решениями для штрихованных величин.

4. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

Обсудим некоторые свойства решений уравнений (26), (27). Уравнение (26) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами. Удивительно, но его можно упростить подстановкой $\Sigma'_{sB}(z) = u(z) d \Sigma_A / dz$. Используя уравнение (13), получаем следующее простое уравнение для функции $u(z)$:

$$u''(z) \frac{d \Sigma_A}{dz} = f_3(z), \quad (28)$$

которое решается в квадратурах:

$$u(z) = \int_0^z dy \int_0^y \frac{f_3(x)}{\Sigma'_A(x)} dx. \quad (29)$$

Численное интегрирование показывает, что функция $u(z)$ является гладкой и растет как $e^{z/60}$, повторяя рост Σ'_{tB} (см. рис. 3). Она не имеет полюсов, так что сингулярности $\Sigma'_{sB}(z)$ проистекают всецело из Σ'_A .

Для того чтобы получить функцию Σ_{sB} , нужно подставить соответствующие решения для Σ'_{sB} и Σ'_{tB} в уравнение (27). Это можно сделать численно. Сингулярности полученного решения определяются лидирующим членом Σ_A и его производной. Рассмотрим их более подробно.

Рис. 3. Численно рассчитанное поведение функции $u(z)$. Рис. 4. Точное решение для Σ_A (а) и численное решение точных уравнений для Σ_{sB} (б) в сравнении с соответствующими рядами ТВ, содержащими 20 членов разложения.

Лидирующая расходимость задается решением Σ_A (14). Эта функция является сингулярной периодической функцией, которая имеет нули в точках $z/8/\sqrt{15} = \pi n$ и полюсы первого порядка в точках $z/8/\sqrt{15} = \arcsin \sqrt{3/8} + \pi n$. Суммирование ряда ТВ (15) дает удовлетворительное приближение в интервале между нулем и первым полюсом в районе $z \approx 20.42$, но не переходит за полюс, как это видно на рис. 4а.

Что касается расходимостей Σ_{sB} следующего за лидирующим порядком, определяемых уравнением (27), то, как нетрудно заметить, сингулярные функции Σ_A и Σ'_{sB} обладают полюсами, расположенными в совпадающих точках. Поэтому можно ожидать, что и функция Σ_{sB} является сингулярной функцией того же типа и также содержит полюсы. Следовательно, численное решение также должно быть удовлетворительным в интервале между нулем и первым полюсом. На рис. 4б представлены результаты численного решения уравнений (26), (27) вместе с суммой ряда ТВ с учетом двадцати членов разложения.

Из анализа построенных графиков функций $\Sigma_A(z)$ и Σ_{sB} можно сделать два главных вывода: во-первых, ТВ прекрасно работает в интервале до первого полюса и тем лучше, чем большее число членов ряда принято во внимание. Ряд ТВ, очевидно, сходится. В случае Σ_A этот факт можно увидеть непосредственно, в случае Σ_{sB} мы проверили его численно.

Второй вывод касается сингулярностей построенных функций. Полное выражение для лидирующих расходимостей и расходимостей следующего за лидирующим порядка лестничных диаграмм во всех петлях можно записать в виде

$$\Sigma_{\text{Ladder}} = \Sigma_A(z) + \epsilon \left(\Sigma_{sB}(z) + \frac{t}{s} \Sigma_{tB}(z) \right) + \dots, \quad z \equiv \frac{g^2 s^2}{\epsilon}. \quad (30)$$

Из аналитического решения для $\Sigma_A(z)$ (14) и Σ_{tB} (25) мы видим, что в то время как Σ_A имеет бесконечное число полюсов, Σ_{tB} экспоненциально растет, хотя и медленнее, чем Σ_A . В то же время из численного решения для Σ_{sB} с очевидностью следует, что она наследует сингулярности Σ_A и они не сокращаются. Таким образом, расходимости следующего за лидирующим порядка ведут себя подобно лидирующим и не меняют сингулярного поведения полной функции (30).

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Суммируя полученные результаты, касающиеся расходимостей лидирующего и следующего за лидирующим порядка, следует подчеркнуть еще раз, что, как это следует из общих теорем, лидирующие расходимости во всех петлях определяются однопетлевым вкладом, а расходимости следующего за лидирующим порядка соответственно двухпетлевым. Мы представили явные формулы, подтверждающие это утверждение для случая лестничных диаграмм, и показали, каким образом вклады высших петель можно вычислить на основе вкладов низших петель чисто алгебраическим путем через рекуррентные соотношения. Соответствующие уравнения для суммы вкладов всех порядков ТВ (22), (24), (26), (27) обобщают обычные ренормгрупповые уравнения на случай неперенормируемых взаимодействий.

Чтобы сделать рассуждения ясными и прозрачными, мы рассмотрели диаграммы лестничного типа и провели суммирование лидирующих расходимостей и расходимостей следующего за лидирующим порядка во всех петлях. Даже эта задача оказалась достаточно сложной, и мы были вынуждены прибегнуть к численным методам. Однако результат суммирования расходимостей следующего за лидирующим порядка не изменил качественно картины, полученной для лидирующих членов. Все основные свойства остались неизменными.

Главный вопрос состоит в том, можно ли придать смысл неперенормируемым взаимодействиям и соответственно интерпретировать полученные результаты? Существует ли предел $\epsilon \rightarrow 0$ для полных ответов? Полученные нами выражения для $\Sigma_A(z)$ и Σ_{sB} дают скорее отрицательный ответ на этот вопрос. Суммирование бесконечного ряда ТВ не улучшает поведения отдельных его членов при снятии регуляризации.

С другой стороны, введение бесконечного набора контрчленов со все возрастающим числом производных, разрушающих перенормируемость теории, могло бы иметь смысл, если эти контрчлены оказались бы связаны между собой. С этой точки зрения полезно рассмотреть, как сказывается на контрчленах произвол в схеме

вычитаний, т. е. так называемую схемозависимость. Все расчеты, представленные выше, были проведены в минимальной схеме вычитаний. Очевидно, что лидирующие расходимости не зависят от выбранной схемы, но расходимости следующего за лидирующим порядка схемозависимы. Однако оказывается, что эта зависимость во всех порядках ТВ определяется одной произвольной константой. Действительно, все полученные выше рекуррентные соотношения – схемонезависимы! Единственная зависимость от схемы вычитаний содержится в вычитании однопетлевой диаграммы типа “бокс”. Если выбрать однопетлевый контрчлен в виде

$$A'_1 = \frac{1}{6\epsilon}(1 + c\epsilon),$$

где $c = 0$ соответствует минимальной схеме вычитаний, то мы получаем следующую добавку к сумме контрчленов всех порядков ТВ для расходимостей следующего за лидирующим порядка:

$$\Delta\Sigma'_{sB} = -cz \frac{d\Sigma_A}{dz}. \quad (31)$$

Если выписать сумму контрчленов лидирующего и следующего за лидирующим порядка в минимальной схеме аналогично (30), а именно

$$\Sigma'_{\text{Ladder}} = \Sigma'_A(z) + \epsilon \left(\Sigma'_{sB}(z) + \frac{t}{s} \Sigma'_{tB}(z) \right) + \dots, \quad z \equiv \frac{g^2 s^2}{\epsilon}, \quad (32)$$

то с учетом того, что $\Sigma'_A(z) = \Sigma_A(-z)$, добавка вида (31) эквивалентна следующей простой модификации уравнения (32):

$$\Sigma'_{\text{Ladder}} = \Sigma_A(-z(1 + c\epsilon)) + \epsilon \left(\Sigma'_{sB}(z) + \frac{t}{s} \Sigma'_{tB}(z) \right) + \dots, \quad z \equiv \frac{g^2 s^2}{\epsilon}. \quad (33)$$

Таким образом, произвол в определении контрчленов с бесконечным числом производных свелся к выбору одного параметра в лидирующем члене. Вообще говоря, в последующих приближениях число таких параметров будет возрастать. Сводятся ли все они к модификации единственного параметра регуляризации, подлежит проверке.

Благодарности. Авторы благодарны М. Компанейцу за численную проверку вычислений трех- и четырехпетлевых диаграмм, а также признательны А. Борлакову и Л. Борку за активное обсуждение.

Список литературы

- [1] Z. Bern, L. J. Dixon, V. A. Smirnov, “Iteration of planar amplitudes in maximally supersymmetric Yang–Mills theory at three loops and beyond”, *Phys. Rev. D*, **72**:8 (2005), 085001, 27 pp., arXiv: hep-th/0505205; Z. Bern, M. Czakon, L. Dixon, D. A. Kosower, V. A. Smirnov, “the four-loop planar amplitude and cusp anomalous dimension in maximally supersymmetric Yang–Mills theory”, *Phys. Rev. D*, **75**:8 (2007), 085010, 34 pp., arXiv: hep-th/0610248; L. J. Dixon, J. M. Drummond, C. Duhr, J. Pennington, “JHEP”, **6** (2014), 116, 58 pp., arXiv: 1402.3300v1.
- [2] Z. Bern, J. J. Carrasco, L. J. Dixon, M. R. Douglas, M. von Hippel, H. Johansson, “ $D = 5$ maximally supersymmetric Yang–Mills theory diverges at six loops”, *Phys. Rev. D*, **87**:2 (2013), 025018, 8 pp., arXiv: 1210.7709v1.

- [3] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, H. Johansson, *Progress on ultraviolet finiteness of supergravity*, 2009, arXiv:0902.3765; Z. Bern, J. J. Carrasco, L. Dixon, H. Johansson, R. Roiban, “Amplitudes and ultraviolet behavior of $\mathcal{N} = 8$ supergravity”, *Fortsch. Phys.*, **59**:7–8 (2011), 561–578, arXiv:1103.1848; H. Elvang, D. Z. Freedman, M. Kiermaier, “SUSY Ward identities, superamplitudes, and counterterms”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:45 (2011), 454009, 33 pp., arXiv:1012.3401v2.
- [4] Z. Bern, L. J. Dixon, D. A. Kosower, “On-shell methods in perturbative QCD”, *Ann. Phys.*, **322**:7 (2007), 1587–1634, arXiv:0704.2798; R. Britto, “Loop amplitudes in gauge theories: modern analytic approaches”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:45 (2011), 454006, 28 pp., arXiv:1012.4493; Z. Bern, Y.-T. Huang, “Basics of generalized unitarity”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:45 (2011), 454003, 32 pp., arXiv:1103.1869; H. Elvang, Y.-T. Huang, *Scattering amplitudes*, arXiv:1308.1697.
- [5] L. V. Bork, D. I. Kazakov, D. E. Vlasenko, “Challenges of $D = 6$ $\mathcal{N} = (1, 1)$ SYM theory”, *Phys. Lett. B*, **734** (2014), 111–115, arXiv:1404.6998.
- [6] L. V. Bork, D. I. Kazakov, M. V. Kompaniets, D. M. Tolkachev, D. E. Vlasenko, “Divergences in maximal supersymmetric Yang–Mills theories in diverse dimensions”, *JHEP*, **11** (2015), 059, 38 pp., arXiv:1508.05570.
- [7] A. T. Borlakov, D. I. Kazakov, D. M. Tolkachev, D. E. Vlasenko, “Summation of all-loop UV divergences in maximally supersymmetric gauge theories”, *JHEP*, **12** (2016), 154, 17 pp., arXiv:1610.05549.
- [8] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в квантовую теорию поля*, Наука, М., 1984.
- [9] О. И. Завьялов, *Перенормированные фейнмановские диаграммы*, Наука, М., 1979.
- [10] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [11] K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov, “Integration by parts: an algorithm to calculate β -function in 4 loops”, *Nucl. Phys. B*, **192**:1 (1981), 159–204; Д. И. Казаков, “Вычисление фейнмановских интегралов методом ‘уникальностей’”, *ТМФ*, **58**:3 (1984), 343–353.

Поступила в редакцию 27.09.2016