Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Дамаскинский, М. А. Соколов, Производящая функция полиномов Чебышёва двух переменных, ассоциированных с алгеброй Ли G_2 , *ТМФ*, 2017, том 192, номер 2, 207–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9281>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:29:33

© 2017 г. Е. В. Дамаскинский^{*†}, М. А. Соколов[‡]

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЁВА ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С АЛГЕБРОЙ ЛИ G_2

Методом, предложенным ранее, построена производящая функция полиномов Чебышёва второго рода от двух переменных, ассоциированных с простой алгеброй Ли G_2 .

Ключевые слова: полиномы Чебышёва двух переменных, производящие функции.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9281>

*Посвящается светлой памяти нашего друга
Петра Петровича Кулиша*

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа завершает серию статей, начатую по инициативе П. П. Кулиша в препринте [1] и продолженную в статьях [2], [3]. В этих работах был предложен метод построения производящих функций для полиномов Чебышёва нескольких переменных как первого, так и второго рода, ассоциированных с простыми алгебрами Ли. Метод был опробован на примерах полиномов, связанных с алгебрами A_2 , C_2 , A_3 и G_2 (только первого рода). В настоящей работе рассмотрен случай полиномов Чебышёва второго рода двух переменных, ассоциированных с алгеброй G_2 , что завершает рассмотрение простых алгебр ранга 2.

Интерес П. П. Кулиша к данной тематике возник при подготовке его доклада на конференции в Нанкае [4]. При обсуждении текста доклада с одним из авторов (Е. В. Дамаскинским) было обнаружено, что полиномы Чебышёва второго

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-03148).

^{*}Военный институт (инженерно-технический) Военной академии материально-технического обеспечения, Санкт-Петербург, Россия

[†]Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: evd@pdmi.ras.ru

[‡]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: masokolov@gmail.com

рода одной и двух переменных естественно возникают при рассмотрении интегрируемых спиновых цепочек квантовым методом обратной задачи. Предполагалось, что эта тема будет предметом дальнейших исследований, однако болезнь и кончина П. П. Кулиша воспрепятствовала осуществлению этого плана¹⁾.

В работе построена производящая функция полиномов Чебышёва второго рода двух переменных, ассоциированных с простой алгеброй Ли G_2 , и сделано несколько замечаний, касающихся этого вывода. Мы рассматриваем наиболее естественный вариант обобщения полиномов Чебышёва на случай нескольких переменных, предложенный в работе Коорнвиндера [5] (см. также [6]).

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Полиномы Чебышёва нескольких переменных являются естественным обобщением классических полиномов Чебышёва одной переменной (см., например, [7], [8]). Они находят применение в различных областях математики (теория аппроксимаций [9], линейная алгебра [10], [11] и теория представлений [12]–[14]) и в физике [15]–[18].

Классические полиномы Чебышёва первого рода $T_n(x)$ определяются формулой

$$T_n(x) = T_n(\cos \phi) = \cos n\phi, \quad n \geq 0, \quad (1)$$

где $\phi = \arccos x$. Полиномы второго рода $U_n(x)$ определяются как

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\phi}{\sin \phi}, \quad n \geq 0. \quad (2)$$

И те и другие полиномы удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (3)$$

но с различными начальными условиями

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x; \quad U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$$

Полиномы Чебышёва нескольких переменных могут быть определены для любой простой алгебры Ли следующим образом. Пусть L – простая алгебра Ли, R – ее приведенная система корней, являющихся векторами в d -мерном евклидовом пространстве E^d со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Система R полностью определяется базисом простых корней α_i , $i = 1, \dots, d$, и конечной группой отражений $W(R)$ – группой Вейля. Порождающие элементы группы Вейля w_i , $i = 1, \dots, d$, действуют на простые корни по правилу $w_i \alpha_i = -\alpha_i$. Система корней R замкнута относительно действия группы Вейля. На любой вектор $x \in E^d$ элементы w_i группы $W(R)$ действуют по формуле

$$w_i x = x - \frac{2(x, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i. \quad (4)$$

Каждому корню α системы R ставится в соответствие кокорень

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}.$$

¹⁾ Авторы благодарны рецензенту за пожелание добавить разъяснение по этой тематике (см. приложение).

Для базиса простых корней $\alpha_i^\vee$, $i = 1, \dots, d$, определяется дуальный базис фундаментальных весов λ_i , $i = 1, \dots, d$,

$$(\lambda_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$$

(дуальное пространство E^{d*} отождествляется с E^d). Базисы корней и весов связаны линейным преобразованием

$$\alpha_i = C_{ij} \lambda_j, \quad C_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \quad (5)$$

где C – матрица Картана алгебры Ли L . Напомним, что базисы корней и весов не ортонормированны.

Полиномы Чебышёва первого рода, ассоциированные с алгеброй Ли L , определяются с помощью W -инвариантной функции

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\phi) = \sum_{w \in W} e^{2\pi i(w\mathbf{n}, \phi)}, \quad (6)$$

где вектор $\mathbf{n}$ с целочисленными неотрицательными компонентами выражен в базисе фундаментальных весов $\{\lambda_i\}$, а ϕ – в дуальном базисе корней $\{\alpha_i^\vee\}$:

$$\mathbf{n} \equiv (n_1, \dots, n_d) = \sum_{i=1}^d n_i \lambda_i, \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad \phi = \sum_{i=1}^d \phi_i \alpha_i^\vee, \quad \phi_i \in [0, 1).$$

Определяя новые переменные (обобщенные косинусы) x_i , $i = 1, \dots, d$, формулами

$$x_i = \Phi_{\mathbf{e}_i}(\phi), \quad \mathbf{e}_i = (\overbrace{0, \dots, 0}^{i-1}, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^{d-i}), \quad (7)$$

и записывая функцию (6) в терминах x_i , мы приходим к (ненормированным) полиномам Чебышёва первого рода от d переменных. То, что такая процедура возможна для любой простой алгебры Ли, показано в работах [5], [19]–[23].

Функция $\Phi_{\mathbf{n}}(\phi)$ обладает большим количеством полезных свойств, включая следующее правило умножения:

$$\Phi_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{s}} = \sum_{w \in W} \Phi_{w\mathbf{k}+\mathbf{s}}, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d), \quad \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d), \quad (8)$$

позволяющее найти рекуррентные соотношения для полиномов от нескольких переменных.

Полиномы Чебышёва второго рода, ассоциированные с алгеброй Ли L , определяются соотношением

$$U_{\mathbf{n}}(\phi) = \frac{\sum_{w \in W} \det w e^{2\pi i(w(\mathbf{n}+\boldsymbol{\rho}), \phi)}}{\sum_{w \in W} \det w e^{2\pi i(w\boldsymbol{\rho}, \phi)}}, \quad (9)$$

где $\det w = (-1)^{\ell(w)}$, а $\ell(w)$ есть минимальное число генераторов группы Вейля, необходимых для представления любого элемента w в виде произведения w_i , а $\boldsymbol{\rho}$ является вектором Вейля, равным полусумме положительных корней. С помощью формулы (5) этот вектор может быть представлен в терминах фундаментальных

весов. Как и в случае полиномов первого рода, определяются новые переменные $x_i = U_{e_i}(\phi)$, в терминах которых выражается функция (9) для любых неотрицательных n_i из мультииндекса $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$. Функция $U_{\mathbf{n}}(\phi)$, представленная в терминах x_i , дает полиномы Чебышёва нескольких переменных второго рода.

Процедура представления функций $\Phi_{\mathbf{n}}(\phi)$ (6) и $U_{\mathbf{n}}(\phi)$ (9) (при заданных мультииндексах $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$) в терминах переменных x_i достаточно громоздка. Поэтому очевидно, что необходим эффективный способ прямого вычисления полиномов Чебышёва нескольких переменных. В работах [1], [2] был предложен метод вычисления производящих функций полиномов Чебышёва как первого, так и второго рода, ассоциированных с любой простой алгеброй Ли. Коротко опишем его.

Начнем с функции (6), определяющей полиномы Чебышёва первого рода. Заметим, что скалярное произведение в формуле для функции $\Phi_{\mathbf{n}}(\phi)$ можно представить в виде $(w\mathbf{n}, \phi) = \sum_k (w\lambda_k, \phi)n_k$, а саму функцию $\Phi_{\mathbf{n}}(\phi)$ выразить в виде следующего произведения:

$$\Phi_{\mathbf{n}} = \sum_{w \in W} \prod_k (e^{2\pi i(w\lambda_k, \phi)})^{n_k} = \text{tr} \left(\prod_k M_k^{n_k} \right), \quad (10)$$

где M_k – диагональные матрицы

$$M_k = \text{diag}(e^{2\pi i(w_1\lambda_k, \phi)}, e^{2\pi i(w_2\lambda_k, \phi)}, \dots, e^{2\pi i(w_{|W|}\lambda_k, \phi)}), \quad (11)$$

ненулевыми элементами которых являются слагаемые суммы (6), w_i – элементы группы Вейля W , $|W|$ – число элементов этой группы.

Введем новые матрицы $R_k = (I_{|W|} - p_k M_k)^{-1}$, где $I_{|W|}$ – единичная матрица размерности $|W|$, p_k – произвольные вещественные параметры. В этих обозначениях функция $\Phi_{\mathbf{n}}$ имеет вид

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\phi) = \Phi_{n_1, \dots, n_d}(\phi) = \frac{1}{n_1! \dots n_d!} \frac{\partial^{n_1 + \dots + n_d}}{\partial^{n_1} p_1 \dots \partial^{n_d} p_n} \left(\text{tr}(R_{p_1} \dots R_{p_d}) \right) \Big|_{p_1 = \dots = p_d = 0}. \quad (12)$$

Простая структура матриц R_{p_k} легко позволяет представить функцию $\text{tr}(R_{p_1} \dots R_{p_d})$ в терминах определенных выше переменных (7). Коэффициенты $\Phi_{n_1, \dots, n_d}(\phi)$ функции

$$F_{p_1, \dots, p_d}^I = \text{tr}(R_{p_1} \dots R_{p_d}) = \sum_{n_1 \dots n_d \geq 0} \Phi_{n_1, \dots, n_d}(x_i) p_1^{n_1} \dots p_d^{n_d} \quad (13)$$

также оказываются выраженными в терминах x_i и потому являются (ненормированными) полиномами Чебышёва первого рода от d переменных. При этом сама функция $F_{p_1, \dots, p_d}^I$ выступает как производящая функция этих полиномов.

Для вычисления производящих функций полиномов Чебышёва второго рода от d переменных требуется только небольшая модификация описанного выше метода. Представим функцию $U_{\mathbf{n}}(\phi)$, определяющую такие полиномы, в виде²⁾

$$U_{\mathbf{n}}(\phi) = \frac{\Phi_{\mathbf{n}+\rho}^{\text{as}}}{\Phi_{\rho}^{\text{as}}} = \frac{\Phi_{\mathbf{n}+\rho}^{\text{as}+} - \Phi_{\mathbf{n}+\rho}^{\text{as}-}}{\Phi_{\rho}^{\text{as}+} - \Phi_{\rho}^{\text{as}-}}, \quad (14)$$

²⁾Индекс as указывает на то, что суммирование проводится по экспонентам с коэффициентами +1 или -1, в соответствии с определением (9) полиномов Чебышёва второго рода.

где

$$\Phi_{\mathbf{k}}^{\text{as}\pm} = \sum_{\substack{w \in W, \\ \det w = \pm 1}} e^{2\pi i(w\mathbf{k}, \phi)}.$$

Дальнейшие вычисления повторяют приведенную выше схему (10)–(13) для каждой из функций $\Phi_{\mathbf{k}}^{\text{as}\pm}$ по отдельности. В результате производящая функция полиномов второго рода имеет вид

$$F_{p_1, \dots, p_d}^{\text{II}} = \frac{\text{tr}(R_{p_1}^+ \dots R_{p_d}^+ - R_{p_1}^- \dots R_{p_d}^-)}{\Phi_{\rho}^{\text{as}}}, \quad (15)$$

где через матрицы $R^{\pm}$ выражаются функции $\Phi_{\mathbf{k}}^{\text{as}\pm}$. Поскольку вектор Вейля в пространстве фундаментальных весов дается формулой $\rho = \sum_{i=1}^d \lambda_i$, то множитель Φ_{ρ}^{as} , стоящий в знаменателе (14), вычисляется как

$$\Phi_{\rho}^{\text{as}} = \frac{\partial^d}{\partial p_1 \dots \partial p_d} (\text{tr}(R_{p_1}^+ \dots R_{p_d}^+ - R_{p_1}^- \dots R_{p_d}^-)) \Big|_{p_1 = \dots = p_d = 0}. \quad (16)$$

В итоге полиномы Чебышёва второго рода даются выражением

$$U_{\mathbf{n}} = \frac{1}{(n_1 + 1)! \dots (n_d + 1)!} \times \\ \times \frac{\partial^{n_1 + \dots + n_d + d}}{\partial p_1^{n_1 + 1} \dots \partial p_d^{n_d + 1}} \left(\frac{\text{tr}(R_{p_1}^+ \dots R_{p_d}^+ - R_{p_1}^- \dots R_{p_d}^-)}{\Phi_{\rho}^{\text{as}}} \right) \Big|_{p_1 = \dots = p_d = 0}. \quad (17)$$

3. ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЁВА ВТОРОГО РОДА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С АЛГЕБРОЙ ЛИ G_2

Используя приведенную выше схему, вычислим производящую функцию для полиномов Чебышёва второго рода от двух переменных, ассоциированных с исключительной алгеброй Ли G_2 . Корневая система этой алгебры имеет два фундаментальных корня α_1, α_2 и включает положительные корни $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ вместе с их отражениями.

Используя матрицу Картана

$$C_{G_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

и формулу (5), получаем действие порождающих элементов w_1, w_2 группы Вейля $W(G_2)$ на фундаментальные корни и фундаментальные веса:

$$\begin{aligned} w_1 \alpha_1 &= -\alpha_1, & w_1 \alpha_2 &= 3\alpha_1 + \alpha_2, & w_2 \alpha_1 &= \alpha_1 + \alpha_2, & w_2 \alpha_2 &= -\alpha_2; \\ w_1 \lambda_1 &= \lambda_2 - \lambda_1, & w_1 \lambda_2 &= \lambda_2, & w_2 \lambda_1 &= \lambda_1, & w_2 \lambda_2 &= 2\lambda_1 - \lambda_2. \end{aligned}$$

Представление других элементов группы Вейля через генераторы имеет вид

$$\begin{aligned} w_3 &= w_1 w_2, & w_4 &= w_2 w_1, & w_5 &= w_2 w_1 w_2, & w_6 &= w_1 w_2 w_1, \\ w_7 &= (w_1 w_2)^2, & w_8 &= (w_2 w_1)^2, & w_9 &= w_2 (w_1 w_2)^2, & w_{10} &= w_1 (w_2 w_1)^2, \\ w_{11} &= (w_1 w_2)^3, & w_0 &= e \end{aligned}$$

и позволяет распространить приведенные выше соотношения на всю группу. Детерминанты элементов $w_1, w_2, w_5, w_6, w_9, w_{10}$ группы Вейля равны -1 , детерминанты остальных элементов равны единице.

Используя приведенные выше соотношения и определение

$$\Phi_{\mathbf{k}}^{\text{as}} = \sum_{w \in W} \det w e^{2\pi i(w\mathbf{k}, \phi)},$$

получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{m,n}^{\text{as}} = \Phi_{m,n}^{\text{as}+} - \Phi_{m,n}^{\text{as}-} = & [e^{2\pi i(m\phi+n\psi)} + e^{2\pi i(m(-\phi+\psi)+n(-3\phi+2\psi))} + \\ & + e^{2\pi i(m(2\phi-\psi)+n(3\phi-\psi))} + e^{-2\pi i(m\phi+n\psi)} + \\ & + e^{-2\pi i(m(-\phi+\psi)+n(-3\phi+2\psi))} + e^{-2\pi i(m(2\phi-\psi)+n(3\phi-\psi))}] - \\ & - [e^{2\pi i(m\phi+n(3\phi-\psi))} + e^{2\pi i(m(-\phi+\psi)+n\psi)} + e^{2\pi i(m(2\phi-\psi)+n(3\phi-2\psi))} + \\ & + e^{-2\pi i(m\phi+n(3\phi-\psi))} + e^{-2\pi i(m(-\phi+\psi)+n\psi)} + e^{-2\pi i(m(2\phi-\psi)+n(3\phi-2\psi))}], \end{aligned}$$

где индексы обозначены m, n , а углы $-\phi, \psi$.

Введем следующие четыре диагональные матрицы:

$$\begin{aligned} M_1^+ &= \text{diag}(e^{2\pi i\phi}, e^{2\pi i(-\phi+\psi)}, e^{2\pi i(2\phi-\psi)}, e^{-2\pi i(2\phi-\psi)}, e^{-2\pi i(-\phi+\psi)}, e^{-2\pi i\phi}), \\ M_2^+ &= \text{diag}(e^{2\pi i\psi}, e^{2\pi i(-3\phi+2\psi)}, e^{2\pi i(3\phi-\psi)}, e^{-2\pi i(3\phi-\psi)}, e^{-2\pi i(-3\phi+2\psi)}, e^{-2\pi i\psi}), \\ M_1^- &= \text{diag}(e^{2\pi i(-\phi+\psi)}, e^{2\pi i\phi}, e^{2\pi i(2\phi-\psi)}, e^{-2\pi i(2\phi-\psi)}, e^{-2\pi i(-\phi+\psi)}, e^{-2\pi i\phi}), \\ M_2^- &= \text{diag}(e^{2\pi i\psi}, e^{2\pi i(3\phi-\psi)}, e^{2\pi i(3\phi-2\psi)}, e^{-2\pi i(3\phi-2\psi)}, e^{-2\pi i\psi}, e^{-2\pi i(3\phi-\psi)}). \end{aligned}$$

Тогда для функции $\Phi_{m,n}^{\text{as}}$ имеем представление

$$\Phi_{m,n}^{\text{as}} = \text{tr}((M_1^+)^m (M_2^+)^n - (M_1^-)^m (M_2^-)^n).$$

Поскольку вектор Вейля имеет вид

$$\rho = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1 + \lambda_2,$$

в соответствии с данным выше определением (9) вводим новые переменные

$$x = U_{1,0} = \frac{\Phi_{2,1}^{\text{as}}}{\Phi_{1,1}^{\text{as}}}, \quad y = U_{0,1} = \frac{\Phi_{1,2}^{\text{as}}}{\Phi_{1,1}^{\text{as}}}.$$

С учетом формы сингулярного элемента

$$\begin{aligned} \Phi_{1,1}^{\text{as}} = & e^{2\pi i(\phi+\psi)} - e^{2\pi i(-\phi+2\psi)} + e^{2\pi i(-4\phi+3\psi)} - e^{2\pi i(4\phi-\psi)} + e^{2\pi i(5\phi-2\psi)} - \\ & - e^{2\pi i(5\phi-3\psi)} + e^{2\pi i(-5\phi+2\psi)} - e^{2\pi i(-5\phi-3\psi)} + \\ & + e^{2\pi i(4\phi-3\psi)} - e^{2\pi i(\phi-2\psi)} + e^{2\pi i(-\phi-\psi)} - e^{2\pi i(-4\phi+\psi)} \end{aligned}$$

простое вычисление приводит к следующим выражениям для x, y :

$$\begin{aligned} x &= e^{-2\pi i\phi} + e^{2\pi i(\phi-\psi)} + e^{2\pi i(-2\phi+\psi)} + e^{2\pi i(2\phi-\psi)} + e^{2\pi i(-\phi+\psi)} + e^{2\pi i\phi} + 1, \\ y &= e^{2\pi i(-3\phi+\psi)} + e^{2\pi i(-\psi)} + e^{2\pi i(3\phi-2\psi)} + e^{2\pi i(3\phi-\psi)} + e^{2\pi i(3\phi+2\psi)} + e^{2\pi i\psi} + \\ &\quad + e^{2\pi i(-\phi)} + e^{2\pi i(\phi-\psi)} + e^{2\pi i(-2\phi+\psi)} + e^{2\pi i(2\phi-\psi)} + e^{2\pi i(-\phi+\psi)} + e^{2\pi i\phi} + 2. \end{aligned}$$

Переходя к построению производящей функции, введем матрицы

$$R_p^\pm = (I_6 - pM_1^\pm)^{-1}, \quad R_q^\pm = (I_6 - qM_2^\pm)^{-1},$$

где I_6 – единичная матрица порядка 6, p и q – вещественные параметры, и функцию

$$\Phi_{p,q}^{\text{as}}(\phi, \psi) = \text{tr}(R_p^+ R_q^+ - R_p^- R_q^-).$$

Эта функция факторизуется, причем множителем является сингулярный элемент $\Phi_{1,1}^{\text{as}}$.

Вычисляя отношение $\Phi_{p,q}^{\text{as}}/\Phi_{1,1}^{\text{as}}$ и представляя его в терминах новых переменных x, y , приходим к производящей функции полиномов Чебышёва второго рода, ассоциированных с алгеброй Ли G_2

$$F^{G_2}(p, q; x, y) = \frac{\Phi_{p,q}^{\text{as}}}{\Phi_{1,1}^{\text{as}}} = \frac{1}{P_1 P_2} \left(\sum_{i,j=0}^4 K_{ij} p^i q^j \right). \quad (18)$$

В этом выражении полиномы P_1, P_2 определяются формулами

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 + (1-x)p + (y+1)p^2 - (x^2 - 2y - 1)p^3 + (y+1)p^4 + (1-x)p^5 + p^6, \\ P_2 &= 1 + (x-y+1)q + (x^3 - 3xy - 2y - x + 1)q^2 - \\ &\quad - (y^2 - 2x^3 + 4xy + 4y + x^2 + 2x - 1)q^3 + \\ &\quad + (x^3 - 3xy - 2y - x + 1)q^4 + (x-y+1)q^5 + q^6, \end{aligned}$$

а отличные от нуля коэффициенты K_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned} K_{00} &= 1, \quad K_{10} = 1, \quad K_{01} = x + 1, \quad K_{02} = x + 1, \quad K_{11} = -x^2 + x + y + 2, \\ K_{03} &= 1, \quad K_{12} = -x^2 + x + 1, \quad K_{21} = y + 1, \quad K_{31} = 1 - x, \quad K_{13} = 1 - x, \\ K_{22} &= -x^2 + xy + y + 2x + 1, \quad K_{41} = 1, \quad K_{23} = y + 1, \quad K_{32} = -x^2 + x + 1, \\ K_{33} &= -x^2 + x + y + 2, \quad K_{42} = x + 1, \quad K_{34} = 1, \quad K_{43} = x + 1, \quad K_{44} = 1. \end{aligned}$$

Используя порождающую формулу

$$U_{m,n}(x, y) = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial^m \partial^n} (F^{G_2}(p, q; x, y)) \Big|_{p=q=0},$$

выпишем несколько первых полиномов Чебышёва второго рода, связанных с системой корней алгебры G_2 :

$$\begin{aligned}
 U_{0,0} &= 1, \\
 U_{1,0} &= x, \\
 U_{0,1} &= y, \\
 U_{2,0} &= x^2 - x - y - 1, \\
 U_{1,1} &= -x^2 + xy + y + 1, \\
 U_{0,2} &= -x^3 + 2xy + y^2 + 2x + y, \\
 U_{3,0} &= -2xy - x - x^2 - y + x^3, \\
 U_{2,1} &= -y + x + x^2 - y^2 - x^3 + x^2y, \\
 U_{1,2} &= 2x^2 - x - 1 - x^4 + x^2y + x^3 + y^2 + xy^2, \\
 U_{0,3} &= -2x^3y + 4xy^2 + 3y^2 + 4xy + 2y - x^3 - x^2 + x^4 - 2x^2y + y^3, \\
 U_{4,0} &= y^2 + 2y + x - 3x^2y - x^2 - x^3 + x^4, \\
 U_{3,1} &= 2x^3 - 2y^2 - 2x - 2y + x^2y + x^3y - 2xy^2 - 2xy - x^4 + x^2, \\
 U_{2,2} &= 1 + 2x^3 - 2y^2 - x - x^5 - y^3 - x^2y + 2x^3y - 2xy^2 - 4xy + \\
 &\quad + x^2y^2 + 2x^4 - 4x^2, \\
 U_{1,3} &= -4x^3 + y^2 + 2x + 2x^5 + y^3 + 4x^2y - 4x^3y + 4xy^2 + 6xy + 3x^2y^2 - \\
 &\quad - 2x^4y + xy^3 - 2x^4 + 2x^2, \\
 U_{0,4} &= -1 + 2x^3 + 4y^2 - x - 2y - x^5 + 5y^3 + 6x^2y - 2x^3y + xy^2 + \\
 &\quad + 2xy - 2x^4y - 3x^3y^2 + 6xy^3 - 3x^4 + 3x^2 + x^6 + y^4.
 \end{aligned}$$

С точностью до обозначений эти полиномы совпадают с полиномами, найденными из рекуррентных соотношений в работе [23].

Представленный вывод производящей функции опирался только на явное определение полиномов Чебышёва посредством формулы характеров Вейля и не использовал рекуррентные соотношения. Поскольку такие соотношения предоставляют несколько новых возможностей, закончим работу следующими замечаниями.

Рекуррентные соотношения для полиномов Чебышёва нескольких переменных удобнее всего получать из формулы умножения (8), в которой суммирование в правой части распространяется на все элементы группы Вейля, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{s}$ – векторы в пространстве фундаментальных весов с неотрицательными целыми компонентами $\mathbf{s} = (m, n)$. В случае двух переменных, полагая $\mathbf{k}$ в этом пространстве сначала $\mathbf{k} = (1, 0)$, затем $\mathbf{k} = (0, 1)$ и используя приведенные выше формулы действия генераторов группы Вейля на фундаментальные веса, получаем в удобной нормировке

$$\begin{aligned}
 xU_{m,n} &= U_{m+1,n} + U_{m-1,n+1} + U_{m+2,n-1} + U_{m-2,n+1} + U_{m+1,n-1} + U_{m-1,n}, \\
 yU_{m,n} &= U_{m,n+1} + U_{m+3,n-1} + U_{m-3,n+2} + U_{m+3,n-2} + U_{m-3,n+1} + U_{m,n-1}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Соотношения (19) можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 U_{m,n} &= (x-1)U_{m-1,n} - (y+1)U_{m-2,n} + (x^2-1-2y)U_{m-3,n} - \\
 &\quad - (y+1)U_{m-4,n} + (x-1)U_{m-5,n} - U_{m-6,n}, \\
 U_{m,n} &= (-x+y-1)U_{m,n-1} - (x^3-x+1-3xy-2y)U_{m,n-2} + \\
 &\quad + (-2x^3+x^2+2x-1+4xy+4y+y^2)U_{m,n-3} + \\
 &\quad + (x^3-x+1-3xy-2y)U_{m,n-4} - (-x+y-1)U_{m,n-5} + U_{m,n-6},
 \end{aligned} \tag{20}$$

в котором у каждого из них изменяется только один индекс. В отличие от случая полиномов Чебышёва двух переменных, ассоциированных с алгеброй Ли A_2 [24], переход от соотношений (19) к (20) не очевиден.

Как показано в работе [1], форма соотношений (20) тесно связана с видом полиномов P_1 , P_2 , стоящих в знаменателе производящей функции (18). Точнее, эти полиномы являются характеристическими полиномами матриц $M_1^\pm$, $M_2^\pm$. Отсюда немедленно вытекают рекуррентные соотношения в форме (20), которые легко переписать в матричной форме

$$U_{m,n} = U_m M_x^n V_0, \quad U_{m,n} = U_n M_y^n V_0, \quad (21)$$

где U_m и U_n – следующие вектор-строки:

$$\begin{aligned} U_m &= (U_{5,n}, -U_{4,n}, U_{3,n}, -U_{2,n}, U_{1,n}, U_{0,n}), \\ U_n &= (U_{m,5}, -U_{m,4}, U_{m,3}, -U_{m,2}, U_{m,1}, U_{m,0}), \end{aligned}$$

V_0 – вектор-столбец

$$V_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T,$$

матрицы M_x , M_y имеют вид

$$\begin{aligned} M_x &= \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(y+1) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2-1-2y & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(y+1) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_y &= \begin{pmatrix} -x+y-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(x^3-x+1-3xy-2y) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2x^3+x^2+2x-1+4xy+4y+y^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(x^3-x+1-3xy-2y) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x+y-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а полиномы P_1 , P_2 являются минимальными полиномами для этих матриц. Приведенные выше соотношения (21) можно использовать как для несколько иного вывода производящих функций, так и для других целей, например для вычисления полиномов с отрицательными индексами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Интегрируемые спинные цепочки, теория представлений и многочлены Чебышёва³⁾

Созданный ленинградской школой Л. Д. Фаддеева квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) [26], [27], лежащий в основе теории квантовых групп [28]–[30], привел к появлению алгебраических методов построения и решения многочисленных квантовых интегрируемых систем. Основой решения таких моделей в рамках КМОЗ

³⁾Приводимый ниже текст базируется на записях, сделанных одним из авторов (Е. В. Дама-скинским) при подготовке и обсуждении с П. П. Кулишом его докладов на ряде конференций (см., например, [25], [4]).

служит R -матрица, являющаяся решением уравнения Янга–Бакстера. Наиболее известный результат в этом направлении – алгебраическая трактовка знаменитой одномерной модели Гейзенберга изотропной цепочки спина $1/2$ ($XXX_{1/2}$ -модель). Свойства симметрии квантовых систем исследуются с привлечением представлений соответствующих групп и квантовых групп. Это используется, в частности, при исследовании спектральных свойств интегралов движения квантовых систем, например при доказательстве полноты собственных векторов в XXX -модели Гейзенберга [31].

При изучении интегрируемых систем часто возникают ортогональные многочлены, связанные с представлениями групп симметрии. В интересующих нас случаях описание соответствующих моделей связано с привлечением двух алгебр.

1. В случае $XXX_{1/2}$ -цепочки это алгебра Ли $sl(2)$ и групповая алгебра $\mathbb{C}[S^N]$ симметрической группы S^N . Вследствие двойственности Шура–Вейля эти алгебры являются симметризаторами друг друга при действии на пространстве состояний. Алгеброй динамической симметрии является янгян $\mathcal{Y}(sl(2))$ – бесконечномерная алгебра, содержащая все динамические наблюдаемые системы.

2. В случае анизотропной $XXZ_{1/2}$ -модели гамильтониан инвариантен относительно квантовой алгебры $sl_q(2)$, тогда как при действии на пространстве состояний ее симметризатором является алгебра Темперли–Либа $TL_N(q)$ [32], [33].

3. Гамильтониан XXZ_1 -модели инвариантен относительно алгебры Ли $sl(3)$, а симметризатором является алгебра Брауера [34], [35] (в деформированном варианте – алгебра Бирмана–Венцеля–Мураками [36], [37]).

Обобщение на старшие спины требует определения централизаторов алгебры симметрии гамильтониана соответствующей квантовой модели.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением наиболее простого случая $XXX_{1/2}$ -цепочки Гейзенберга. Гамильтониан этой модели (с периодическими граничными условиями) имеет вид

$$\begin{aligned} H_{XXX_{1/2}} &= \sum_{k=1}^N (\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + (\sigma_k^z \sigma_{k+1}^z - 1)) = \\ &= 2 \sum_{k=1}^N (\mathcal{P}_{k,k+1} - I_{k,k+1}) = \sum_{k=1}^N H_{k,k+1} \end{aligned} \quad (22)$$

и действует в пространстве состояний $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^N \mathbb{C}_k^2$ размерности 2^N . Здесь σ_k^* – матрицы Паули в узле k , $\mathcal{P}_{k,k+1}$ – (4×4) -матрица перестановки, связывающая два фактора в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

Симметрия модели описывается трехмерной алгеброй $sl(2)$ с генераторами

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma^z, \quad X^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma^x + i\sigma^y, \quad X^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma^x - i\sigma^y. \quad (23)$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует единственное представление V_n алгебры $sl(2)$ размерности $n+1$. Все конечномерные представления $sl(2)$ вполне приводимы. Конечномерные неприводимые представления V_m алгебры $sl(2)$ индексируются неотрицательными целыми числами $m = 0, 1, 2, \dots$ и $\dim V_m = m+1$. В представлении V_m имеется базис $e_m, e_{m-2}, \dots, e_{-m}$, состоящий из собственных векторов генератора

$h: he_k = ke_k$, $X^\pm e_k \simeq e_{k\pm 2}$ с вектором старшего веса $e_m: X^+ e_m = 0$ и вектором младшего веса $e_{-m}: X^- e_{-m} = 0$. В случае тривиального представления V_0 ($k = 0$) имеем $X^+ \mapsto 0$, $X^- \mapsto 0$, $h \mapsto 0$, а в случае фундаментального представления V_1 ($k = 1$) генераторы реализуются матрицами Паули (23).

Глобальное действие $sl(2)$ на $\mathcal{H}$ описывается генераторами

$$S^z = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sigma_m^z, \quad S^\pm = \sum_{m=1}^N \sigma_m^\pm, \quad \text{где } \sigma_m^* = \mathbf{I}^{m-1} \otimes \sigma^* \otimes \mathbf{I}^{N-m},$$

тогда как $\mathbb{C}[S_N]$ реализуется операторами перестановки $\mathcal{P}(v \otimes w) = (w \otimes v)$, $v, w \in \mathbb{C}^2$. В соответствии с двойственностью Шура–Вейля действия этих групп коммутируют и они являются централизаторами друг друга.

Гамильтониан модели обладает следующими важными свойствами:

- 1) *локальность*: $H_X X X_{1/2} = \sum_{k=1}^N H_{k,k+1}$;
- 2) *$sl(2)$ -инвариантность*: $[H_{k,k+1}, S^z] = [H_{k,k+1}, S^\pm] = 0$;
- 3) *интегрируемость*: гамильтониан принадлежит полному набору взаимно коммутирующих операторов, действующих на $\mathcal{H}$, что обусловлено наличием у модели R -матрицы; это свойство позволяет вычислить точно все существенные физические величины.

Несмотря на сравнительную простоту этой модели, она воспроизводит все основные свойства реальных магнитных материалов.

Операции тензорного произведения и прямой суммы представлений $V_m \otimes V_n$ и $V_k \oplus V_l$ связаны соотношением Клебша–Гордана

$$V_m \otimes V_n = V_{m+n} \oplus V_{m+n-2} \oplus \cdots \oplus V_{|m-n|}. \quad (24)$$

Характерная особенность этого соотношения состоит в том, что тензорное произведение любых двух неприводимых представлений не содержит кратностей.

Отметим, что многие соотношения для представлений алгебры $sl(2)$ воспроизводятся соотношениями для полиномов Чебышёва второго рода $U_n(x)$ с единичным коэффициентом у старшего члена

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta}, \quad x = 2 \cos \theta. \quad (25)$$

Правая часть этого равенства является следом элемента $e^{i\theta h}$ в представлении V_n :

$$\pi_n: sl(2) \rightarrow \text{End } V_n, \quad U_n(x) = \text{tr}_{V_n} e^{i\theta \pi_n(h)}. \quad (26)$$

Вычисляя след оператора $e^{i\theta \pi(h)}$ по пространствам, участвующим в разложении

$$V_1 \otimes V_m = V_{m+1} \oplus V_{m-1}, \quad (27)$$

получаем рекуррентное соотношение

$$xU_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), \quad U_0(x) = 1, \quad U_{-1}(x) = 0, \quad (28)$$

для многочленов Чебышёва второго рода.

Разложение тензорной степени фундаментального неприводимого представления V_1 имеет вид

$$(V_1)^{\otimes p} = \bigoplus_{n=p \pmod{2}} V_n \otimes \mathbb{C}^{m(p;n)}, \quad (29)$$

где кратность $m(p; n)$, т. е. число раз, которое неприводимое представление V_n встречается в разложении в прямую сумму, равна

$$m(p; n) = \frac{p!(n+1)}{((p-n)/2)!((p+n+2)/2)!}. \quad (30)$$

Это соотношение соответствует разложению мономов x^p по многочленам $U_n(x)$:

$$x^p = \sum_{n=p \pmod{2}}^p m(p; n) U_n(x). \quad (31)$$

При четном $p = 2k$ коэффициент

$$m(2k; 0) = \frac{(2k)!}{(k+1)!k!} = \frac{1}{k+1} C_{2k}^k = C_k \quad (32)$$

есть число Каталана, определяющее число скаляров (инвариантов) в тензорном произведении $V_1^{\otimes 2k}$.

Отметим, что в работе [38] показано, что существуют квантовые алгебры $U_q(N)$ с конечномерными представлениями, удовлетворяющие соотношениям (24), (29), (27), у которых размерность V_1 равна N , а $\dim V_m = U_m(N)$.

Аналогичная ситуация имеет место в случае алгебры $sl(3)$ (XX_1 -модель). Пусть $V_{m,n}$ – конечномерное неприводимое представление алгебры $sl(3)$, соответствующее старшему весу $\mu = m\lambda_1 + n\lambda_2$, где λ_1 и λ_2 – фундаментальные веса.

Разложение тензорных произведений представления $V_{m,n}$ на фундаментальные неприводимые представления $V_{1,0}$ и $V_{0,1}$ имеет вид

$$\begin{aligned} V_{1,0} \otimes V_{m,n} &= V_{m+1,n} \oplus V_{m-1,n+1} \oplus V_{m,n-1}, \\ V_{0,1} \otimes V_{m,n} &= V_{m,n+1} \oplus V_{m+1,n-1} \oplus V_{m-1,n}. \end{aligned} \quad (33)$$

При взятии следа от соотношений (33) получаем соотношения на размерности представлений

$$\begin{aligned} 3 \cdot d_{m,n} &= d_{m+1,n} + d_{m-1,n+1} + d_{m,n-1}, \\ 3 \cdot d_{m,n} &= d_{m,n+1} + d_{m+1,n-1} + d_{m-1,n}. \end{aligned} \quad (34)$$

Заменив размерности представлений $V_{1,0}$ и $V_{0,1}$ на параметры x и y , получаем рекуррентные соотношения для многочленов Чебышёва двух переменных [5], [6]

$$\begin{aligned} xU_{m,n}(x, y) &= U_{m+1,n}(x, y) + U_{m-1,n+1}(x, y) + U_{m,n-1}(x, y), \\ yU_{m,n}(x, y) &= U_{m,n+1}(x, y) + U_{m+1,n-1}(x, y) + U_{m-1,n}(x, y) \end{aligned} \quad (35)$$

с начальными условиями $U_{0,0}(x, y) = 1$, $U_{1,0}(x, y) = x$, $U_{0,1}(x, y) = y$ и $U_{j,k}(x, y) = 0$ при $j < 0$ или $k < 0$. Эти полиномы удовлетворяют свойству симметрии $U_{m,n}(x, y) = U_{n,m}(y, x)$.

Подобное рассмотрение в случае алгебры $sl(n+1)$ приводит к определению обобщенных полиномов Чебышёва $U_{m_1, \dots, m_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ [21].

Список литературы

- [1] Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, М. А. Соколов, *О вычислении производящих функций обобщенных полиномов Чебышёва нескольких переменных*, препринт 13/2014, ПОМИ, СПб., 2014.
- [2] E. V. Damaskinsky, P. P. Kulish, M. A. Sokolov, “On calculation of generating functions of Chebyshev polynomials in several variables”, *J. Math. Phys.*, **56**:6 (2015), 063507, 11 pp., arXiv: 1502.08000.
- [3] М. А. Соколов, “Производящие функции полиномов Чебышёва трех переменных”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*. 23, Зап. научн. сем. ПОМИ, **433**, ПОМИ, СПб., 2015, 246–259, arXiv: 1502.08027.
- [4] P. P. Kulish, “Integrable spin chains and representation theory”, *Symmetries and Groups in Contemporary Physics*, Proceedings of the XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics (Tianjin, China, 20–26 August, 2012), Nankai Series in Pure, Applied Mathematics and Theoretical Physics, **11**, eds. C. Bai, J.-P. Gazeau, M.-L. Ge, World Sci., Singapore, 2013, 487–492.
- [5] Т. Н. Коорнвиндер, “Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators. I”, *Indag. Math.*, **77**:1 (1974), 48–58; “Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators. II”, **77**:1 (1974), 59–66; “Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators. III”, **77**:4 (1974), 357–369; “Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators. IV”, **77**:4 (1974), 370–381.
- [6] П. К. Суетин, *Ортогональные многочлены по двум переменным*, Наука, М., 1988.
- [7] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1979.
- [8] Т. J. Rivlin, *The Chebyshev Polynomials*, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [9] B. N. Ryland, H. Z. Munthe-Kaas, “On multivariate Chebyshev polynomials and spectral approximations on triangles”, *Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations*, v. 76 (Trondheim, Norway, June 22–26, 2009), Lecture Notes in Computer Science and Engineering, eds. J. S. Hesthaven, E. M. Rønquist, Springer, Berlin, 2011, 19–41.
- [10] B. Shapiro, M. Shapiro, “On eigenvalues of rectangular matrices”, *Тр. МИАН*, **267** (2009), 258–265.
- [11] P. Alexandersson, B. Shapiro, “Around a multivariate Schmidt–Spitzer theorem”, *Linear Algebra Appl.*, **446** (2014), 356–368.
- [12] П. П. Кулиш, В. Д. Ляховский, О. В. Постнова, “Функция кратностей для тензорных степеней модулей алгебры A_n ”, *ТМФ*, **171**:2 (2012), 283–293.
- [13] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, O. V. Postnova, “Tensor power decomposition. B_n -case”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **343**:1 (2012), 012095, 7 pp.
- [14] В. Д. Ляховский, “Многочлены Чебышёва от многих переменных в терминах сингулярных элементов”, *ТМФ*, **175**:3 (2013), 419–428.
- [15] G. von Gehlen, S. Roan, “The superintegrable chiral Potts quantum chain and generalized Chebyshev polynomials”, *Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory*, v. 35, NATO Science Series, eds. S. Pakuliak, G. Von Gehlen, Springer, Berlin, 2001, 155–172.
- [16] G. von Gehlen, “Onsager’s algebra and partially orthogonal polynomials”, *Internat. J. Modern Phys. B*, **16**:14n15 (2002), 2129–2136.
- [17] В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, “Осциллятор Чебышёва–Коорнвиндера”, *ТМФ*, **175**:3 (2013), 765–772.
- [18] V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, “The algebra of two dimensional generalized Chebyshev–Koornwinder oscillator”, *J. Math. Phys.*, **55**:10 (2014), 103505, 23 pp.

- [19] G. J. Heckman, “Root systems and hypergeometric functions. II”, *Compositio Math.*, **64**:3 (1987), 353–373.
- [20] M. E. Hoffman, W. D. Withers, “Generalized Chebyshev polynomials associated with affine Weyl groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **308**:1 (1988), 91–104.
- [21] R. J. Beerends, “Chebyshev polynomials in several variables and the radial part Laplace–Beltrami operator”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **328**:2 (1991), 779–814.
- [22] A. Klimyk, J. Patera, “Orbit functions”, *SIGMA*, **2** (2006), 006, 60 pp.
- [23] V. D. Lyakhovsky, Ph. V. Uvarov, “Multivariate Chebyshev polynomials”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:12 (2013), 125201, 22 pp.
- [24] K. B. Dunn, R. Lidl, “Generalizations of the classical Chebyshev polynomials to polynomials in two variables”, *Czechoslovak Math. J.*, **32**:4 (1982), 516–528.
- [25] P. P. Kulish, “Models solvable by Bethe ansatz”, *J. Gen. Lie Theory Appl.*, **2**:3 (2008), 190–200.
- [26] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи. I”, *ТМФ*, **40**:2 (1979), 194–220.
- [27] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform methods. Recent developments”, *Integrable Quantum Field Theories* (Tvärminne, Finland, 23–27 March, 1981), Lecture Notes in Physics, **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, Springer, Berlin, 61–119.
- [28] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, “Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордон и высшие представления”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*. 2, т. 101, Зап. научн. сем. ЛОМИ, Наука, Л., 1981, 101–110.
- [29] V. G. Drinfeld, “Quantum groups”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berkeley, CA, August 3–11, 1986), ed. A. M. Gleason, AMS, Providence, RI, 1987, 798–820.
- [30] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантование групп Ли и алгебр Ли”, *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178–206.
- [31] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*. IV, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **109**, Наука, Л., 1981, 134–178.
- [32] H. N. V. Temperley, E. H. Lieb, “Relations between the ‘percolation’ and ‘colouring’ problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the ‘percolation’ problem”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **322**:1549 (1971), 251–280.
- [33] P. P. Martin, *Potts Models and Related Problems in Statistical Mechanics*, Series on Advances in Statistical Mechanics, **5**, World Sci., Singapore, 1991.
- [34] R. Brauer, “On algebras which are connected with the semisimple continuous groups”, *Ann. Math. (2)*, **38**:4 (1937), 857–872.
- [35] H. Wenzl, “On the structure of Brauer’s centralizer algebras”, *Ann. Math.*, **128**:1 (1988), 173–193.
- [36] J. S. Birman, H. Wenzl, “Braids, link polynomials and a new algebra”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **313**:1 (1989), 249–273.
- [37] J. Murakami, “The Kauffman polynomial of links and representation theory”, *Osaka J. Math.*, **24**:4 (1987), 745–758.
- [38] P. P. Kulish, “On spin systems related to the Temperley–Lieb algebra”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:38 (2003), L489–L493.