Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Багарелло, Краткий обзор исследований псевдобозонов, псевдофермионов и родственных им частиц, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 2, 315–332

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9284>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 02:51:14

© 2017 г.

Ф. Багарелло^{*†}

КРАТКИЙ ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПСЕВДОБОЗОНОВ, ПСЕВДОФЕРМИОНОВ И РОДСТВЕННЫХ ИМ ЧАСТИЦ

Дан обзор некоторых основных определений и нескольких недавно установленных фактов, касающихся $\mathcal{D}$ -псевдобозонов и псевдофермионов. Обсуждается расширенная версия псевдофермионов, основанная на биортогональном базисе, который существует в конечномерном гильбертовом пространстве. Подробно описаны некоторые примеры.

Ключевые слова: псевдобозоны, псевдофермионы.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9284>

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе дан обзор некоторых важных определений, относящихся к так называемым $\mathcal{D}$ -псевдобозонам ($\mathcal{D}$ -ПБ) и псевдофермионам (ПФ). Также кратко рассмотрено возможное расширение ПФ, так называемые расширенные ПФ (РПФ), которые в некотором смысле являются *интерполяцией* между ПФ и $\mathcal{D}$ -ПБ.

$\mathcal{D}$ -ПБ возникают при модификации канонического коммутационного соотношения (ККС) $[c, c^\dagger] = \mathbb{1}$, которое заменяется на похожее правило коммутации $[a, b] = \mathbb{1}$, где b не обязательно является оператором, сопряженным к a . Аналогично ПФ получаются при замене канонического антикоммутационного соотношения (КАС) $\{C, C^\dagger\} = \mathbb{1}$ и $C^2 = 0$ на $\{A, B\} = \mathbb{1}$ и $A^2 = B^2 = 0$, где также не предполагается, что B является оператором, сопряженным к A . В обоих этих случаях можно определить биортогональные наборы векторов, которые являются собственными состояниями несамосопряженных операторов типа операторов числа частиц. Можно также получить сплетающие соотношения и ввести подходящие метрические операторы, которые позволяют определить различные скалярные произведения в гильбертовом

Автор выражает признательность Palermo University и G.N.F.M. INdAM за частичную финансовую поддержку.

^{*}Dipartimento di Energia, Ingegneria dell'Informazione e Modelli Matematici, Scuola Politecnica, Università di Palermo, Palermo, Italy. E-mail: fabio.bagarello@unipa.it

[†]INFN, Sezione di Napoli, Napoli, Italy

пространстве, в котором действуют указанные операторы. Конечно, в случае $\mathcal{D}$ -ПБ это гильбертово пространство является бесконечномерным, а для ПФ это просто $\mathbb{C}^2$. Как показано ниже, РПФ являются не просто результатом некоторого обобщения коммутационных или антикоммутационных соотношений, а строятся начиная с двух биортогональных базисов в некотором конечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_M$, где $M = \dim(\mathcal{H}_M)$. В частности, при $M = 2$ конструкция порождает снова ПФ. С другой стороны, если $M > 2$, то получим нечто другое. Общей чертой всех РПФ при любом значении M является возможность ввести и использовать подходящие повышающие и понижающие операторы, определяемые с помощью базисов пространства $\mathcal{H}_M$.

Следует также упомянуть, что $\mathcal{D}$ -ПБ, ПФ и РПФ появляются в конкретных физических моделях, предлагаемых на протяжении многих лет (см. примеры в работе [1] и в цитирующихся там работах), которые имеют отношение к так называемой PT -и псевдоэрмитовой квантовой механике [2], [3]. Заметим также, что аналогичные деформации ККС, КАС и др. рассматривались на протяжении многих лет несколькими другими авторами (см., например, [4], [5]).

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 дан обзор некоторых фактов, касающихся $\mathcal{D}$ -ПБ. ПФ рассмотрены в разделе 3, а в разделе 4 рассмотрены РПФ, основанные на биортогональных базисах. Выводы приводятся в разделе 5, в статье также приведены явные физические приложения.

2. $\mathcal{D}$ -ПБ: $\dim(\mathcal{H}) = \infty$

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и соответствующей нормой $\| \cdot \|$. Иногда полезно предположить, что $\mathcal{H}$ – *максимальное* пространство, т.е. если для данного вектора f (в общем случае принадлежащего некоторому векторному пространству $\mathcal{V}$, большему, чем $\mathcal{H}$) скалярное произведение $\langle f, g \rangle$ хорошо определено для всех $g \in \mathcal{H}$, то вектор f также должен обязательно принадлежать пространству $\mathcal{H}$. Так, например, происходит в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (см. [6]), но это неверно, если считать $\mathcal{H}$ замкнутым подпространством большего гильбертова пространства $\mathcal{H}_l$, наделенного некоторым скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ подпространства $\mathcal{H}$: в этом случае, вообще говоря, тот факт, что $\langle f, g \rangle$ хорошо определено для всех $g \in \mathcal{H}$, не препятствует тому, чтобы f являлся элементом $\mathcal{H}_l$, не обязательно принадлежащим подпространству $\mathcal{H}$. Это предположение было особенно полезным в работе [7] в связи с бикогерентными состояниями.

Пусть a и b – два оператора в $\mathcal{H}$ с областями определения $D(a)$ и $D(b)$ соответственно, $a^\dagger$ и $b^\dagger$ – их сопряженные операторы, и пусть $\mathcal{D}$ – плотное подпространство пространства $\mathcal{H}$ такое, что $a^\# \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ и $b^\# \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$, где $x^\#$ означает x или $x^\dagger$. Конечно, $\mathcal{D} \subseteq D(a^\#)$ и $\mathcal{D} \subseteq D(b^\#)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Операторы (a, b) являются $\mathcal{D}$ -псевдобозонными, если для всех $f \in \mathcal{D}$ выполняется соотношение

$$abf - baf = f. \quad (2.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно представить, что области определения операторов $a^\#$ и $b^\#$ имеют отношение к нашей ситуации. Действительно, в частном случае, когда $b = a^\dagger$, псевдобозонные операторы суть не что иное, как обычные операторы

рождения и уничтожения, подчиняющиеся ККС, которые, как хорошо известно, неограничены. Следовательно, их можно задать только на соответствующих областях определения. Ситуация не изменится, по крайней мере, в данном аспекте, если заменить ККС на соотношение (2.1).

Расширим теперь обычное построение, хорошо известное для ККС $[c, c^\dagger] = \mathbb{1}$, на наш случай. Для бозонов известно, что вакуум e_0 существует, аннигилируется оператором c , $ce_0 = 0$, и находится в области определения всех степеней $c^\dagger$. Тогда можно построить набор векторов пространства $\mathcal{H}$, $e_n = (1/\sqrt{n!})(c^\dagger)^n e_0$, $n \geq 0$, которые все находятся в области определения оператора числа частиц $N_0 := c^\dagger c$: $N_0 e_n = n e_n$. Набор $\mathcal{F}_e = \{e_n, n \geq 0\}$ является ортонормированным базисом пространства $\mathcal{H}$. Если фиксировать $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, то каждый e_n является хорошо известной функцией $e_n(x)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, множестве C^∞ функций, которые убывают (вместе с их производными) быстрее любой обратной степени [8].

При замене ККС на соотношение (2.1) нет оснований полагать априори, что эта ситуация не изменится. Поэтому нужно наложить некоторые разумные условия, проверенные на явных моделях и воспроизводящие хорошо известные бозонные соотношения при $b = a^\dagger$. В частности, мы исходим из следующих предположений.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ $\mathcal{D}$ -PB1. *Существует ненулевой вектор $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ такой, что $a\varphi_0 = 0$.*

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ $\mathcal{D}$ -PB2. *Существует ненулевой вектор $\Psi_0 \in \mathcal{D}$ такой, что $b^\dagger \Psi_0 = 0$.*

Очевидно, поскольку подпространство $\mathcal{D}$ устойчиво относительно действия введенных выше операторов, то $\varphi_0 \in D^\infty(b) := \bigcap_{k \geq 0} D(b^k)$ и $\Psi_0 \in D^\infty(a^\dagger)$, так что можно задать векторы

$$\varphi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}} b^n \varphi_0, \quad \Psi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n} \Psi_0, \quad n \geq 0, \quad (2.2)$$

которые все принадлежат подпространству $\mathcal{D}$. Тогда они также принадлежат областям определения операторов $a^\sharp$, $b^\sharp$ и $N^\sharp$, где $N = ba$. Мы видим, что с практической точки зрения $\mathcal{D}$ является естественным пространством, в котором можно работать, и в этом смысле оно даже важнее, чем $\mathcal{H}$. Положим $\mathcal{F}_\Psi = \{\Psi_n, n \geq 0\}$ и $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_n, n \geq 0\}$. Легко получить следующие понижающие и повышающие соотношения:

$$\begin{aligned} b\varphi_n &= \sqrt{n+1} \varphi_{n+1}, & n \geq 0, \\ a\varphi_0 &= 0, \quad a\varphi_n = \sqrt{n} \varphi_{n-1}, & n \geq 1, \\ a^\dagger \Psi_n &= \sqrt{n+1} \Psi_{n+1}, & n \geq 0, \\ b^\dagger \Psi_0 &= 0, \quad b^\dagger \Psi_n = \sqrt{n} \Psi_{n-1}, & n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

а также уравнения на собственные значения

$$N\varphi_n = n\varphi_n, \quad N^\dagger \Psi_n = n\Psi_n, \quad n \geq 0.$$

В частности, как следствие этих двух последних уравнений, выбрав нормировку векторов φ_0 и Ψ_0 так, что $\langle \varphi_0, \Psi_0 \rangle = 1$, получим

$$\langle \varphi_n, \Psi_m \rangle = \delta_{n,m} \quad (2.4)$$

для всех $n, m \geq 0$. Следовательно, $\mathcal{F}_\Psi$ и $\mathcal{F}_\varphi$ биортогональны. Легко видеть, что если $b = a^\dagger$, то $\varphi_n = \Psi_n = e_n$ (если отождествить a и c), так что биортогональность замещается более простой ортонормированностью. Кроме того, часть уравнений в (2.3) вырождаются и остается только один оператор числа частиц, поскольку в этом случае $N = N^\dagger$.

Аналогия с обычными бозонами предлагает рассмотреть следующие предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ D-PB3. *Набор $\mathcal{F}_\varphi$ является базисом пространства $\mathcal{H}$.*

Это аналогично требованию того, чтобы $\mathcal{F}_\Psi$ был также базисом пространства $\mathcal{H}$ [9]. Однако несколько физических моделей показали, что $\mathcal{F}_\varphi$ не является базисом в $\mathcal{H}$, но все же полон в $\mathcal{H}$. Это позволяет принять следующую более слабую версию предположения D-PB3 [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ D-PBW3. *Для некоторого подпространства $\mathcal{G}$, плотного в $\mathcal{H}$, наборы $\mathcal{F}_\varphi$ и $\mathcal{F}_\Psi$ являются $\mathcal{G}$ -квазибазисами.*

Это означает, что для всех f и g из $\mathcal{G}$,

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle f, \varphi_n \rangle \langle \Psi_n, g \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle f, \Psi_n \rangle \langle \varphi_n, g \rangle, \quad (2.5)$$

это соотношение можно считать слабой формой разложения единицы, ограниченной на $\mathcal{G}$. Конечно, если вектор $f \in \mathcal{G}$ ортогонален всем φ_n или всем Ψ_n , то соотношение (2.5) означает $f = 0$. Следовательно, $\mathcal{F}_\varphi$ и $\mathcal{F}_\Psi$ полны в $\mathcal{G}$.

Для дальнейшего уточнения структуры в работе [1] предполагается существование самосопряженного обратимого оператора Θ , который вместе с Θ^{-1} оставляет инвариантным $\mathcal{D}$: $\Theta\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$, $\Theta^{-1}\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$. В этом случае будем говорить, что $(a, b^\dagger) - \Theta$ -сопряженные операторы, если $af = \Theta^{-1}b^\dagger\Theta f$, для всех $f \in \mathcal{D}$. Это разъясняет то, что происходит с ККС, когда $b = a^\dagger$ и $\Theta = \mathbb{1}$. Можно доказать, что если $\mathcal{F}_\varphi$ и $\mathcal{F}_\Psi - \mathcal{D}$ -квазибазис для $\mathcal{H}$, то операторы $(a, b^\dagger)$ являются Θ -сопряженными тогда и только тогда, когда $\Psi_n = \Theta\varphi_n$ для всех $n \geq 0$. Кроме того, если $(a, b^\dagger) - \Theta$ -сопряженные операторы, то $\langle f, \Theta f \rangle > 0$ для всех ненулевых $f \in \mathcal{D}$. Здесь $\Theta -$ оператор, который иногда называется *метрическим оператором*, он может быть использован для определения нового скалярного произведения в $\mathcal{D}$: $\langle f, g \rangle_\Theta = \langle f, \Theta g \rangle \forall f, g \in \mathcal{D}$.

В некоторых частных случаях предположение D-PBW3 можно заменить более сильной версией¹⁾:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ D-PBs3. *Набор $\mathcal{F}_\varphi$ является базисом Рисса пространства $\mathcal{H}$.*

В этом случае назовем наши $\mathcal{D}$ -ПБ *регулярными*. При этом в $\mathcal{H}$ существует ограниченный оператор S с ограниченным обратным оператором S^{-1} , а также ортонормированный базис $\mathcal{F}_{\hat{e}} = \{\hat{e}_n \in \mathcal{H}, n \geq 0\}$ такой, что $\varphi_n = S\hat{e}_n$ для всех²⁾ $n \geq 0$.

¹⁾Заметим, что буквы s и w в названиях предположений D-PBs3 и D-PBw3 означают соответственно *сильную* и *слабую* версии. Конечно, если справедливо предположение D-PBs3, предположения D-PB3 и D-PBw3 удовлетворяются автоматически.

²⁾Каждый вектор $\hat{e}_n$ можно отождествить с векторами e_n , полученными в начале этого раздела из ККС. Действительно, даже если $\hat{e}_n \neq e_n$, можно все же ввести унитарный оператор U такой, что $e_n = U\hat{e}_n$. Тогда $\varphi_n = S\hat{e}_n = SUe_n = S_Ue_n$, и оператор $S_U = SU$ будет ограничен вместе с обратным оператором. Поэтому с самого начала предположим, что $U = \mathbb{1}$.

Тогда, в силу единственности базиса, биортогонального к $\mathcal{F}_\varphi$, ясно, что $\mathcal{F}_\Psi$ также является базисом Рисса для $\mathcal{H}$ и что $\Psi_n = (S^{-1})^\dagger \hat{e}_n$. Следовательно, оператор Θ , обладающий требуемыми свойствами, можно ввести по формуле $\Theta := (S^\dagger S)^{-1}$, по крайней мере в том случае, когда $\mathcal{D}$ устойчиво по отношению к действию обоих операторов $S^\sharp$ и $(S^\sharp)^{-1}$. Ясно, что оператор Θ также ограничен вместе с обратным оператором, он также самосопряженный, положительный и $\Psi_n = \Theta \varphi_n$ для всех $n \geq 0$. Оба оператора Θ и Θ^{-1} можно представить в виде (бесконечной) суммы операторов первого ранга. Действительно, применив дираковские обозначения бра- и кет-векторов получим

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|, \quad \Theta^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|. \quad (2.6)$$

Конечно, как $|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$, так и $|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$ не являются проекторами³⁾, поскольку в общем случае нормы операторов Ψ_n и φ_n не равны единице. Выписанные ряды равномерно сходятся при выполнении условий предположения **D-PBs3** и не сходятся равномерно, если выполнены условия ослабленных версий этого предположения (предположение **D-PB3** или **D-PBw3**). Явные примеры S приводятся в работе [1]. В большинстве этих случаев $S^\sharp$ и $(S^\sharp)^{-1}$ отображают $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$, как и предполагалось. Следовательно, $e_n \in \mathcal{D}$ для всех n . Ситуация технически осложняется, если заменить предположение **D-PBs3** более слабой версией **D-PBw3**. В этом случае, как показано в работе [1], также можно ввести оператор S и ортонормированный базис $\mathcal{F}_e$. Однако S , или S^{-1} , или оба оператора будут неограничены.

Соотношения между понижающими и повышающими операторами (2.3) для $\varphi_n = S e_n$ можно выразить через e_n следующим образом:

$$S^{-1} a S e_n = \sqrt{n} e_{n-1}, \quad S^{-1} b S e_n = \sqrt{n+1} e_{n+1} \quad (2.7)$$

для всех $n \geq 0$. Заметим, что мы положили $e_{-1} \equiv 0$. Тогда первое уравнение в (2.7) указывает на возможность ввести оператор c , действующий на $\mathcal{D}$ следующим образом: $c f = S^{-1} a S f$. Конечно, если взять $f = e_n$, то снова получим (2.7). Кроме того, простые вычисления показывают, что оператор $c^\dagger$ удовлетворяет равенству $c^\dagger f = S^{-1} b S f$, $f \in \mathcal{D}$, которое после подстановки $f = e_n$ обращается во второе из равенств (2.7). Эти операторы удовлетворяют ККС на $\mathcal{D}$: $[c, c^\dagger] f = f$ для любого $f \in \mathcal{D}$. Из этого следует, что операторы a и b связаны с канонической парой c и $c^\dagger$ отображением подобия S в $\mathcal{D}$, которое может быть либо ограничено вместе со своим обратным отображением, либо неограничено. Подробные математические выкладки можно найти в работе [1].

D-ПБ появляются в нескольких физических моделях, возникающих в PT -квантовой (PT -инвариантной) механике, но не только в них. Например, гамильтониан несамосопряженного квантового гармонического осциллятора и гамильтониан в моделях Свансона, кроме прочего, можно выразить через $\mathcal{D}$ -псевдобозонные операторы a и b . Несколько таких физических приложений можно найти в работе [1], одно из них мы кратко рассмотрим в п. 2.1. Другие приложения, включая наиболее новые, приводятся в работах [10]–[12].

³⁾Здесь $(|f\rangle\langle f|)g = \langle f, g\rangle f$ для всех $f, g \in \mathcal{H}$.

2.1. Несколько замечаний о бикогерентных состояниях. Хорошо известно, что бозонный оператор уничтожения c допускает несколько собственных состояний, помеченных комплексной переменной z . Эти собственные состояния называются *когерентными состояниями*: пусть $W(z) = e^{zc^\dagger - \bar{z}c}$, стандартным когерентным состоянием называется вектор

$$\Phi(z) = W(z)e_0 = e^{-|z|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k!}} e_k. \quad (2.8)$$

Здесь c и $c^\dagger$ – операторы, удовлетворяющие ККС, а $\mathcal{F}_e$ – ортонормированный базис, связанный с этими операторами, как и ранее: $ce_0 = 0$ и $e_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (c^\dagger)^n e_0$, $n \geq 0$. Вектор $\Phi(z)$ хорошо определен и нормирован для всех $z \in \mathbb{C}$. Это просто следует из того, что $W(z)$ унитарен, или, иначе, из того, что $\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{k,l}$. Кроме того,

$$c\Phi(z) = z\Phi(z), \quad \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2z |\Phi(z)\rangle \langle \Phi(z)| = \mathbb{1}. \quad (2.9)$$

Также хорошо известно, что вектор $\Phi(z)$ насыщает соотношение неопределенностей Гейзенберга, которое не будет обсуждаться далее в этой статье.

Здесь нам представляется интересным показать, что семейство векторов $\{\Phi(z), z \in \mathbb{C}\}$ можно обобщить некоторым способом, сохраняющим аналогичные свойства, и что это обобщение связано с рассматриваемыми $\mathcal{D}$ -псевдобозонными операторами a и b .

Грубо говоря, благодаря связи $(c, c^\dagger)$ с (a, b) или с $(b^\dagger, a^\dagger)$ ожидается, что можно заменить $W(z)$ на один из следующих операторов:

$$U(z) = e^{zb - \bar{z}a}, \quad V(z) = e^{za^\dagger - \bar{z}b^\dagger}. \quad (2.10)$$

Конечно, если $a = b^\dagger$, то $U(z) = V(z)$, так что оператор является унитарным и по сути совпадает с $W(z)$, отождествляя a с c . Однако здесь представляет интерес случай, когда $a \neq b^\dagger$. Это усложняет ситуацию, поскольку в этом случае ни $U(z)$, ни $V(z)$ не являются, вообще говоря, ограниченными, по крайней мере при $z \neq 0$. Тем не менее в работе [13] найдены условия того, чтобы векторы

$$\varphi(z) = U(z)\varphi_0, \quad \Psi(z) = V(z)\Psi_0, \quad (2.11)$$

были хорошо определены в $\mathbb{C}$. Векторы $(\varphi(z), \Psi(z))$ называются бикогерентными состояниями по причине, которая прояснится ниже. Конечно, это означает только то, что φ_0 принадлежит области определения $U(z)$, $\varphi_0 \in D(U(z))$, и что $\Psi_0 \in D(V(z))$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Это было доказано при некоторых предположениях для норм векторов φ_n и Ψ_n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что существуют четыре постоянные $r_\varphi, r_\psi > 0$ и $0 \leq \alpha_\varphi, \alpha_\psi < 1/2$ такие, что $\|\varphi_n\| \leq r_\varphi^n (n!)^{\alpha_\varphi}$ и $\|\Psi_n\| \leq r_\psi^n (n!)^{\alpha_\psi}$ для всех $n \geq 0$. Тогда для всех $z \in \mathbb{C}$ имеем $\varphi_0 \in D(U(z))$ и $\Psi_0 \in D(V(z))$. Кроме того, $\varphi(z) \in D(a)$, $\Psi(z) \in D(b^\dagger)$, и имеем $a\varphi(z) = z\varphi(z)$ и $b^\dagger\Psi(z) = z\Psi(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Наконец, если $\mathcal{F}_\varphi$ и $\mathcal{F}_\Psi$ – биортгональные базисы в $\mathcal{H}$, то*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2z \langle f, \varphi(z) \rangle \langle \Psi(z), g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2z \langle f, \Psi(z) \rangle \langle \varphi(z), g \rangle \quad (2.12)$$

для всех $f, g \in \mathcal{H}$. Если $\mathcal{F}_\varphi$ и $\mathcal{F}_\Psi$ являются $\mathcal{D}$ -квазибазисами, то уравнение (2.12) остается справедливым, но только для $f, g \in \mathcal{D}$.

Доказательство первого утверждения главным образом основано на равномерной сходимости рядов $\sum (z^k/\sqrt{k!}) \varphi_k$ и $\sum (z^k/\sqrt{k!}) \psi_k$, которая допускается приведенными выше ограничениями на $\|\varphi_n\|$ и $\|\Psi_n\|$. Дополнительные результаты, относящиеся к бикогерентным состояниям, можно найти в работе [7], а об их использовании при квантовании можно прочесть в работе [14].

2.2. Физическое приложение $\mathcal{D}$ -ПБ. Пример, который мы хотим здесь обсудить, был предложен в работах [15], [16] и затем рассмотрен в работе [17]. Будем исходить из следующего очевидно несамосопряженного гамильтониана:

$$H = (p_1^2 + x_1^2) + (p_2^2 + x_2^2 + 2ix_2) + 2\epsilon x_1 x_2, \quad (2.13)$$

где ϵ – действительная постоянная, причем $\epsilon \in]-1, 1[$, а самосопряженные операторы x_j и p_k подчиняются правилу $[x_j, p_k] = i\delta_{j,k} \mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ – тождественный оператор на $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Все остальные коммутаторы равны нулю.

Чтобы переписать H в более удобной форме, введем следующие обозначения (см. [16]):

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\sqrt[4]{1+\epsilon\xi}} \left((ip_1 + \sqrt{1+\epsilon\xi} x_1) + \xi(ip_2 + \sqrt{1+\epsilon\xi} x_2) + i \frac{\xi}{\sqrt{1+\epsilon\xi}} \right), \\ a_2 &= \frac{1}{2\sqrt[4]{1-\epsilon\xi}} \left((ip_1 + \sqrt{1-\epsilon\xi} x_1) - \xi(ip_2 + \sqrt{1-\epsilon\xi} x_2) - i \frac{\xi}{\sqrt{1-\epsilon\xi}} \right), \\ b_1 &= \frac{1}{2\sqrt[4]{1+\epsilon\xi}} \left((-ip_1 + \sqrt{1+\epsilon\xi} x_1) + \xi(-ip_2 + \sqrt{1+\epsilon\xi} x_2) + i \frac{\xi}{\sqrt{1+\epsilon\xi}} \right), \\ b_2 &= \frac{1}{2\sqrt[4]{1-\epsilon\xi}} \left((-ip_1 + \sqrt{1-\epsilon\xi} x_1) - \xi(-ip_2 + \sqrt{1-\epsilon\xi} x_2) - i \frac{\xi}{\sqrt{1-\epsilon\xi}} \right), \end{aligned}$$

где $\xi = \pm 1$. Мы видим, что $b_j \neq a_j^\dagger$ и что

$$[a_j, b_k] = \delta_{j,k} \mathbb{1}, \quad (2.14)$$

по крайней мере формально, другие коммутаторы равны нулю. Тогда H можно представить в виде

$$H = H_1 + H_2 + \frac{1}{1-\epsilon^2} \mathbb{1}, \quad H_1 = \sqrt{1+\epsilon\xi}(2N_1 + \mathbb{1}), \quad H_2 = \sqrt{1-\epsilon\xi}(2N_2 + \mathbb{1}),$$

где $N_j := b_j a_j$.

Можно проверить справедливость двумерных версий предположений **D-PB1**, **D-PB2** и **D-PB3** (или **D-PBw3**). Для этого сначала надо найти плотное подпространство $\mathcal{D}$ пространства $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$, которое устойчиво по отношению к действию операторов a_j, b_j и сопряженных им. Кроме того, подпространство $\mathcal{D}$ должно также содержать два вакуума операторов a_j и $b_j^\dagger$, если они существуют. Следовательно, с практической точки зрения удобно сначала искать решение уравнений

$$a_1 \varphi_{0,0}(x_1, x_2) = a_2 \varphi_{0,0}(x_1, x_2) = 0, \quad b_1^\dagger \Psi_{0,0}(x_1, x_2) = b_2^\dagger \Psi_{0,0}(x_1, x_2) = 0.$$

Поскольку $p_j = -i(\partial/\partial x_j)$, это просто двумерные дифференциальные уравнения, которые можно легко решить. В результате получим

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0}(x_1, x_2) &= N \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha_+ (x_1^2 + x_2^2) - k_- x_1 - k_+ x_2 - \xi \alpha_- x_1 x_2 \right\}, \\ \Psi_{0,0}(x_1, x_2) &= N' \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha_+ (x_1^2 + x_2^2) + k_- x_1 + k_+ x_2 - \xi \alpha_- x_1 x_2 \right\},\end{aligned}\quad (2.15)$$

где

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \epsilon \xi} \pm \sqrt{1 - \epsilon \xi}), \quad k_- = \frac{-i \xi \alpha_-}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad k_+ = \frac{i \alpha_+}{\sqrt{1 - \epsilon^2}},$$

N и N' – нормировочные постоянные, фиксированные требованием $\langle \varphi_{0,0}, \Psi_{0,0} \rangle = 1$. Указанное скалярное произведение конечно, поскольку $\alpha_+ > 0$, так что $\varphi_{0,0}(x_1, x_2), \Psi_{0,0}(x_1, x_2) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$. В действительности как $\varphi_{0,0}(x_1, x_2)$, так и $\Psi_{0,0}(x_1, x_2)$ принадлежат множеству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, которое мы отождествляем с множеством $\mathcal{D}$ из раздела 2. По-видимому, это хороший выбор. Действительно, кроме того, что $\varphi_{0,0}(x_1, x_2), \Psi_{0,0}(x_1, x_2) \in \mathcal{D}$, подпространство $\mathcal{D}$ также устойчиво по отношению к действию операторов a_j, b_j и сопряженных им.

На этом этапе можно построить, как обычно, функции

$$\begin{aligned}\varphi_{n_1, n_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} b_1^{n_1} b_2^{n_2} \varphi_{0,0}(x_1, x_2), \\ \Psi_{n_1, n_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} a_1^{\dagger n_1} a_2^{\dagger n_2} \Psi_{0,0}(x_1, x_2)\end{aligned}$$

и соответствующие множества $\mathcal{F}_{\varphi} = \{\varphi_{n_1, n_2}(x_1, x_2), n_j \geq 0\}$, $\mathcal{F}_{\Psi} = \{\Psi_{n_1, n_2}(x_1, x_2), n_j \geq 0\}$. Ясно, что $\varphi_{n_1, n_2}(x_1, x_2)$ и $\Psi_{n_1, n_2}(x_1, x_2)$ отличаются от $\varphi_{0,0}(x_1, x_2)$ и $\Psi_{0,0}(x_1, x_2)$ на некоторый полином по x_1 и x_2 . Следовательно, они являются функциями в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, как и ожидалось.

Теперь нужно проверить, являются ли $\mathcal{F}_{\varphi}$ и $\mathcal{F}_{\Psi}$ базисами в $\mathcal{H}$. Это, в принципе, не очевидно. Проверить полноту обоих этих наборов в $\mathcal{H}$ намного проще, но мы знаем, что полнота некоторого неортогонального набора не означает, что этот набор является также и базисом. Следуя работе [15], определим неограниченный, самосопряженный и обратимый оператор $T = \exp\{\frac{1}{1-\epsilon^2}(p_2 - \epsilon p_1)\}$. Тогда простые расчеты показывают, что

$$THT^{-1} = (p_1^2 + x_1^2) + (p_2^2 + x_2^2) + 2\epsilon x_1 x_2 + \frac{1}{1-\epsilon^2} =: h. \quad (2.16)$$

Ясно, что при $H \neq H^{\dagger}$ имеет место $h = h^{\dagger}$. В работе [17] показано, что T и T^{-1} плотно определены. Действительно, обе их области определения $D(T)$ и $D(T^{-1})$ содержат линейную оболочку собственных состояний $e_{n_1, n_2}(x_1, x_2)$ оператора h , которые образуют ортонормированный базис в $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Кроме того [17], $\mathcal{F}_{\varphi}$ и $\mathcal{F}_{\Psi}$ являются $\mathcal{D}$ -квазибазисами, но не являются базисами. Это последнее утверждение основано на следующей оценке для $\|\Psi_{n_1, n_2}\|^2 = \|\varphi_{n_1, n_2}\|^2$ при больших n_1 и n_2 и ненулевых $\hat{\delta}_j$:

$$\|\Psi_{n_1, n_2}\|^2 \simeq \frac{1}{4\pi(4n_1 n_2 \hat{\delta}_1^2 \hat{\delta}_2^2)^{1/4}} e^{\sqrt{8(n_1 \hat{\delta}_1^2 + n_2 \hat{\delta}_2^2)}},$$

которая, очевидно, расходится для расходящегося ряда n_j . Здесь $\hat{\delta}_j$ – два (ненулевых) числа, заданных в процессе построения h из H [17]. Поэтому, обозначив через P_{n_1, n_2} оператор, заданный по формуле $P_{n_1, n_2}(f) = \langle \Psi_{n_1, n_2}, f \rangle \varphi_{n_1, n_2}$, приходим к выводу, что $\|P_{n_1, n_2}\| = \|\varphi_{n_1, n_2}\| \|\Psi_{n_1, n_2}\| \rightarrow \infty$ при $n_j \rightarrow \infty$. Следовательно, $\mathcal{F}_\varphi$ и $\mathcal{F}_\Psi$ не могут быть базисами пространства $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ [18].

Теперь возьмем оператор $\Theta := T^2$. Ясно, что оператор Θ^{-1} существует и что он, вместе с Θ , оставляет инвариантным подпространство $\mathcal{D}$. При этом $\Psi_{n_1, n_2} = \Theta \varphi_{n_1, n_2}$, поэтому, как отмечалось выше, $(a_j, b_j^\dagger)$ оказываются Θ -сопряженными, а Θ является положительным оператором. Кроме того, можно установить сплетающее соотношение $N_j f = \Theta^{-1} N_j^\dagger \Theta f$, $f \in \mathcal{D}$.

3. ПФ: DIM($\mathcal{H}$)=2

В этом разделе мы рассмотрим аналогичную деформацию другого очень известного и полезного коммутационного соотношения и покажем, какого рода результаты можно получить. В частности, мы увидим, что эти результаты отражают то, что мы уже нашли для $\mathcal{D}$ -ПБ, с тем преимуществом, что ввиду простоты системы не нужно совсем никаких предположений. Самих деформированных КАС достаточно для того, чтобы получить два биортогональных набора для двумерного гильбертова пространства $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Конечно, эти два набора автоматически являются базисами в $\mathcal{H}$, поэтому нет причин использовать их слабую версию. Исходной точкой в этом разделе является модификация КАС $\{C, C^\dagger\} = CC^\dagger + C^\dagger C = \mathbb{1}$, $\{C, C\} = 0$ между двумя операторами C и $C^\dagger$, действующими в двумерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Заменяем КАС следующими правилами [19]:

$$\{a, b\} = \mathbb{1}, \quad \{a, a\} = 0, \quad \{b, b\} = 0, \quad (3.1)$$

в этом случае интересная ситуация возникает при $b \neq a^\dagger$. Следуя тому, что было сделано для $\mathcal{D}$ -ПБ, укажем, что прежде всего нам могут потребоваться следующие предположения:

- 1) существует такой ненулевой вектор φ_0 в $\mathcal{H}$, что $a \varphi_0 = 0$;
- 2) существует такой ненулевой вектор Ψ_0 в $\mathcal{H}$, что $b^\dagger \Psi_0 = 0$.

Действительно, существование этих двух нетривиальных векторов гарантировано тем, что ввиду (3.1) необходимо условие $\det(a) = \det(b^\dagger) = 0$. Следовательно, ядра операторов a и $b^\dagger$ нетривиальны.

Теперь можно воспроизвести результаты, аналогичные полученным для $\mathcal{D}$ -ПБ. В частности, введем сначала ненулевые векторы

$$\varphi_1 := b \varphi_0, \quad \Psi_1 = a^\dagger \Psi_0, \quad (3.2)$$

а также несамосопряженные операторы

$$N = ba, \quad N^\dagger = a^\dagger b^\dagger. \quad (3.3)$$

Конечно, бессмысленно рассматривать $b^n \varphi_0$ или $a^{\dagger n} \Psi_0$ для $n \geq 2$, поскольку все эти векторы автоматически нулевые. Это аналогично тому, что происходит в случае обычных фермионов. Введем теперь самосопряженные операторы S_φ и S_Ψ по их

действию на вектор общего положения $f \in \mathcal{H}$:

$$S_\varphi f = \sum_{n=0}^1 \langle \varphi_n, f \rangle \varphi_n, \quad S_\Psi f = \sum_{n=0}^1 \langle \Psi_n, f \rangle \Psi_n. \quad (3.4)$$

Они похожи на операторы Θ и Θ^{-1} в (2.6). Однако теперь нет проблемы существования S_φ и S_Ψ , а также их областей определения, поскольку суммы в (3.4) конечны. Конечно, это сильно отличается от того, что нужно было делать для $\mathcal{D}$ -ПБ. Теперь очень легко получить следующие результаты, частично похожие на результаты для $\mathcal{D}$ -ПБ.

1. $a\varphi_1 = \varphi_0$, $b^\dagger \Psi_1 = \Psi_0$.
2. $N\varphi_n = n\varphi_n$, $N^\dagger \Psi_n = n\Psi_n$, $n = 0, 1$.
3. Если нормировки φ_0 и Ψ_0 выбраны таким образом, что $\langle \varphi_0, \Psi_0 \rangle = 1$, то

$$\langle \varphi_k, \Psi_n \rangle = \delta_{k,n}, \quad k, n = 0, 1.$$

4. S_φ и S_Ψ ограничены, строго положительны, самосопряженные и обратимые. Они удовлетворяют условиям

$$\|S_\varphi\| \leq \|\varphi_0\|^2 + \|\varphi_1\|^2, \quad \|S_\Psi\| \leq \|\Psi_0\|^2 + \|\Psi_1\|^2, \\ S_\varphi \Psi_n = \varphi_n, \quad S_\Psi \varphi_n = \Psi_n, \quad n = 0, 1,$$

а также $S_\varphi = S_\Psi^{-1}$ и следующим сплетающим соотношениям:

$$S_\Psi N = N^\dagger S_\Psi, \quad S_\varphi N^\dagger = N S_\varphi. \quad (3.5)$$

Приведенные формулы показывают, что: 1) N и $N^\dagger$ ведут себя как (неэрмитовы) операторы числа фермионов, имеющие (действительные) собственные числа 0 и 1; 2) связанные с ними собственные векторы являются векторами в $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1\}$ и $\mathcal{F}_\Psi = \{\Psi_0, \Psi_1\}$ соответственно; 3) a и $b^\dagger$ – понижающие операторы для $\mathcal{F}_\varphi$ и $\mathcal{F}_\Psi$ соответственно; 4) b и $a^\dagger$ – повышающие операторы для $\mathcal{F}_\varphi$ и $\mathcal{F}_\Psi$ соответственно; 5) два набора $\mathcal{F}_\varphi$ и $\mathcal{F}_\Psi$ являются биортонормированными; 6) очень хорошо ведущие себя операторы S_φ и S_Ψ отображают $\mathcal{F}_\varphi$ в $\mathcal{F}_\Psi$ и наоборот; 7) S_φ и S_Ψ сплетаются с операторами, которые не являются самосопряженными, так же как их аналоги для $\mathcal{D}$ -ПБ.

В отличие от сделанного в разделе 2, теперь ясна причина, по которой нам не нужно множество $\mathcal{D}$. Действительно, нам не нужно налагать никаких условий на возможность вычисления, например, $b\varphi_0$, которые были нужны в случае $\mathcal{D}$ -ПБ. В самом деле, на двумерный вектор всегда можно подействовать квадратной (2×2) -матрицей! Другими словами, нет проблем с областями определения. Также нет необходимости в проверке (или требовании) предположения $\mathcal{D}$ -PB3, поскольку оно автоматически удовлетворяется: будучи биортогональными, и векторы из $\mathcal{F}_\varphi$, и векторы из $\mathcal{F}_\Psi$ линейно независимы. Следовательно, φ_0 и φ_1 – два линейно независимых вектора в двумерном гильбертовом пространстве, так что $\mathcal{F}_\varphi$ – базис в $\mathcal{H}$. Очевидно, такие же рассуждения можно провести и для $\mathcal{F}_\Psi$. Ниже мы покажем, что эти наборы являются также базисами Рисса. Это утверждение является следствием следующей теоремы, которая указывает на связь между ПФ и обычными фермионами.

ТЕОРЕМА 1. Пусть c и $T = T^\dagger$ – два оператора в $\mathcal{H}$ такие, что $\{c, c^\dagger\} = \mathbb{1}$, $c^2 = 0$, и $T > 0$. Тогда операторы

$$a = TcT^{-1}, \quad b = Tc^\dagger T^{-1} \quad (3.6)$$

удовлетворяют правилам (3.1). Наоборот, для двух операторов a и b , действующих на $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ и удовлетворяющих (3.1), можно ввести два оператора c и T такие, что $\{c, c^\dagger\} = \mathbb{1}$, $c^2 = 0$, при этом оператор $T = T^\dagger$ строго положителен и справедливы соотношения (3.6).

Первым следствием этой теоремы является то, что, поскольку $\mathcal{F}_\varphi$ – просто образ ортонормированного базиса $\mathcal{F}_e$, полученный с помощью ограниченного оператора с ограниченным обратным, $S_\Psi^{-1/2}$, $\mathcal{F}_\varphi$ является базисом Рисса, как утверждалось ранее. Вторым следствием является то, что, вводя самосопряженный оператор числа частиц для фермионных операторов $N_0 := c^\dagger c$, можно связать его как с N , так и с $N^\dagger$:

$$N = S_\Psi^{-1/2} N_0 S_\Psi^{1/2}, \quad N^\dagger = S_\Psi^{1/2} N_0 S_\Psi^{-1/2}. \quad (3.7)$$

Эти соотношения можно переписать в виде следующих сплетающих соотношений: $S_\Psi^{1/2} N_0 = N^\dagger S_\Psi^{1/2}$, $S_\Psi^{1/2} N = N_0 S_\Psi^{1/2}$. Совмещая эти уравнения, можно воспроизвести соотношения (3.5).

Аналогичную связь можно установить между бозонами и $\mathcal{D}$ -ПБ. Однако ввиду существенной роли неограниченных операторов в этом случае не удивительно, что формулировка аналога теоремы 1 намного длиннее и доказательство намного труднее. Подробности можно найти в работе [1].

3.1. Некоторые примеры. В работе [20] был проанализирован эффективный несамосопряженный гамильтониан, связанный с псевдоэрмитовыми системами, описывающий двухуровневый атом, взаимодействующий с электромагнитным полем. В работе [19] показано, что эту модель вполне естественно представить в терминах псевдоэрмитовых операторов и что описанная ранее структура возникает естественным образом. Исходным является уравнение Шредингера

$$i\dot{\Phi}(t) = H_{\text{eff}}\Phi(t), \quad H_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\delta & \bar{\omega} \\ \omega & i\delta \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где δ – действительная величина, связанная со скоростью распада для двухуровневой системы, а комплексный параметр ω характеризует взаимодействие атома с излучением. Ясно, что $H_{\text{eff}} \neq H_{\text{eff}}^\dagger$. Удобно представить $\omega = |\omega|e^{i\theta}$. Теперь введем операторы

$$a = \frac{1}{2\Omega} \begin{pmatrix} -|\omega| & -e^{-i\theta}(\Omega + i\delta) \\ e^{i\theta}(\Omega - i\delta) & |\omega| \end{pmatrix}, \quad b = \frac{1}{2\Omega} \begin{pmatrix} -|\omega| & e^{-i\theta}(\Omega - i\delta) \\ -e^{i\theta}(\Omega + i\delta) & |\omega| \end{pmatrix}.$$

Здесь параметр $\Omega = \sqrt{|\omega|^2 - \delta^2}$, по нашему предположению, является действительным и строго положительным. Непосредственными вычислениями получим

$\{a, b\} = \mathbb{1}$, $a^2 = b^2 = 0$. Следовательно, a и b являются псевдофермионными операторами. Кроме того, H_{eff} можно выразить через эти операторы следующим образом: $H_{\text{eff}} = \Omega(ba - (1/2)\mathbb{1})$.

Чтобы воспроизвести псевдофермионную структуру, надо сначала найти ненулевой вектор φ_0 , который аннигилирует с оператором a , и затем ненулевой вектор Ψ_0 , который аннигилирует с оператором $b^\dagger$. Эти векторы имеют вид

$$\varphi_0 = k \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{e^{i\theta}(\Omega - i\delta)}{|\omega|} \end{pmatrix}, \quad \Psi_0 = k' \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{e^{i\theta}(\Omega + i\delta)}{|\omega|} \end{pmatrix},$$

где k и k' – нормировочные константы, которые частично фиксируются требованием

$$\langle \varphi_0, \Psi_0 \rangle = \bar{k}k' \left(1 + \frac{1}{|\omega|^2} (\Omega + i\delta)^2 \right) = 1.$$

Введем также векторы

$$\varphi_1 = b\varphi_0 = k \begin{pmatrix} \frac{i\delta - \Omega}{|\omega|} \\ -e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad \Psi_1 = a^\dagger \Psi_0 = k' \begin{pmatrix} \frac{-i\delta - \Omega}{|\omega|} \\ -e^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

Теперь легко проверить, что $\mathcal{F}_\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1\}$ и $\mathcal{F}_\Psi = \{\Psi_0, \Psi_1\}$ – биортонормированные базисы в $\mathcal{H}_{\text{eff}}$, и можно также проверить, что

$$H_{\text{eff}}\varphi_0 = -\frac{\Omega}{2}\varphi_0, \quad H_{\text{eff}}\varphi_1 = \frac{\Omega}{2}\varphi_1, \quad H_{\text{eff}}^\dagger\Psi_0 = -\frac{\Omega}{2}\Psi_0, \quad H_{\text{eff}}^\dagger\Psi_1 = \frac{\Omega}{2}\Psi_1,$$

поэтому операторы H_{eff} и $H_{\text{eff}}^\dagger$ изоспектральны, как и ожидалось. Кроме того, найдем операторы

$$S_\varphi = 2|k|^2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{-i\delta}{|\omega|} e^{-i\theta} \\ \frac{i\delta}{|\omega|} e^{i\theta} & 1 \end{pmatrix}, \quad S_\Psi = \frac{|\omega|^2}{2|k|^2\Omega^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i\delta}{|\omega|} e^{-i\theta} \\ \frac{-i\delta}{|\omega|} e^{i\theta} & 1 \end{pmatrix},$$

которые оказываются взаимно обратными. Они также являются положительно-определенными матрицами, как и должно быть. Используя теперь теорему 1, определим с помощью $S_\varphi^{\pm 1/2}$ два стандартных фермионных оператора c и $c^\dagger$ и связанный с ними оператор числа частиц $N_0 = c^\dagger c$ исходя из a и b . Отсюда можно легко найти

$$H_{\text{eff}} = S_\varphi^{1/2} h S_\varphi^{-1/2},$$

где $h = \Omega(c^\dagger c - (1/2)\mathbb{1})$ – самосопряженный оператор. Это указывает на то, что гамильтониан H_{eff} аналогичен самосопряженному оператору.

В работе [21] приводятся другие примеры и показано, что с помощью предложенного формализма можно проанализировать следующие гамильтонианы:

$$H_{\text{BG}} = \begin{pmatrix} re^{i\theta} & se^{i\phi} \\ te^{-i\phi} & re^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

где все r, s, t, θ и ϕ – действительные ненулевые величины (см. [22]). Другим интересным гамильтонианом является [23]

$$H_{\text{GMM}} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - i\Gamma_1 & \nu_0 \\ \nu_0 & \epsilon_2 - i\Gamma_2 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

где Γ_1 и Γ_2 – положительные величины, ϵ_1 и ϵ_2 – действительные величины, а ν_0 – комплексная величина. Еще один гамильтониан, соответствующий нашей конструкции, впервые был рассмотрен в работе [24]:

$$H_{\text{MO}} = E \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

где $\theta, \phi \in \mathbb{C}$, $\text{Re } \theta \in [0, \pi)$, и $\text{Re } \phi \in [0, \pi)$. Все эти операторы были рассмотрены в работе [21] в связи с РТ-квантовой механикой.

4. РПФ: $1 \leq \dim(\mathcal{H}) < \infty$

Данный раздел начнем не с некоторого (анти)коммутационного соотношения, а с того, что возьмем целое число $M \geq 0$ и соответствующий набор $M + 1$ линейно независимых векторов $\mathcal{F}_M^{(h)}$: $\mathcal{F}_M^{(h)} = \{h_0^{(M)}, h_1^{(M)}, \dots, h_M^{(M)}\}$. Заметим, что мы не требуем ортонормируемости этого набора. Однако $\mathcal{F}_M^{(h)}$, конечно, является базисом $(M + 1)$ -мерного гильбертова пространства $\mathcal{H}_M$, линейной оболочки этих векторов.

Теперь покажем, каким образом можно ввести в игру довольно общую алгебраическую процедуру, порождающую некоторые обобщенные повышающие и понижающие операторы, с целью породить в пространстве $\mathcal{H}_M$ новое семейство векторов $\mathcal{F}_M^{(g)} = \{g_0^{(M)}, g_1^{(M)}, \dots, g_M^{(M)}\}$, которые биортогональны векторам из $\mathcal{F}_M^{(h)}$, и как использовать это семейство для построения некоторых семейств сплетающих операторов. Таким образом мы, в некоторой степени, расширяем результаты раздела 3, поэтому полученные здесь возбуждения назовем РПФ. Подробности наших построений, а также обсуждение физических ситуаций, в которых впервые вводятся РПФ, можно найти в работе [25].

Прежде всего очевидно, что набор $\mathcal{F}_0^{(g)}$ просто совпадает с $\mathcal{F}_0^{(h)}$, за исключением, быть может, нормировочного множителя: действительно, если задать

$$g_0^{(0)} := \frac{1}{\|h_0^{(0)}\|^2} h_0^{(0)},$$

то $\langle g_0^{(0)}, h_0^{(0)} \rangle = 1$. Оба набора являются базисами в одномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$.

Интереснее ситуация при $M = 1$. В этом случае введем два ограниченных оператора a_1 и b_1 по их действию на базис $\mathcal{F}_1^{(h)}$:

$$a_1 h_0^{(1)} := 0, \quad a_1 h_1^{(1)} := h_0^{(1)}, \quad \text{и} \quad b_1 h_0^{(1)} := h_1^{(1)}, \quad b_1 h_1^{(1)} := 0. \quad (4.1)$$

Действие операторов a_1 и b_1 на вектор общего положения $f \in \mathcal{H}_1$ можно легко получить, используя линейность, поскольку $f = c_0 h_0^{(1)} + c_1 h_1^{(1)}$ с соответствующими коэффициентами c_0 и c_1 . Например, $a_1 f = c_1 h_0^{(1)}$. Из (4.1) видно, что a_1 и b_1 действуют на набор $\mathcal{F}_1^{(h)}$ как понижающий и повышающий операторы. Из этого определения получим, что

$$a_1^2 = 0, \quad b_1^2 = 0, \quad \{a_1, b_1\} = \mathbb{1}_1, \quad (4.2)$$

где $\mathbb{1}_1$ – тождественный оператор на $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^2$. Это в точности псевдофермионные антикоммутиационные соотношения, рассмотренные в разделе 3 (см. (3.1)), поэтому построение, предложенное там, можно повторить и здесь. Биортогональный базис $\mathcal{F}_1^{(g)}$ можно построить, рассмотрев сначала ненулевой вектор $g_0^{(1)}$, ортогональный вектору $h_1^{(1)}$. Такой вектор, конечно, существует, поскольку $\dim(\mathcal{H}_1) = 2$. Кроме того, всегда можно выбрать его нормировку следующим образом: $\langle g_0^{(1)}, h_0^{(1)} \rangle = 1$. Легко проверить, что $g_0^{(1)}$ является вакуумом для $b_1^\dagger$: $b_1^\dagger g_0^{(1)} = 0$. Действительно, взяв вектор общего положения $f \in \mathcal{H}_1$ и вспомнив, что вектор f представим в виде $f = c_0 h_0^{(1)} + c_1 h_1^{(1)}$ для некоторых комплексных c_0 и c_1 , с помощью (4.1) получим, что $\langle f, b_1^\dagger g_0^{(1)} \rangle = \bar{c}_0 \langle h_1^{(1)}, g_0^{(1)} \rangle = 0$. Теперь наше утверждение следует из произвольности f .

Введем теперь вектор $g_1^{(1)} := a_1^\dagger g_0^{(1)}$. Поскольку

$$\langle g_1^{(1)}, h_0^{(1)} \rangle = \langle g_0^{(1)}, a_1 h_0^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle g_1^{(1)}, h_1^{(1)} \rangle = \langle g_0^{(1)}, a_1 h_1^{(1)} \rangle = \langle g_0^{(1)}, h_0^{(1)} \rangle = 1,$$

приходим к выводу, что набор $\mathcal{F}_1^{(g)} = \{g_0^{(1)}, g_1^{(1)}\}$ является биортонормированным по отношению к базису $\mathcal{F}_1^{(h)}$. Эти два набора являются собственными состояниями операторов $N_1^\dagger = a_1^\dagger b_1^\dagger$ и $N_1 = b_1 a_1$ соответственно:

$$N_1 h_k^{(1)} = k h_k^{(1)}, \quad N_1^\dagger g_k^{(1)} = k e_k^{(1)}, \quad k = 0, 1.$$

Кроме того, вместе они осуществляют разложение единицы в $\mathcal{H}_1$:

$$\sum_{k=0}^1 |g_k^{(1)}\rangle \langle h_k^{(1)}| = \sum_{k=0}^1 |h_k^{(1)}\rangle \langle g_k^{(1)}| = \mathbb{1}_1.$$

Можно также ввести два самосопряженных, положительных обратимых оператора

$$S_1^{(h)} = \sum_{k=0}^1 |h_k^{(1)}\rangle \langle h_k^{(1)}|, \quad S_1^{(g)} = \sum_{k=0}^1 |g_k^{(1)}\rangle \langle g_k^{(1)}|,$$

или, в более явном виде,

$$S_1^{(h)} f = \sum_{k=0}^1 \langle h_k^{(1)}, f \rangle h_k^{(1)}, \quad S_1^{(g)} f = \sum_{k=0}^1 \langle g_k^{(1)}, f \rangle g_k^{(1)},$$

для каждого $f \in \mathcal{H}_1$. Эти операторы являются взаимно обратными: $S_1^{(h)} = (S_1^{(g)})^{-1}$. Кроме того, они отображают $\mathcal{F}_1^{(g)}$ в $\mathcal{F}_1^{(h)}$ и наоборот:

$$S_1^{(h)} g_k^{(1)} = h_k^{(1)}, \quad S_1^{(g)} h_k^{(1)} = g_k^{(1)}, \quad k = 0, 1,$$

и удовлетворяют следующим сплетающим соотношениям:

$$S_1^{(g)} N_1 = N_1^\dagger S_1^{(g)}, \quad N_1 S_1^{(h)} = S_1^{(h)} N_1^\dagger.$$

Кроме того, поскольку это положительные операторы, обязательно существуют положительные квадратные корни из $S_1^{(h)}$ и $S_1^{(g)}$. Поэтому можно определить новый оператор n_1 и новые векторы $c_k^{(1)}$ следующим образом:

$$n_1 := (S_1^{(g)})^{1/2} N_1 (S_1^{(h)})^{1/2}, \quad c_k^{(1)} := (S_1^{(g)})^{1/2} h_k^{(1)}, \quad k = 0, 1.$$

Легко проверить, что n_1 является самосопряженным оператором в $\mathcal{H}_1$ и что $\mathcal{F}_1^{(c)} = \{c_0^{(1)}, c_1^{(1)}\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_1$, и при этом $n_1 c_k^{(1)} = k c_k^{(1)}$, $k = 0, 1$.

Аналогичную процедуру можно повторить и для $\mathcal{H}_2$. Однако в этом случае теряются соотношения (4.2), но основные аспекты функциональной структуры все же сохраняются. Не исключено также, что можно найти другие коммутационные или антикоммутационные соотношения, которые воспроизводят похожие результаты. Как и ранее, исходной точкой является базис $\mathcal{F}_2^{(h)} = \{h_0^{(2)}, h_1^{(2)}, h_2^{(2)}\}$, не обязательно ортонормированный. В этом случае повышающие и понижающие операторы b_2 и a_2 задаются с помощью версии соотношения (4.1) большей размерности:

$$a_2 h_0^{(2)} := 0, \quad a_2 h_1^{(2)} := h_0^{(2)}, \quad a_2 h_2^{(2)} := \sqrt{2} h_1^{(2)}, \quad (4.3)$$

и

$$b_2 h_0^{(2)} := h_1^{(2)}, \quad b_2 h_1^{(2)} := \sqrt{2} h_2^{(2)}, \quad b_2 h_2^{(2)} := 0. \quad (4.4)$$

В этом случае $a_2^3 = b_2^3 = 0$, но $\{a_2, b_2\} \neq \mathbb{1}_2$. Тем не менее, если задать $N_2 = b_2 a_2$, получим снова $N_2 h_k^{(2)} = k h_k^{(2)}$, $k = 0, 1, 2$, поэтому векторы $h_k^{(2)}$ являются собственными состояниями оператора типа числа частиц. Биортогональный набор $\mathcal{F}_2^{(g)}$ теперь строится с помощью расширения предыдущей процедуры: начнем с вектора $g_0^{(2)}$, который ортогонален как $h_1^{(2)}$, так и $h_2^{(2)}$. Этот вектор единственный с точностью до нормировки, которую выберем такой, что $\langle g_0^{(2)}, h_0^{(2)} \rangle = 1$. Имеем $b_2^\dagger g_0^{(2)} = 0$. Определив теперь $g_1^{(2)} := a_2^\dagger g_0^{(2)}$ и $g_2^{(2)} := \frac{1}{\sqrt{2}} a_2^\dagger g_1^{(2)}$, получим

$$\langle g_j^{(2)}, h_k^{(2)} \rangle = \delta_{j,k}, \quad j, k = 0, 1, 2.$$

Следовательно, $\mathcal{F}_2^{(g)}$ и $\mathcal{F}_2^{(h)}$ являются биортогональными базисами в $\mathcal{H}_2$. Вектор $g_k^{(2)}$ является собственным состоянием оператора $N_2^\dagger$: $N_2^\dagger g_k^{(2)} = k g_k^{(2)}$, $k = 0, 1, 2$. Это можно доказать с помощью понижающего характера действия оператора $b_2^\dagger$ на $\mathcal{F}_2^{(g)}$. Действительно, кроме $b_2^\dagger g_0^{(2)} = 0$, можно также проверить, что $b_2^\dagger g_1^{(2)} = g_0^{(2)}$ и что $b_2^\dagger g_2^{(2)} = \sqrt{2} g_1^{(2)}$. Два оператора $S_2^{(h)}$ и $S_2^{(g)}$ можно определить, как и ранее, и для них можно доказать результаты, в точности аналогичные полученным для $S_1^{(h)}$ и $S_1^{(g)}$. Например, можно проверить, что $S_2^{(h)} = (S_2^{(g)})^{-1}$. Значит, то, что, по-видимому, действительно важно для таких построений, – это не антикоммутационное соотношение $\{a, b\} = \mathbb{1}$, а определение повышающего и понижающего операторов.

Для M общего положения можно провести такие же построения начиная с $\mathcal{F}_M^{(h)}$. Два оператора a_M и b_M , полученные расширением формул (4.3) и (4.4), удовлетворяют следующему свойству: $a_M^{M+1} = b_M^{M+1} = 0$. Что касается антикоммутационного соотношения, можно написать его в виде равенства

$$\{a_M, b_M\} = \sum_{k=0}^M \alpha_k^{(M)} |g_k^{(M)}\rangle \langle h_k^{(M)}|,$$

коэффициенты которого легко находятся. Например, имеем $\alpha_0^{(1)} = \alpha_1^{(1)} = 1$, $\alpha_0^{(2)} = 1$, $\alpha_1^{(2)} = 3$ и $\alpha_2^{(2)} = 2$, а также $\alpha_0^{(3)} = 1$, $\alpha_1^{(3)} = 3$, $\alpha_2^{(3)} = 5$ и $\alpha_3^{(3)} = 3$. Запишем это соотношение в матричном виде:

$$\{a_M, b_M\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2M-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & M \end{pmatrix},$$

откуда, например, положив $M = 1$, воспроизведем соотношение $\{a_M, b_M\} = \mathbb{1}_1$: $M = 1$ – единственный выбор, который дает единичную матрицу в правой части антикоммутатора $\{a_M, b_M\}$. Векторы из $\mathcal{F}_M^{(h)}$ являются собственными состояниями оператора $N_M = b_M a_M$, а векторы из биортогонального набора $\mathcal{F}_M^{(g)} = \{g_l^{(M)}, l = 0, 1, \dots, M\}$, являются собственными состояниями сопряженного оператора $N_M^\dagger$. Имеем $\langle g_l^{(M)}, h_k^{(M)} \rangle = \delta_{l,k}$.

Дальнейшие подробности, а также роль M в наших построениях изложены в работе [25]. Здесь мы только хотим отметить, что РПФ были введены в работе [25] в применении к некоммутативной квантовой механике.

5. ВЫВОДЫ

Мы показали, как можно деформировать ККС и КАС, что стандартные, самосопряженные операторы числа частиц дублируются и теряют самосопряженность, сохраняя инвариантными свои спектры. Такие деформации порождают два биортогональных набора собственных векторов этих операторов, которые могут либо формировать базисы, либо нет. Кроме того, можно получить полезные сплетающие соотношения, а также ввести другие операторы, аналогичные псевдобозонным или псевдофермионным операторам и удовлетворяющие обычным ККС и КАС.

Мы также показали, что на основе повышающих и понижающих операторов, определенных в (не)ортонормированном базисе, можно построить интересную функциональную структуру и что эта структура порождает нечто, что оказывается промежуточным между $\mathcal{D}$ -ПБ и ПФ. На первый взгляд, ценой за это является то, что эти новые операторы не подчиняются каким-либо интересным коммутационным соотношениям. Однако это утверждение в настоящее время анализируется [26], поскольку известно [27], что ортонормированный базис в конечномерном гильбертовом

пространстве (отличном от $\mathcal{H}_1$) можно получить с помощью подходящей модификации ККС. Тогда естественно задать вопрос, можно ли найти биортогональный базис в некотором пространстве $\mathcal{H}_M$ с помощью подходящей модификации псевдобозонного коммутационного соотношения (2.1).

Список литературы

- [1] F. Bagarello, “Deformed canonical (anti-)commutation relations and non-self-adjoint Hamiltonians”, *Non-Selfadjoint Operators in Quantum Physics. Mathematical Aspects*, eds. F. Bagarello, J. P. Gazeau, F. H. Szafraniec, M. Znojil, John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 2015, 121–188.
- [2] C. Bender, “Making sense of non-Hermitian Hamiltonians”, *Rep. Progr. Phys.*, **70**:6 (2007), 947–1018.
- [3] A. Mostafazadeh, “Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics”, *Internat. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **7**:7 (2010), 1191–1306.
- [4] D. A. Trifonov, “Nonlinear fermions and coherent states”, *J. Phys. A*, **45**:24 (2012), 244037, 14 pp.
- [5] Y. Maleki, “Para-Grassmannian coherent and squeezed states for pseudo-Hermitian q -oscillator and their entanglement”, *SIGMA*, **7** (2011), 084, 20 pp.
- [6] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, New York, 1974.
- [7] F. Bagarello, “ kq -Representation for pseudo-bosons, and completeness of bi-coherent states”, *J. Math. Anal. Appl.*, **450**:1 (2017), 631–646.
- [8] А. Мессиа, *Квантовая механика*, т. 1, Наука, М., 1979.
- [9] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, 2003.
- [10] F. Bagarello, “Appearances of pseudo-bosons from Black–Scholes equation”, *J. Math. Phys.*, **57**:4 (2016), 043504, 12 pp.
- [11] F. Bagarello, M. Lattuca, R. Passante, L. Rizzuto, S. Spagnolo, “Non-Hermitian Hamiltonian for a modulated Jaynes–Cummings model with PT symmetry”, *Phys. Rev. A*, **91**:4 (2015), 042134, 8 pp.
- [12] F. Bagarello, M. G. Gianfreda, “ $\mathcal{D}$ -deformed and SUSY-deformed graphene: first results”, *Non-Hermitian Hamiltonians in Quantum Physics*, Selected Contributions from the 15th International Conference on Non-Hermitian Hamiltonians in Quantum Physics (Palermo, Italy, 18–23 May, 2015), Springer Proceedings in Physics, **184**, eds. F. Bagarello, R. Passante, C. Trapani, Springer, Berlin, 2016, 97–122.
- [13] S. T. Ali, F. Bagarello, J. P. Gazeau, “ $\mathcal{D}$ -pseudo-bosons, complex Hermite polynomials, and integral quantization”, *SIGMA*, **11** (2015), 078, 23 pp.
- [14] F. Bagarello, “Intertwining operators for non-self-adjoint Hamiltonians and bicoherent states”, *J. Math. Phys.*, **57**:10 (2016), 103501, 19 pp.
- [15] C. M. Bender, H. F. Jones, “Interactions of Hermitian and non-Hermitian Hamiltonians”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:24 (2008), 244006, 8 pp.
- [16] J.-Q. Li, Q. Li, Y.-G. Miao, “Investigation of PT -symmetric Hamiltonian systems from an alternative point of view”, *Commun. Theor. Phys.*, **58**:4 (2012), 497–503.
- [17] F. Bagarello, M. Lattuca, “ $\mathcal{D}$ pseudo-bosons in quantum models”, *Phys. Lett. A*, **377**:44 (2013), 3199–3204.
- [18] E. B. Davies, *Linear Operators and Their Spectra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **106**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [19] F. Bagarello, “Linear pseudo-fermions”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:44 (2012), 444002, 12 pp.
- [20] O. Cherbai, M. Drir, M. Maamache, D. A. Trifonov, “Fermionic coherent states for pseudo-Hermitian two-level systems”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:8 (2007), 1835–1844.
- [21] F. Bagarello, F. Gargano, “Model pseudofermionic systems: connections with exceptional points”, *Phys. Rev. A*, **89**:3 (2014), 032113, 7 pp.

- [22] A. Das, L. Greenwood, “An alternative construction of the positive inner product for pseudo-Hermitian Hamiltonians: examples”, *J. Math. Phys.*, **51**:4 (2010), 042103, 11 pp.
- [23] I. Gilary, A. A. Mailybaev, N. Moiseyev, “Time-asymmetric quantum-state-exchange mechanism”, *Phys. Rev. A*, **88**:1 (2013), 010102, 5 pp.
- [24] A. Mostafazadeh, S. Özçelik, “Explicit realization of pseudo-Hermitian and quasi-Hermitian quantum mechanics for two-level systems”, *Turk. J. Phys.*, **30** (2006), 437–443.
- [25] S. T. Ali, F. Bagarello, J. P. Gazeau, “Extended pseudo-fermions from non commutative bosons”, *J. Math. Phys.*, **54**:7 (2013), 073516, 13 pp.
- [26] F. Bagarello, “Finite-dimensional pseudo-bosons: a non-Hermitian version of the truncated harmonic oscillator”, *Ann. H. Poincaré*, submitted.
- [27] H. A. Buchdahl, “Concerning a kind of truncated quantized linear harmonic oscillator”, *Am. J. Phys.*, **35**:3 (1967), 210–218.

Поступила в редакцию 5.10.2016,
после доработки 18.02.2017