Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, Преобразования Беклунда для системы Якоби на эллипсоиде, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 3, 473–488

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9286>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:54:06

© 2017 г.

А. В. Цыганов*

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЯКОБИ НА ЭЛЛИПСОИДЕ

Рассматриваются аналоги авто- и гетеропреобразований Беклунда для системы Якоби на трехосном эллипсоиде. С использованием результатов работы Вейерштрасса, в которой с помощью замены времен интегрирование уравнений движения сводится к обращению отображения Абеля, построены дифференциальные уравнения Абеля и автопреобразование Беклунда, сохраняющее скобку Пуассона, относительно которой уравнения движения в форме Вейерштрасса являются гамильтоновыми. Приводя эту скобку к каноническому виду, можно построить новую интегрируемую систему на эллипсоиде с гамильтонианом натурального вида и интегралом движения четвертой степени по импульсам.

Ключевые слова: интегрируемые системы, преобразования Беклунда, система Якоби на эллипсоиде.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9286>

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1838 г. Якоби в письме Бесселю написал: “Вчера мне удалось решить в квадратурах уравнения для геодезических линий на эллипсоиде с тремя разными осями. Это самые простые формулы на свете, интегралы Абеля, которые при совпадении осей превращаются в эллиптические”. В настоящей работе мы используем эти “самые простые формулы” для построения преобразований Беклунда соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби.

Напомним, что Якоби, используя эллиптические координаты $u_{1,2}$, свел задачу об интегрировании уравнений движения к задаче об обращении сумм интегралов Абеля

$$\int \frac{u_1 du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \int \frac{u_2 du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = \tau_1, \quad \int \frac{u_1^2 du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \int \frac{u_2^2 du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = \tau_2 \quad (1)$$

на гиперэллиптической кривой второго рода $\mathcal{C}$, задаваемой уравнением $y^2 = f(x)$ [1].

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 15-11-30007.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: andrey.tsiganov@gmail.com

Поставленная Якоби задача об обращении интегралов Абеля и нахождении явных формул для описания траекторий в терминах гиперэллиптических тета-функций была решена Вейерштрассом [2]. В этой работе Вейерштрасс использовал замену времени, которая позволила привести интегралы в (1) к стандартному виду:

$$\int \frac{du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \int \frac{du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = \sigma_1, \quad \int \frac{u_1 du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \int \frac{u_2 du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = \sigma_2. \quad (2)$$

Тем самым задача сводится к обращению отображения Абеля на якобиане гиперэллиптической кривой второго рода. Далее мы докажем, что предложенная Вейерштрассом замена времени позволяет не только явно построить решения, но и использовать отображение Абеля для построения автопреобразований Беклунда, т. е. канонических преобразований, сохраняющих не только каноническую форму гамильтоновых уравнений движения, но и форму уравнений Гамильтона–Якоби [3], [4].

Так как замена времени нарушает исходную гамильтонову структуру, то в данном случае полученное в рамках теории Абеля автопреобразование Беклунда будет иметь существенные отличия от преобразований Беклунда, полученных без использования замен времени [5]–[9]. Тем не менее после некоторой модификации это преобразование Беклунда также можно использовать для построения интегрируемых систем на эллипсоиде с интегралами движения старших степеней, т. е. для построения гетеропреобразований Беклунда, связывающих различные уравнения Гамильтона–Якоби [10]–[12].

1.1. Описание модели. Рассмотрим движение точки по поверхности двумерного эллипсоида под действием силы Гука, следуя работам Якоби, Вейерштрасса, Кноррера и Мозера [1], [2], [13]–[15].

Стандартное вложение эллипсоида в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами $q = (q_1, q_2, q_3)$ задается уравнением

$$\mathbb{E}^2 = \{q \in \mathbb{R}^3, \quad (A^{-1}q, q) = 1\}.$$

Здесь $A = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ – положительно-определенная диагональная матрица, (x, y) – скалярное произведение векторов $\mathbb{R}^3$. В задаче Якоби функция Лагранжа

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}, \dot{q}) - \frac{\alpha}{2}(q, q),$$

где α – вещественный параметр, определяет уравнения движения по поверхности эллипсоида

$$\ddot{q} = \lambda A^{-1}q - \alpha q,$$

в которых множитель Лагранжа равен

$$\lambda = -\frac{(A^{-1}\dot{q}, \dot{q})}{(A^{-2}q, q)}.$$

Введем переменные $p = \partial L / \partial \dot{q} = \dot{q}$ и перепишем уравнения движения в гамильтоновой форме:

$$\dot{q} = \{H, q\}_D = p, \quad \dot{p} = \{H, p\}_D = -\frac{(A^{-1}p, p) - \alpha}{(A^{-2}q, q)} A^{-1}q - \alpha q. \quad (3)$$

Фазовое пространство $T^*\mathbb{E}^2$ можно реализовать, наложив связи

$$F_1 = (A^{-1}q, q) - 1 = 0, \quad F_2 = (A^{-1}q, p) = 0 \quad (4)$$

на переменные $q = (q_1, q_2, q_3)$ и $p = (p_1, p_2, p_3)$ на кокасательном расслоении $T^*\mathbb{R}^3$. В уравнения (3) входит функция Гамильтона

$$H = (p, \dot{q}) - L(q, \dot{q})|_{\dot{q}=p} = \frac{1}{2}(p, p) + \frac{\alpha}{2}(q, q) \quad (5)$$

и скобка Дирака–Пуассона

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \frac{\{F_1, f\}\{F_2, g\} - \{F_1, g\}\{F_2, f\}}{\{F_1, F_2\}},$$

построенная с помощью редукции по Дираку из канонической скобки Пуассона на кокасательном расслоении $T^*\mathbb{R}^3$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Выпишем явно эту скобку для координат q_i и p_j :

$$\{q_i, q_j\}_D = 0, \quad \{p_i, p_j\}_D = -\frac{q_i p_j - q_j p_i}{a_i a_j (A^{-2}q, q)}, \quad \{q_i, p_j\}_D = \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{a_i a_j (A^{-2}q, q)}. \quad (6)$$

Согласно Якоби [1] полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби $H = E$ допускает аддитивное разделение в эллиптических координатах $u_{1,2}$, которые находятся из соотношения

$$\frac{(x - u_1)(x - u_2)x}{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)} = 1 + \frac{q_1^2}{x - a_1} + \frac{q_2^2}{x - a_2} + \frac{q_3^2}{x - a_3},$$

которое справедливо при любом x , или из выражений для исходных координат

$$q_k^2 = \frac{a_k(a_k - u_1)(a_k - u_2)}{(a_k - a_i)(a_k - a_j)},$$

в которых индексы (i, j, k) образуют одну из перестановок индексов $(1, 2, 3)$. Если ввести соответствующие моменты

$$p_{u_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1 p_1}{u_k - a_1} + \frac{q_2 p_2}{u_k - a_2} + \frac{q_3 p_3}{u_k - a_3} \right), \quad k = 1, 2,$$

то скобка Дирака–Пуассона (6) в этих координатах на кокасательном расслоении T^*E принимает каноническую форму

$$\{u_i, p_{u_j}\}_D = \delta_{ij}, \quad \{u_1, u_2\}_D = \{p_{u_1}, p_{u_2}\}_D = 0. \quad (7)$$

Следуя работе Вейерштрасса [2], положим $\alpha = -4\kappa^2$, введем обозначения

$$\varphi_k = (a_1 - u_k)(a_2 - u_k)(a_3 - u_k), \quad k = 1, 2,$$

и рассмотрим гамильтонианы

$$H_1(u, p_u) = \frac{H}{2} - \kappa^2(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{\varphi_1 u_1^{-1} p_{u_1}^2}{u_1 - u_2} + \frac{\varphi_2 u_2^{-1} p_{u_2}^2}{u_2 - u_1} - \kappa^2(u_1 + u_2),$$

$$H_2(u, p_u) = \frac{\varphi_1 u_2 u_1^{-1} p_{u_1}^2}{u_2 - u_1} + \frac{\varphi_2 u_1 u_2^{-1} p_{u_2}^2}{u_1 - u_2} + \kappa^2 u_1 u_2,$$

коммутирующие относительно скобки Дирака–Пуассона $\{ \cdot, \cdot \}_D$. Это позволит нам упростить форму разделенных уравнений

$$\Phi(u_k, p_{u_k}, H_1, H_2) = \varphi_k p_{u_k}^2 + \kappa^2 u_k^3 - H_1 u_k^2 - H_2 u_k = 0, \quad k = 1, 2, \quad (8)$$

и уравнение для соответствующей гиперэллиптической кривой второго рода

$$C: y^2 = f(x), \quad f(x) = x(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x)(-\kappa^2 x^2 + h_1 x + h_2), \quad (9)$$

отвечающей уравнениям Гамильтона–Якоби

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2. \quad (10)$$

Уравнения движения для $u_{1,2}$ относительно $H_{1,2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt_1} &= \{H_1, u_1\}_D = \frac{\sqrt{f(u_1)}}{2u_1(u_1 - u_2)}, & \frac{du_2}{dt_1} &= \{H_1, u_2\}_D = \frac{\sqrt{f(u_2)}}{2u_2(u_2 - u_1)}, \\ \frac{du_1}{dt_2} &= \{H_2, u_1\}_D = \frac{u_2 \sqrt{f(u_1)}}{2u_1(u_2 - u_1)}, & \frac{du_2}{dt_2} &= \{H_2, u_2\}_D = \frac{u_1 \sqrt{f(u_2)}}{2u_2(u_1 - u_2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из этих уравнений мы получаем квадратуры типа (1) в дифференциальной форме:

$$\frac{u_1 du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \frac{u_2 du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = 2 dt_2, \quad \frac{u_1^2 du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \frac{u_2^2 du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = 2 dt_1.$$

В работе [2] Вейерштрасс предложил произвести замену времени $dt_k \rightarrow ds_k$, приводящую исходные уравнения (11) к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{ds_1} &= \frac{\sqrt{f(u_1)}}{2(u_1 - u_2)}, & \frac{du_2}{ds_1} &= \frac{\sqrt{f(u_2)}}{2(u_2 - u_1)}, \\ \frac{du_1}{ds_2} &= \frac{u_2 \sqrt{f(u_1)}}{2(u_2 - u_1)}, & \frac{du_2}{ds_2} &= \frac{u_1 \sqrt{f(u_2)}}{2(u_1 - u_2)}, \end{aligned} \quad (12)$$

из которых можно получить квадратуры (2) в дифференциальной форме:

$$\frac{du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \frac{du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = 2 ds_2, \quad \frac{u_1 du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \frac{u_2 du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = 2 ds_1.$$

Детальное описание этого преобразования времени и решения задачи обращения отображения Абеля может быть найдено в работах [2], [13], [14].

Уравнения движения (12) являются гамильтоновыми,

$$\frac{du_k}{ds_1} = \{H_1, u_k\}_W, \quad \frac{du_k}{ds_2} = \{H_2, u_k\}_W, \quad k = 1, 2,$$

относительно скобки Пуассона

$$\{u_i, p_{u_j}\}_W = u_i \delta_{ij}, \quad \{u_1, u_2\}_W = \{p_{u_1}, p_{u_2}\}_W = 0. \quad (13)$$

Таким образом, предложенная Вейерштрассом замена времени сводится к замене исходной скобки Дирака–Пуассона (7) на совместную с ней скобку Пуассона (13).

В следующем разделе мы будем использовать уравнения Вейерштрасса (12) для построения автопреобразований Беклунда.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА

Рассмотрим интегрируемую динамическую систему на фазовом пространстве M , $\dim M = 2m$, обладающую необходимым количеством функционально независимых интегралов движения в инволюции

$$\{H_1, H_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

относительно скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$. Для этой системы можно определить уравнения Гамильтона

$$\frac{dz}{dt_k} = \{z, H_k\}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (14)$$

и уравнения Гамильтона–Якоби $H_k = h_k$. Следуя [3], [4], мы будем использовать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Автопреобразованием Беклунда называется каноническое преобразование фазового пространства $\mathcal{B}: M \rightarrow M$, сохраняющее не только каноническую форму гамильтоновых уравнений (14), но и форму уравнений Гамильтона–Якоби $H_k = h_k$.

Это определение преобразования Беклунда не вполне конструктивно, так как мы не знаем, как построить такие преобразования для конкретной интегрируемой системы.

Если для уравнения Гамильтона–Якоби известно представление Лакса, то искомое преобразование Беклунда можно реализовать в виде преобразования подобия соответствующих матриц Лакса [9], [6]. Если уравнение Гамильтона–Якоби интегрируется с помощью обращения отображения Абеля, то искомое преобразование Беклунда можно реализовать в виде конечного сдвига на якобиане соответствующей алгебраической кривой [9], [5].

Первая реализация неприменима для уравнений Гамильтона–Якоби, для которых неизвестны представления Лакса, а вторая неприменима для уравнений, интегрируемых в квадратурах Абеля, когда число степеней свободы не равно роду алгебраической кривой. Так как интегрируемые отображения, сохраняющие форму уравнений Гамильтона и уравнений Гамильтона–Якоби, для таких систем также существуют, это приводит к необходимости создания других способов построения преобразований Беклунда.

В настоящей работе мы непосредственно используем данное выше определение преобразования Беклунда для явного построения этого преобразования с помощью дифференциальных уравнений Абеля, так как эти же уравнения возникают и в случае, когда число степеней свободы не равно роду соответствующей алгебраической кривой [16].

2.1. Дифференциальные уравнения Абеля и преобразования Беклунда.

Предположим, что на кокасательном расслоении $T^*\mathbb{E}^2$ существует каноническое преобразование переменных

$$\mathcal{B}: (u_1, u_2, p_{u_1}, p_{u_2}) \leftrightarrow (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{p}_{u_1}, \tilde{p}_{u_2}), \quad (15)$$

сохраняющее форму гамильтоновых уравнений (12) и уравнений Гамильтона–Якоби (10). Это означает, что исходные переменные и их образы удовлетворяют двум дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \frac{du_2}{\sqrt{f(u_2)}} &= 2 ds_2 = \frac{d\tilde{u}_1}{\sqrt{f(\tilde{u}_1)}} + \frac{d\tilde{u}_2}{\sqrt{f(\tilde{u}_2)}}, \\ \frac{u_1 du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \frac{u_2 du_2}{\sqrt{f(u_2)}} &= 2 ds_1 = \frac{\tilde{u}_1 d\tilde{u}_1}{\sqrt{f(\tilde{u}_1)}} + \frac{\tilde{u}_2 d\tilde{u}_2}{\sqrt{f(\tilde{u}_2)}} \end{aligned} \quad (16)$$

и двум алгебраическим уравнениям

$$H_1(u, p_u) = h_1 = H_1(\tilde{u}, \tilde{p}_u), \quad H_2(u, p_u) = h_2 = H_2(\tilde{u}, \tilde{p}_u).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= u_{1,2}, & y_{1,2} &= (a_1 - u_{1,2})(a_2 - u_{1,2})(a_3 - u_{1,2})p_{u_{1,2}}, \\ x_{3,4} &= \tilde{u}_{1,2}, & y_{3,4} &= -(a_1 - \tilde{u}_{1,2})(a_2 - \tilde{u}_{1,2})(a_3 - \tilde{u}_{1,2})\tilde{p}_{u_{1,2}} \end{aligned} \quad (17)$$

и перепишем дифференциальные уравнения (16) в виде дифференциальных уравнений Абеля [17], [18] на гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ второго рода:

$$\begin{aligned} \omega_1(x_1, y_1) + \omega_1(x_2, y_2) + \omega_1(x_3, y_3) + \omega_1(x_4, y_4) &= 0, \\ \omega_2(x_1, y_1) + \omega_2(x_2, y_2) + \omega_2(x_3, y_3) + \omega_2(x_4, y_4) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Входящие в эти уравнения дифференциалы

$$\omega_1(x, y) = \frac{dx}{y}, \quad \omega_2(x, y) = \frac{x dx}{y}$$

образуют стандартный базис голоморфных дифференциалов на гиперэллиптической кривой второго рода. Подчеркнем, что смена знака в определении переменных $y_{3,4}$ по сравнению с $y_{1,2}$ связана с инвариантностью гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ относительно преобразования $(x, y) \rightarrow (x, -y)$, которое называется гиперэллиптической инволюцией.

Тем самым задача о построении преобразования Беклунда $\mathcal{B}$ (15) сводится к классической задаче о нахождении решений дифференциальных уравнений Абеля (18) или, что эквивалентно, к задаче о нахождении алгебраических интегралов уравнений Абеля [19], [16].

2.2. Решения уравнений Абеля. Согласно основной идее Абеля [17] решения дифференциальных уравнений (18) на гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ второго рода,

$$\mathcal{C}: y^2 = f(x), \quad f(x) = a_6 x^6 + a_5 x^5 + \dots + a_0, \quad (19)$$

отождествляются с точками пересечения этой кривой с вспомогательной кривой на плоскости, которая задается уравнением

$$\theta(x, y) = -y + P(x) = 0.$$

Здесь $P(x)$ – полином третьей степени

$$P(x) = \sqrt{a_6} x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

коэффициенты которого b_k неявно зависят от времени, т.е. от переменных $s_{1,2}$ в уравнениях (16). Также здесь предполагается, что вспомогательная кривая на плоскости пересекается с гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ в шести точках $p_1, \dots, p_6$ таким образом, что справедливы следующие утверждения:

1) одна из точек пересечения, скажем p_6 , расположена на бесконечности, поэтому старший коэффициент полинома $P(x)$ фиксирован;

2) абсциссы $x_1, \dots, x_4$ и ординаты $y_1, \dots, y_4$ четырех точек пересечения входят в уравнения Абеля (18), т.е. зависят от переменных $s_{1,2}$ в (16);

3) абсцисса пятой точки пересечения λ рассматривается как произвольная константа интегрирования уравнений Абеля, которая не зависит от $s_{1,2}$.

Все детали могут быть найдены в учебнике [19]. В современной криптографии первые две точки $p_{1,2}$ рассматриваются как “сообщение”, следующие две точки $p_{3,4}$ рассматриваются как “криптограмма”, а координаты пятой неподвижной точки пересечения p_5 играют роль “ключа шифрования” [20].

Исключая переменную y из уравнений кривых, мы получим полином Абеля, корни которого являются абсциссами точек пересечения. В нашем случае этот полином имеет вид

$$\psi(x) = f(x) - P(x)^2 = (a_5 - 2\sqrt{a_6}b_2)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - \lambda), \quad (20)$$

где x_i – абсциссы четырех точек пересечения, входящих в уравнения (18), а λ – абсцисса неподвижной пятой точки пересечения.

Итак, мы можем явно построить искомое отображение $\mathcal{B}$ (15), используя геометрическую связь абсцисс и ординат точек пересечения

$$\mathcal{B}: p_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}) \leftrightarrow p_{3,4} = (x_{3,4}, y_{3,4}), \quad (21)$$

которая содержится в определении полинома Абеля $\psi(x)$ (20). Действительно, абсциссы $x_{3,4}$ находятся из соотношения

$$(x - x_3)(x - x_4) = \frac{f(x) - P(x)^2}{(a_5 - 2\sqrt{a_6}b_2)(x - x_1)(x - x_2)(x - \lambda)}, \quad (22)$$

где $f(x)$ имеет вид (19), а кубический полином $P(x)$ определяется с помощью интерполяции по Лагранжу:

$$P(x) = \frac{y_1(x-x_2)(x-\lambda)}{(x_1-x_2)(x_1-\lambda)} + \frac{y_2(x-x_1)(x-\lambda)}{(x_2-x_1)(x_2-\lambda)} + \frac{\mu(x-x_1)(x-x_2)}{(\lambda-x_1)(\lambda-x_2)} + \sqrt{a_6}(x-x_1)(x-x_2)(x-\lambda), \quad (23)$$

поэтому в это определение входит ордината неподвижной пятой точки пересечения

$$\mu = P(\lambda) = \sqrt{f(\lambda)}.$$

Входящий в определение (22) коэффициент b_2 этого полинома равен

$$b_2 = -\sqrt{a_6}(x_1+x_2+\lambda) + \frac{\mu-y_1}{(\lambda-x_1)(x_1-x_2)} + \frac{\mu-y_2}{(\lambda-x_2)(x_2-x_1)}.$$

Коэффициенты полинома $(x-x_3)(x-x_4)$ (22) можно выписать в явном виде:

$$\begin{aligned} x_3+x_4 &= x_1+x_2 + \frac{y_1}{\sqrt{a_6}(x_1-x_2)(\lambda-x_1)} + \\ &+ \frac{y_2}{\sqrt{a_6}(x_2-x_1)(\lambda-x_2)} - \frac{A}{\sqrt{a_6}(x_1-x_2)C}, \\ x_3x_4 &= x_1x_2 + \frac{x_2y_1}{\sqrt{a_6}(x_1-x_2)(\lambda-x_1)} + \\ &+ \frac{x_1y_2}{\sqrt{a_6}(x_2-x_1)(\lambda-x_2)} - \frac{B}{\sqrt{a_6}(x_1-x_2)C}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 2a_6(x_1-x_2)[(2x_1+x_2)(\lambda-x_2)y_1 - (x_1+2x_2)(\lambda-x_1)y_2] + \\ &+ \sqrt{a_6} \left[\frac{2(\lambda-x_2)y_1^2}{x_1-x_2} + \frac{2(\lambda-x_1)y_2^2}{x_2-x_1} - \right. \\ &\quad \left. - 2y_1y_2 - (\lambda-x_2)f'(x_1) - (\lambda-x_1)f'(x_2) \right] + \\ &+ a_5(x_1-x_2)[(\lambda-x_2)y_1 - (\lambda-x_1)y_2], \\ B &= 2a_6(x_1-x_2)[(2x_1+x_2)(\lambda-x_2)x_2y_1 - (x_1+2x_2)(\lambda-x_1)x_1y_2] + \\ &+ \sqrt{a_6} \left[\frac{2(\lambda-x_2)x_2y_1^2}{x_1-x_2} + \frac{2(\lambda-x_1)x_1y_2^2}{x_2-x_1} - 2(x_1+x_2-\lambda)y_1y_2 - \right. \\ &\quad \left. - (\lambda-x_2)x_2f'(x_1) - (\lambda-x_1)x_1f'(x_2) \right] + \\ &+ a_5(x_1-x_2)[(\lambda-x_2)x_2y_1 - (\lambda-x_1)x_1y_2], \end{aligned}$$

$f'(x)$ – производная от полинома $f(x)$ по x и

$$\begin{aligned} C &= 2(x_1-x_2)(\lambda-x_2)(\lambda-x_1)(\lambda+x_1+x_2)a_6^2 + \\ &+ 2[\mu(x_1-x_2) - (\lambda-x_2)y_1 + (\lambda-x_1)y_2]\sqrt{a_6} - \\ &- a_5(x_1-x_2)(\lambda-x_1)(\lambda-x_2). \end{aligned}$$

Если $a_6 = 0$, то эти выражения значительно упрощаются [16]:

$$\begin{aligned}
 x_3 + x_4 &= x_1 + x_2 + \frac{(x_1 - x_2)f'(x_1) + 2(y_1 + y_2)(\mu - y_1)}{a_5(x_1 - x_2)^3(\lambda - x_1)} - \\
 &\quad - \frac{2y_1(\mu - y_1)}{a_5(x_1 - x_2)^2(\lambda - x_1)^2} + \\
 &\quad + \frac{(x_1 - x_2)f'(x_2) - 2(y_1 + y_2)(\mu - y_2)}{a_5(x_1 - x_2)^3(\lambda - x_2)} - \frac{2y_2(\mu - y_2)}{a_5(x_1 - x_2)^2(\lambda - x_2)^2}, \\
 x_3x_4 &= x_1x_2 + \frac{x_2(x_1 - x_2)f'(x_1) + 2(x_2y_1 + x_1y_2)(\mu - y_1)}{a_5(x_1 - x_2)^3(\lambda - x_1)} - \\
 &\quad - \frac{2x_2y_1(\mu - y_1)}{a_5(x_1 - x_2)^2(\lambda - x_1)^2} + \\
 &\quad + \frac{x_1(x_1 - x_2)f'(x_2) - 2(x_2y_1 + x_1y_2)(\mu - y_2)}{a_5(x_1 - x_2)^3(\lambda - x_2)} - \\
 &\quad - \frac{2x_1y_2(\mu - y_2)}{a_5(x_1 - x_2)^2(\lambda - x_2)^2}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

В обоих случаях ординаты соответствующих точек пересечения

$$y_{3,4} = P(x_{3,4}) \tag{26}$$

находятся с помощью полинома $P(x)$ (23), коэффициенты которого зависят только от (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и произвольной константы интегрирования λ .

Уравнения для абсцисс точек пересечения (24) или (25) вместе с уравнениями для ординат (26) задают отображение $\mathcal{B}$ (21) в общем виде. Построенное таким образом отображение описывает автопреобразования Беклунда для всех двумерных систем, интегрирование которых сводится к обращению отображения Абеля на гиперэллиптической кривой второго рода, например, для системы Неймана, системы Гарнье, системы Энона–Эйлеса, для волчка Ковалевской, волчка Горячева–Чаплыгина и т. д.

В общем случае, если род кривой не равен числу степеней свободы, полином $\psi(x)$ может иметь кратные корни, поэтому для построения полинома $P(x)$ необходимо использовать либо интерполяцию по Лагранжу с привлечением дополнительной информации, либо интерполяцию по Эрмиту [17].

2.3. Автопреобразование Беклунда для системы Якоби на эллипсоиде.

Для системы Якоби на эллипсоиде полином $f(x)$ в определении кривой (9) имеет следующий вид:

$$f(x) = x(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x)(-\kappa^2 x^2 + h_1 x + h_2).$$

Подставляя в уравнения (24) и (26) выражения для x_i , y_i (17) в терминах эллиптических координат и явные выражения для коэффициентов

$$a_6 = \kappa^2, \quad a_5 = -(a_1 + a_2 + a_3)\kappa^2 - h_1,$$

мы получим автопреобразование Беклунда $\mathcal{B}$ (15) в явном виде. Например, если для краткости положить $\lambda = 0$ и $\mu = \sqrt{f(\lambda)} = 0$, то искомые переменные $\tilde{u}_{1,2}$ будут корнями полинома

$$\tilde{A}x^2 + (u_1 - u_2)^{-1}\tilde{B}x + \tilde{C} = 0, \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \varphi_1 u_1^{-1} p_{u_1}^2 - \varphi_2 u_2^{-1} p_{u_2}^2 + 2\kappa(\varphi_1 u_1^{-1} p_{u_1} - \varphi_2 u_2^{-1} p_{u_2}) - \kappa^2(u_1 - u_2)(u_1 + u_2 - \alpha_1), \\ \tilde{B} &= \varphi_1[\alpha_3 - u_1(\alpha_2 - u_2(\alpha_1 - u_1))]u_1^{-2} p_{u_1}^2 + \varphi_2[\alpha_3 - u_2(\alpha_2 - u_1(\alpha_1 - u_2))]u_2^{-2} p_{u_2}^2 - \\ &\quad - 2\varphi_1 \varphi_2 u_1^{-1} p_{u_1} u_2^{-1} p_{u_2} - 2\kappa(u_1 - u_2)(\varphi_1 u_2 u_1^{-1} p_{u_1} - \varphi_2 u_1 u_2^{-1} p_{u_2}) + \\ &\quad + \kappa^2(u_1 - u_2)^2(u_1 u_2 - \alpha_2), \\ \tilde{C} &= \alpha_3[\varphi_1 u_1^{-2} p_{u_1}^2 - \varphi_2 u_2^{-2} p_{u_2}^2 + \kappa^2(u_1 - u_2)]\end{aligned}$$

и

$$\alpha_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \alpha_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3, \quad \alpha_3 = a_1 a_2 a_3.$$

Соответствующим им моменты равны

$$\tilde{p}_{u_{1,2}} = -\tilde{P}(x)|_{x=\tilde{u}_{1,2}}, \quad (28)$$

где

$$\tilde{P}(x) = \frac{x((x - u_1)(x - u_2)(u_1 - u_2)\kappa + (x - u_2)\varphi_1 u_1^{-1} p_{u_1} - (x - u_1)\varphi_2 u_2^{-1} p_{u_2})}{(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x)(u_1 - u_2)}.$$

Мы специально выписали эти достаточно громоздкие выражения для того, чтобы можно было непосредственно проверить, что построенное нами преобразование Беклунда $\mathcal{B}$ (15) сохраняет скобку Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_W$ (13), относительно которой уравнения движения в форме Вейерштрасса (12) являются гамильтоновыми.

ТЕОРЕМА 1. *Если*

$$\{u_i, p_{u_j}\}_W = u_i \delta_{ij}, \quad \{u_1, u_2\}_W = \{p_{u_1}, p_{u_2}\}_W = 0,$$

то

$$\{\tilde{u}_i, \tilde{p}_{u_j}\}_W = \tilde{u}_i \delta_{ij}, \quad \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}_W = \{\tilde{p}_{u_1}, \tilde{p}_{u_2}\}_W = 0.$$

Здесь переменные $\tilde{u}_{1,2}$ и $\tilde{p}_{1,2}$ заданы либо уравнениями (27), (28) при $\lambda = 0$, либо (24) и (26) в общем случае.

Если $\lambda \neq 0$ в (24) и (26), то при доказательстве данного утверждения необходимо учесть, что $\mu = \sqrt{f(\lambda)}$ является нетривиальной функцией на фазовом пространстве $T^*\mathbb{E}^2$.

Исходные скобки Дирака–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_D$ в терминах переменных $\tilde{p}_{1,2}$ и $\tilde{u}_{1,2}$ довольно громоздки, и мы их не будем выписывать явно, заметим лишь, что в этом случае $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\}_D \neq 0$.

2.4. Новые интегрируемые системы на эллипсоиде. В начале своей лекции 26 в книге [1], описывая эллиптические координаты, Якоби пишет: “Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит в введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого общего правила. Поэтому мы должны идти обратным путем и, найдя какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена. Я сообщил об одной такой подстановке берлинской академии в одной заметке, также напечатанной в *Crelles Journal*, и привел ряд задач, в особенности из механики, в которых она применяется”.

В данном разделе мы перенесем эту идею Якоби с эллиптических координат $u_{1,2}$ на их образы $\tilde{u}_{1,2}$, построенные с помощью автопреобразования Беклунда $\mathcal{B}$. Нахождение новых задач в нашем случае означает поиск новых интегрируемых систем на эллипсоиде таких, что:

- 1) гамильтонианы $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$ находятся в инволюции относительно исходной скобки Дирака–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_D$ на фазовом пространстве $T^*\mathbb{E}^2$;
- 2) один из гамильтонианов, скажем первый, имеет натуральный вид

$$\hat{H}_1 = \sum_{ij} \hat{g}_{ij} p_i p_j + V, \quad (29)$$

где $\hat{g}_{ij}$ – новая интегрируемая метрика на эллипсоиде;

- 3) второй из гамильтонианов $\hat{H}_2$ является полиномом третьего, четвертого или шестого порядка по импульсам.

Квадратичные по импульсам гамильтонианы могут быть найдены в рамках формализма Штеккеля с использованием эллиптических координат, поэтому мы ставим задачу о нахождении интегралов движения старших степеней по импульсам. Для решения этой задачи нам необходимо сначала найти новые переменные разделения $\hat{u}_{1,2}$ и $\hat{p}_{u_{1,2}}$, для которых скобка Дирака–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_D$ будет иметь каноническую форму, а затем подставить эти переменные в разделенные уравнения специального вида

$$\Phi_1(\hat{u}_1, \hat{p}_{u_1}, \hat{H}_1, \hat{H}_2) = 0, \quad \Phi_2(\hat{u}_2, \hat{p}_{u_2}, \hat{H}_1, \hat{H}_2) = 0.$$

Уравнения должны быть такими, чтобы их решение относительно функций $\hat{H}_{1,2}$ позволяло бы получить гамильтониан $\hat{H}_1$ натурального вида (29).

Исходная скобка Дирака–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_D$ (6), (7) в терминах переменных $\tilde{u}_{1,2}$, $\tilde{p}_{1,2}$ не является канонической. Поэтому, в отличие от систем на плоскости и сфере, которые были рассмотрены в работах [7], [8], [11], [12], нам необходимо построить новые канонические переменные разделения на эллипсоиде. Для этого достаточно просто заменить p_{u_k} на произведение $u_k p_{u_k}$ в определениях (28) и (27), т. е. использовать пуассоново отображение

$$\rho: (u_1, u_2, p_{u_1}, p_{u_2}) \rightarrow (u_1, u_2, u_1 p_{u_1}, u_2 p_{u_2}), \quad (30)$$

которое приводит скобку Дирака–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_D$ к скобке $\{\cdot, \cdot\}_W$, относительно которой уравнения движения в форме Вейерштрасса (12) гамильтоновы. Действительно, используя композицию отображений $\mathcal{B} \circ \rho$, определим координаты $\hat{u}_{1,2}$ на $T^*\mathbb{E}^2$:

$$\hat{A}x^2 + (u_1 - u_2)^{-1}\hat{B}x + \hat{C} = \hat{A}(x - \hat{u}_1)(x - \hat{u}_2), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \rho(\tilde{A}) \equiv \varphi_1 u_1 p_{u_1}^2 - \varphi_2 u_2 p_{u_2}^2 + 2\kappa(\varphi_1 p_{u_1} - \varphi_2 p_{u_2}) - \kappa^2(u_1 - u_2)(u_1 + u_2 - \alpha_1), \\ \hat{B} &= \rho(\tilde{B}) \equiv \varphi_1[\alpha_3 - u_1(\alpha_2 - u_2(\alpha_1 - u_1))]p_{u_1}^2 + \varphi_2[\alpha_3 - u_2(\alpha_2 - u_1(\alpha_1 - u_2))]p_{u_2}^2 - \\ &\quad - 2\varphi_1\varphi_2 p_{u_1} p_{u_2} - 2\kappa(u_1 - u_2)(\varphi_1 u_2 p_{u_1} - \varphi_2 u_1 p_{u_2}) + \kappa^2(u_1 - u_2)^2(u_1 u_2 - \alpha_2), \\ \hat{C} &= \rho(\tilde{C}) \equiv \alpha_3[\varphi_1 p_{u_1}^2 - \varphi_2 p_{u_2}^2 + \kappa^2(u_1 - u_2)], \end{aligned}$$

и соответствующие им моменты

$$\hat{p}_{u_{1,2}} = -\hat{P}(x)|_{x=\hat{u}_{1,2}}, \quad (32)$$

где

$$\hat{P}(x) = x^{-1}\rho(\tilde{P}) = \frac{(x-u_1)(x-u_2)(u_1-u_2)\kappa + (x-u_2)\varphi_1 p_{u_1} - (x-u_1)\varphi_2 p_{u_2}}{(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)(u_1-u_2)}.$$

Непосредственными вычислениями можно доказать следующее свойство новых переменных.

ТЕОРЕМА 2. *Скобка Дирака–Пуассона*

$$\{u_i, p_{u_j}\}_D = \delta_{ij}, \quad \{u_1, u_2\}_D = \{p_{u_1}, p_{u_2}\}_D = 0,$$

в терминах переменных $\hat{u}_{1,2}$ и $\hat{p}_{1,2}$ (31), (32) имеет вид

$$\{\hat{u}_i, \hat{p}_{u_j}\}_D = \delta_{ij}, \quad \{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}_D = \{\hat{p}_{u_1}, \hat{p}_{u_2}\}_D = 0.$$

Таким образом мы получили новые канонические относительно $\{\cdot, \cdot\}_D$ переменные, которые можно использовать для построения новых гамильтонианов в рамках метода Якоби.

Известно, что при $\kappa = 0$ преобразование Кноррера отображает геодезические на эллипсоиде в траектории задачи Неймана на единичной сфере [14]. Применяя к системе Неймана гетеропреобразование Беклунда, можно получить систему Чаплыгина на сфере [7] и ее интегрируемые обобщения [8]. Далее мы воспользуемся этими результатами для выбора подходящих разделенных уравнений в задаче Якоби.

Переменные $u_{1,2}$ и $p_{u_{1,2}}$ удовлетворяют разделенным уравнениям (8), которые мы, следуя [11], [12], перепишем в виде

$$\varphi_k(u_k^{-1}p_{u_k})^2 + \kappa^2 u_k = H_1 + \frac{H_2}{u_k}, \quad k = 1, 2.$$

Складывая и вычитая эти разделенные уравнения, мы получим пару новых интегралов движения в инволюции относительно исходных скобок Дирака–Пуассона:

$$H'_1 = [\varphi_1(u_1^{-1}p_{u_1})^2 + \kappa^2 u_1] + [\varphi_2(u_2^{-1}p_{u_2})^2 + \kappa^2 u_2] = 2H_1 + \frac{u_1 + u_2}{u_1 u_2} H_2,$$

$$H'_2 = [\varphi_1(u_1^{-1}p_{u_1})^2 + \kappa^2 u_1] - [\varphi_2(u_2^{-1}p_{u_2})^2 + \kappa^2 u_2] = \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} H_2.$$

Соответствующие разделенные уравнения имеют вид

$$\Phi_k = 2[\varphi_k(u_k^{-1}p_{u_k})^2 + \kappa^2 u_k] - H'_1 \mp H'_2 = 0, \quad k = 1, 2.$$

Переменные $\tilde{u}_{1,2}$ и $\tilde{p}_{u_{1,2}}$ удовлетворяют тем же самым разделенным уравнениям

$$\tilde{\varphi}_k(\tilde{u}_k^{-1}\tilde{p}_{u_k})^2 + \kappa^2 \tilde{u}_k = H_1 + \frac{H_2}{\tilde{u}_k}, \quad k = 1, 2,$$

согласно определению автопреобразований Беклунда. Складывая и вычитая эти разделенные уравнения, мы получим пару новых интегралов движения:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1 &= [\tilde{\varphi}_1(\tilde{u}_1^{-1}\tilde{p}_{u_1})^2 + \kappa^2\tilde{u}_1] + [\tilde{\varphi}_2(\tilde{u}_2^{-1}\tilde{p}_{u_2})^2 + \kappa^2\tilde{u}_2] = 2H_1 + \frac{\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2}{\tilde{u}_1\tilde{u}_2}H_2, \\ \tilde{H}_2 &= [\tilde{\varphi}_1(\tilde{u}_1^{-1}\tilde{p}_{u_1})^2 + \kappa^2\tilde{u}_1] - [\tilde{\varphi}_2(\tilde{u}_2^{-1}\tilde{p}_{u_2})^2 + \kappa^2\tilde{u}_2] = \frac{\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1}{\tilde{u}_1\tilde{u}_2}H_2,\end{aligned}$$

которые удовлетворяют разделенным уравнениям

$$\tilde{\Phi}_k = \mathcal{B}(\Phi_k) = 2[\tilde{\varphi}_k(\tilde{u}_k^{-1}\tilde{p}_{u_k})^2 + \kappa^2\tilde{u}_k] - \tilde{H}_1 \mp \tilde{H}_2 = 0, \quad k = 1, 2,$$

в которых $\tilde{\varphi}_k = (a_1 - \tilde{u}_k)(a_2 - \tilde{u}_k)(a_3 - \tilde{u}_k)$. Полученные таким образом гамильтонианы $\tilde{H}_{1,2}$ коммутируют друг с другом относительно скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_W$, но не относительно исходной скобки Дирака–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_D$, т. е.

$$\{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2\}_W = 0, \quad \text{но} \quad \{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2\}_D \neq 0.$$

Для того чтобы получить искомые интегралы движения в инволюции относительно исходной скобки Дирака–Пуассона (7) на фазовом пространстве $T^*\mathbb{E}^2$, мы будем использовать разделенные уравнения

$$\hat{\Phi}_k = (\mathcal{B} \circ \rho)(\Phi_k) = 2(\hat{\varphi}_k \hat{p}_{u_k}^2 + \kappa^2 \hat{u}_k) - \hat{H}_1 \mp \hat{H}_2 = 0, \quad k = 1, 2, \quad (33)$$

в которых $\hat{\varphi}_k = (a_1 - \hat{u}_k)(a_2 - \hat{u}_k)(a_3 - \hat{u}_k)$ и пуассоново отображение ρ имеет вид (30).

ТЕОРЕМА 3. *Входящие в разделенные уравнения (33) гамильтонианы*

$$\hat{H}_1 = 2\rho(H_1) + \frac{\hat{u}_1 + \hat{u}_2}{\hat{u}_1\hat{u}_2}\rho(H_2), \quad \hat{H}_2 = \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{\hat{u}_1\hat{u}_2}\rho(H_2),$$

где

$$\rho(H_1) = \frac{\varphi_1 u_1 p_{u_1}^2}{u_1 - u_2} + \frac{\varphi_2 u_2 p_{u_2}^2}{u_2 - u_1} - \kappa^2(u_1 + u_2), \quad \rho(H_2) = u_1 u_2 \left(\frac{\varphi_1 p_{u_1}^2}{u_2 - u_1} + \frac{\varphi_2 p_{u_2}^2}{u_1 - u_2} + \kappa^2 \right),$$

коммутируют относительно скобки Дирака–Пуассона (7).

В работах [7], [8], [10]–[12] соответствие между исходными уравнениями Гамильтона–Якоби $H_{1,2} = h_{1,2}$ и новыми уравнениями $\hat{H}_{1,2} = \hat{h}_{1,2}$ было названо гетеропреобразованием Беклунда. Как и для систем с двумя степенями свободы на плоскости и сфере, можно доказать, что эта интегрируемая система с гамильтонианами $\hat{H}_{1,2}$ бигамильтонова и что существуют интегрируемые деформации данной системы, отвечающие добавлению сингулярных слагаемых типа Росохатиуса к исходному гамильтониану H_1 (5) и переходу к алгебраической кривой третьего рода. Обсуждение этих и других свойств полученной интегрируемой системы на эллипсоиде выходит за рамки данной работы.

Выпишем в явном виде первый гамильтониан

$$\alpha_3 \hat{H}_1 = \sum_{ij} \hat{g}_{ij} p_{u_i} p_{u_j} - \frac{2\kappa u_1 u_2}{u_1 - u_2} (\varphi_1 u_2 p_{u_1} - \varphi_2 u_1 p_{u_2}) + \kappa^2 (2\alpha_3 (u_1 + u_2) - \alpha_2 u_1 u_2 + u_1^2 u_2^2)$$

с потенциалом, зависящим линейно от скорости, и метрикой

$$\hat{g} = (u_1 - u_2)^{-2} \begin{pmatrix} u_1 \varphi_1 \eta_1 & -u_1 u_2 \varphi_1 \varphi_2 \\ -u_1 u_2 \varphi_1 \varphi_2 & u_2 \varphi_2 \eta_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \alpha_3(2u_1 - u_2) - u_1(\alpha_2 u_2 - \alpha_1 u_2^2 + u_1 u_2^2), \\ \eta_2 &= \alpha_3(2u_2 - u_1) - u_2(\alpha_2 u_1 - \alpha_1 u_1^2 + u_1^2 u_2). \end{aligned}$$

Подобные гамильтонианы с потенциалами, зависящими линейно от скоростей, хорошо известны (см., например, [8], [21], [22] и приведенные в этих работах ссылки).

Второй гамильтониан является алгебраической функцией, а его квадрат – это полином четвертой степени по импульсам следующего вида:

$$(\alpha_3 \hat{H}_2)^2 = \frac{u_1^2 u_2^2}{(u_1 - u_2)^4} \sum_{k=0}^4 w_k p_{u_1}^{4-k} p_{u_2}^k + u_1^2 u_2^2 \sum_{m=1}^4 \kappa^m W_m,$$

где

$$\begin{aligned} w_0 &= \varphi_1^2 [\alpha_3^2 + 2\alpha_3 u_1 (\alpha_1 u_2 - 2u_1^2 + 3u_1 u_2 - 2u_2^2 - \alpha_2) + u_1^2 (\alpha_1 u_2 - u_1 u_2 - \alpha_2)^2], \\ w_1 &= 4\varphi_1^2 \varphi_2 [u_1 (u_1 - u_2) (\alpha_1 - u_1) - \varphi_1], \quad w_3 = 4\varphi_1 \varphi_2^2 [(u_2 (u_2 - u_1) (\alpha_1 - u_2) - \varphi_2)], \\ w_2 &= 2\varphi_1 \varphi_2 [3\varphi_1 \varphi_2 + (u_1 - u_2)^2 (\alpha_3 (3u_1 + 3u_2 - \alpha_1) - \alpha_2 u_1 u_2)], \\ w_4 &= \varphi_2^2 [\alpha_3^2 + 2\alpha_3 u_2 (\alpha_1 u_1 - 2u_2^2 + 3u_1 u_2 - 2u_1^2 - \alpha_2) + u_2^2 (\alpha_1 u_1 - u_1 u_2 - \alpha_2)^2] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{4(\varphi_1^2 \eta_1 p_{u_1}^3 - \varphi_2^2 \eta_2 p_{u_2}^3)}{(u_1 - u_2)^3} - \\ &\quad - \frac{4\varphi_1 \varphi_2 p_{u_1} p_{u_2}}{(u_1 - u_2)^3} [u_1 p_{u_1} (3\alpha_3 - \alpha_2 (2u_2 + u_1) + 3u_1 u_2 (\alpha_1 - u_1)) - \\ &\quad - u_2 p_{u_2} (3\alpha_3 - \alpha_2 (2u_1 + u_2) + 3u_1 u_2 (\alpha_1 - u_2))], \\ W_2 &= \frac{2(3u_1 u_2 - \alpha_2) (\varphi_1 p_{u_1} - \varphi_2 p_{u_2})^2}{(u_1 - u_2)^2} + \\ &\quad + \frac{2\varphi_1 [u_1^2 (3u_2 (u_1 - \alpha_1) - \alpha_2) + \alpha_2 (\alpha_1 + 2u_2) u_1 - 2\alpha_1 \alpha_3] p_{u_1}^2}{u_1 - u_2} + \\ &\quad + \frac{2\varphi_2 [u_2^2 (3u_1 (u_2 - \alpha_1) - \alpha_2) + \alpha_2 (\alpha_1 + 2u_1) u_2 - 2\alpha_1 \alpha_3] p_{u_2}^2}{u_2 - u_1}, \\ W_3 &= \frac{4\varphi_1 (u_1 u_2^2 - \alpha_2 u_2 + 2\alpha_3) p_{u_1}}{u_2 - u_1} + \frac{4\varphi_2 (u_1^2 u_2 - \alpha_2 u_1 + 2\alpha_3) p_{u_2}}{u_1 - u_2}, \\ W_4 &= u_1^2 u_2^2 + 4\alpha_3 (u_1 + u_2 - \alpha_1) - 2\alpha_2 u_1 u_2 + \alpha_2^2. \end{aligned}$$

Полученные гамильтонианы $\hat{H}_{1,2}$ не имеют смысла с точки зрения механики, тем не менее исследование таких систем может помочь в нахождении бигамильтоновых структур и переменных разделения для других интегрируемых систем с интегралами движения старших степеней по импульсам, более интересных с точки зрения механики. Кроме того, подобные нестандартные гамильтоновы системы иногда возникают в других областях исследований, например в неголономной механике, теории управления, сейсмологии, биологии, оптоэлектронике, механике жидкостей и т. д.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для систем с двумя степенями свободы на плоскости и сфере известно некоторое соответствие между интегрируемыми системами с квадратичными интегралами движения и интегрируемыми системами с интегралами движения старших степеней, которое в работах [7], [8], [10]–[12] было названо гетеропреобразованием Беклунда. Таким образом, например, связаны все три интегрируемых случая системы Энона–Эйлеса, интегрируемые случаи системы с потенциалом четвертой степени, система Неймана на сфере с системой Чаплыгина и т. д.

Целью данной работы является построение авто- и гетеропреобразований Беклунда для системы Якоби на эллипсоиде с помощью дифференциальных уравнений Абеля. В отличие от предыдущих работ, для построения уравнений Абеля в этом случае нам необходимо использовать замену времени, предложенную Вейерштрассом. Как следствие, полученное автопреобразование Беклунда сохраняет не исходные скобки Дирака–Пуассона, а скобки Пуассона, относительно которых уравнения в форме Вейерштрасса являются гамильтоновыми. Поэтому для построения новых интегрируемых систем на эллипсоиде в рамках метода Якоби нам пришлось использовать дополнительное пуассоново преобразование.

Разработанная в настоящей работе методика может быть использована и для других систем, интегрируемых с помощью обращения отображения Абеля, после некоторой замены времени, аналогичной замене времени Вейерштрасса. В последующих работах мы планируем рассмотреть подобные замены времени и построить новые интегрируемые метрики на плоскости, сфере и эллипсоиде, для которых геодезические потоки обладают интегралами движения третьей, четвертой и шестой степеней по импульсам.

Благодарности. Автор благодарен рецензентам за подробный анализ работы, который позволил существенно улучшить изложение полученных результатов.

Список литературы

- [1] К. Якоби, *Лекции по динамике*, Гостехиздат, Л., 1936.
- [2] K. Weierstrass, “Über die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid”, *Mathematische Werke I*, Mayer and Müller, Berlin, 1894, 257–266.
- [3] M. Toda, M. Wadati, “A canonical transformation for the exponential lattice”, *J. Phys. Soc. Japan*, **39**:5 (1975), 1204–1211.
- [4] S. Wojciechowski, “The analogue of the Bäcklund transformation for integrable many-body systems”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **15**:12 (1982), L653–L657.
- [5] V. Kuznetsov, P. Vanhaecke, “Bäcklund transformations for finite-dimensional integrable systems: a geometric approach”, *J. Geom. Phys.*, **44**:1 (2002), 1–40.
- [6] Y. B. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Progress in Mathematics, **219**, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [7] A. V. Tsiganov, “Simultaneous separation for the Neumann and Chaplygin systems”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **20**:1 (2015), 74–93.
- [8] A. V. Tsiganov, “On the Chaplygin system on the sphere with velocity dependent potential”, *J. Geom. Phys.*, **92** (2015), 94–99.
- [9] А. П. Веселов, “Интегрируемые отображения”, *УМН*, **46**:5(281) (1991), 3–45.
- [10] Ю. А. Григорьев, А. П. Созонов, А. В. Цыганов, “Об одной интегрируемой системе на плоскости с потенциалом, зависящим от скорости”, *Нелинейная динамика*, **12**:3 (2016), 355–367.

- [11] А. В. Созонов, А. В. Цыганов, “О преобразованиях Беклунда, связывающих различные уравнения Гамильтона–Якоби”, *ТМФ*, **183**:3 (2015), 372–387.
- [12] A. V. Tsiganov, “On auto and hetero Bäcklund transformations for the Hénon–Heiles systems”, *Phys. Lett. A*, **379**:45–46 (2015), 2903–2907.
- [13] H. Knörrer, “Geodesics on the ellipsoid”, *Invent. Math.*, **59**:2 (1980), 119–143.
- [14] H. Knörrer, “Geodesics on quadrics and a mechanical problem of C. Neumann”, *J. Reine Angew. Math.*, **334** (1982), 69–78.
- [15] J. Moser, “Geometry of quadric and spectral theory”, *The Chern Symposium 1979*, Proceedings of the International Symposium on Differential Geometry in honor of S.-S. Chern (Berkeley, CA, June 1979), eds. W.-Y. Hsiang, S. Kobayashi, I. M. Singer, A. Weinstein, J. Wolf, H.-H. Wu, Springer, New York, Berlin, 1980, 147–188.
- [16] А. В. Цыганов, “Теорема Абеля и преобразования Бэклунда для уравнений Гамильтона–Якоби”, *Тр. МИАН*, **295** (2016), 261–291.
- [17] N. H. Abel, “Memoiré sur une propriété générale d’une class très entendue des fonctions transcendentes”, *Oeuvres complètes*, v.I, Imprimerie de Grøndahl and Son, Christiania, 1881, 145–211.
- [18] M. Green, P. Griffiths, “Abel’s differential equations”, *Houston J. Math.*, **28**:2 (2002), 329–351.
- [19] H. F. Baker, *Abelian functions. Abel’s Theorem and the Allied Theory of Theta Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1897.
- [20] C. Costello, K. Lauter, “Group law computations on Jacobians of hyperelliptic curves”, *Selected Areas in Cryptography*, Selected papers from the 18th Annual International Workshop (SAC’2011) (Toronto, ON, August 11–12, 2011), Lecture Notes in Computer Science, **7118**, eds. A. Miri, S. Vaudenay, Springer, Heidelberg, 2012, 92–117.
- [21] В. В. Соколов, “Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа”, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 31–37.
- [22] В. В. Соколов, А. В. Цыганов, “Коммутативные пуассоновы подалгебры для скобок Складина и деформации известных интегрируемых моделей”, *ТМФ*, **133**:3 (2002), 485–500.

Поступила в редакцию 14.10.2016,
после доработки 21.11.2016