Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Сорин, Ю. Б. Черняков, Г. И. Шарыгин, Фазовый
портрет полной симметричной системы То́ды на группах
ранга 2, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 2, 193–213

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:34:30

© 2017 г.

А. С. Сорин^{*†‡}, Ю. Б. Черняков^{*§},
Г. И. Шарыгин^{*§¶}

ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ПОЛНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ТОДЫ НА ГРУППАХ РАНГА 2

Продолжены исследования, начатые в предыдущих работах авторов, где доказано, что фазовая диаграмма системы Тоды на специальных линейных группах может быть отождествлена с порядком Брюа на симметрической группе, когда все собственные значения матрицы Лакса различны, или с порядком Брюа на перестановках с повторениями, если есть совпадающие собственные значения. Показано, что совпадение фазового портрета системы Тоды и диаграммы Хассе порядка Брюа остается в силе в случае произвольной простой группы Ли ранга 2: для этого данное свойство проверяется для двух оставшихся не исследованными ранее групп ранга 2, а именно группы $Sp(4, \mathbb{R})$ и вещественной формы группы G_2 .

Ключевые слова: полная симметричная система Тоды, порядок Брюа, функция Морса, полупростая группа Ли, группа Вейля.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9288>

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], [2], динамическая система Тоды обобщается до интегрируемой системы на произвольной полупростой группе Ли; эта система называется обобщенной (полной симметричной) системой Тоды. Можно задать вопрос о геометрических

Работа А. С. Сорины частично поддержана РФФИ (гранты № 16-52-12012-NNIO_a, 15-52-05022-Arm_a) и DFG (грант LE 838/12-2). Работа Ю. Б. Чернякова поддержана РФФИ (грант № 15-02-04175). Работа Г. И. Шарыгина поддержана РНФ (грант № 16-11-10069).

^{*}Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: sorin@theor.jinr.ru

[†]Государственный университет “Дубна”, Дубна, Московская обл., Россия

[‡]Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ” (Московский инженерно-физический институт), Москва, Россия

[§]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: chernyakov@itep.ru, sharygin@itep.ru

[¶]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

свойствах (инвариантных многообразиях, сингулярных точках, фазовых портретах и т. д.) такой системы на произвольной группе. В частности, в наших работах [3] и [4] мы описали фазовый портрет такой системы на вещественной специальной линейной группе (в более абстрактных терминах, на вещественных формах серии A_n). Мы показали, что он может быть отождествлен с диаграммой Хассе порядка Брюа на соответствующей группе Вейля (или на ее обобщении, если не все собственные значения различны). Это утверждение в некотором смысле обобщает классический результат работы [5] и представляет собой попытку дать точную математическую интерпретацию выводов статьи [6] (см. также работы [7], где система Тоды на других группах Ли рассматривалась с аналогичной точки зрения, и [8], в которой исследована геометрия отображения моментов для потоков полной симметричной системы Тоды).

Возникает естественный вопрос, остаются ли в силе аналогичные свойства для других полупростых групп Ли? Очевидная гипотеза заключается в том, что это действительно так – это и есть задача, которую мы пытаемся исследовать в настоящей работе. Фактически настоящая статья была сначала задумана как дополнение к работе [4] (в которой мы описали фазовый портрет системы Тоды на специальной линейной группе в случае, когда не все собственные значения матрицы Лакса различны), чтобы подтвердить эту гипотезу. Однако в некоторый момент мы осознали, что размер дополнения приближается к размеру основного текста статьи, и решили разделить работу на две.

Предмет настоящей работы – дать точное описание поведения потоков Тоды на оставшихся не исследованными ранее действительных группах Ли ранга 2, т. е. на $Sp(4, \mathbb{R})$ и действительной форме группы G_2 (случай $SL(3, \mathbb{R})$ был детально разобран в нашей первой работе [3]), в качестве дальнейшего подтверждения сделанного нами предположения. Наши рассуждения строятся на немного измененных методах, которые мы использовали в предыдущих работах, однако применение этих методов к группам, отличным от $SL(n, \mathbb{R})$, оказалось довольно сложным. Причина этого состоит в том, что определение системы Тоды на группах Ли обычно основывается на рассмотрении корней и базисов Шевалле, в то время как наше исследование фазового портрета основано на большом множестве инвариантных относительно потоков подпространств, которые можно описать в терминах пространств флагов и матричных представлений групп.

Таким образом, для решения задачи нам необходимо было найти подходящую переформулировку системы Тоды, чтобы можно было использовать матричное представление. Оказалось, что эта переформулировка действительно существует; она была дана, в частности, в работе [2]. По сути дела, как можно показать, существует вложение полупростой группы G в специальную линейную группу подходящей размерности такое, что G сохраняется системой Тоды на $SL(n, \mathbb{R})$; тогда система Тоды на G эквивалентна ограничению системы, определенной на $SL(n, \mathbb{R})$. Однако данное вложение найти непросто, в частности, для группы G_2 ; более того, после выбора такого вложения все еще нужно правильно выбрать инвариантные пространства, чтобы было возможно описать фазовую структуру.

Мы показываем, что в обоих случаях сделанное нами предположение остается справедливым. Хотя результат положительный, непонятно, можно ли продолжить примененные в настоящей работе методы на группы высших рангов серий B , C

и D , и еще менее очевидно, могут ли они быть применены к группам E_7 , E_8 и F_4 . Даже если это возможно, с ростом ранга вычисления становятся все более и более сложными, поэтому нужно искать более мощные средства.

Работа организована следующим образом. В нескольких первых разделах мы кратко напоминаем основные необходимые факты, начиная с систем корней, групп Вейля, порядка Брюа; для более детального рассмотрения читателю следует обратиться к книгам [9]–[11] (см. также наши работы [3], [4]). Далее мы даем короткий экскурс в основные свойства системы Тоды. Мы описываем ее и в терминах базиса Шевалле, и как сужение полной симметричной системы с $SL(n, \mathbb{R})$ на вложенную группу (при соответствующих условиях на это вложение) и напоминаем определение минорных многообразий, которые образуют множества инвариантов системы Тоды. Мы также отмечаем, что систему Тоды можно рассматривать как градиентный поток на подходящем пространстве флагов и напоминаем основные свойства градиентных потоков на многообразиях (можно назвать это *элементарной теорией Морса*). В оставшихся двух разделах мы применяем предложенные методы к группам $Sp(4, \mathbb{R})$ и G_2 , для этого мы показываем, как для этих групп определено вложение необходимого типа и каким образом следует выбирать минорные многообразия для описания фазового портрета.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

В этом разделе мы собрали факты, необходимые для дальнейшей работы. Мы постарались сделать изложение коротким и по возможности самодостаточным (хотя эти цели несколько противоречат друг другу). Поэтому мы сосредоточили наше внимание на наиболее важных определениях и фактах, опустив доказательства и определения, которые не используются в нашей работе; например, мы игнорируем диаграммы Дынкина и их роль в классификации алгебр Ли. Для получения сведений об этом и других предметах читатель может обратиться к статьям и книгам из нашего библиографического списка.

2.1. Системы корней и группы Вейля. Представление систем корней в контексте теории групп Ли и их связь с группами Вейля можно найти во многих книгах, см., например, [10], [11]. Здесь мы приводим только основные сведения.

Как известно, односвязные простые комплексные группы Ли могут быть классифицированы в терминах их систем корней. А именно, выбираем максимальную коммутативную подалгебру (подалгебру Картана) $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Число $\dim \mathfrak{h} = r$ называется *рангом* алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда существует семейство линейных функционалов $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ на $\mathfrak{h}$ такое, что можно выбрать базис алгебры $\mathfrak{g}$, который состоит из базиса $H_1, \dots, H_r$ подалгебры $\mathfrak{h}$ и семейства векторов $E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_{n-r}} \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$, и при этом имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [E_\alpha, H_i] = \alpha(H_i)E_\alpha, \quad [E_\alpha, E_\beta] = n_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta},$$

если $\alpha + \beta \neq 0$, $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$. Здесь α, β – некоторые функционалы из множества, выбранного выше, $n_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ и в третьей формуле мы предполагаем, что $\alpha + \beta$ снова попадает в указанное множество функционалов и $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \neq 0$. Базис с такими свойствами называется *базисом Картана–Вейля*.

Функционалы α_i из указанного множества называются *корнями* алгебры Ли; вышеприведенными условиями (и выбором подалгебры Картана) они определены единственным образом. Как можно видеть, в общем случае они не являются линейно независимыми. Если базис в функциональном пространстве $\mathfrak{h}^*$ выбран, можно ввести упорядочение на множестве корней, а также разделить корни на положительные и отрицательные. Говорят, что (положительный) корень α *простой*, если α не равен сумме двух других положительных корней из той же системы. Оказывается, что в любой системе корней всегда существуют в точности r простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Соответствующий базис $H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_r}$ подалгебры $\mathfrak{h}$ задается условиями

$$\alpha_j(H) = B(H_{\alpha_j}, H), \quad H \in \mathfrak{h},$$

где $B(X, Y)$ есть форма Киллинга на $\mathfrak{h}$; при этом коммутационные соотношения те же, что и выше, за исключением того, что

$$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}] = H_{\alpha_i}$$

для всех простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Базис с такими свойствами называется *базисом Шевалле* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Другое важное понятие, тесно связанное с подалгеброй Картана алгебры Ли – это *группа Вейля*. Данная группа имеет много определений, включая чисто комбинаторные. Один из удобных путей определить ее следующий: рассмотрим присоединенное действие группы Ли G на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Для заданной подалгебры Картана $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ мы определяем ее *нормализатор* $N_G(\mathfrak{h}) \subseteq G$ как стабилизатор подалгебры $\mathfrak{h}$ при этом действии. Понятно, что подгруппа $N_G(\mathfrak{h})$ содержит коммутативную подгруппу $T_{\mathfrak{h}}$ группы G как нормальную подгруппу. Тогда $W_G = N_G(\mathfrak{h})/T_{\mathfrak{h}}$; фактически таким способом можно определить W_G для любой максимально коммутативной подгруппы $T_{\mathfrak{h}}$ вместо $\mathfrak{h}$. Оказывается, что группа Вейля W_G полупростой группы Ли дискретна и конечна. Из определения следует, что W_G снабжена естественным действием на $\mathfrak{h}$; это действие позволяет отождествить W_G с группой линейных преобразований алгебры $\mathfrak{h}$, индуцированных симметриями относительно ортогональных дополнений векторов H_{α_i} . Таким способом можно абстрактно определить группу Вейля как специальный класс групп отражений Кокстера.

2.2. Порядок Брюа и клеточное разложение Брюа. Главные ссылки для этого пункта такие же, как и для предыдущего, – книги [11] и [10]; см. также [9].

Любая группа W отражений Кокстера имеет каноническую систему генераторов t_i , соответствующих “базовым” отражениям, которые порождают W . Следовательно, можно использовать эту систему для определения дополнительных структур на W . Прежде всего определим *длину* $l(g)$ элемента $g \in W$ как

$$l(g) = \min\{n \mid g = t_{i_1} \dots t_{i_n}\}.$$

Эту функцию можно использовать для задания частичного порядка на W . Более тонкое понятие частичного порядка – это так называемый *сильный порядок Брюа*, который может быть определен как замыкание (в смысле частичных порядков) следующего элементарного отношения:

$$u \prec v \iff v = tu, \quad l(v) = l(u) + 1 \text{ для некоторого элементарного отражения } t.$$

Удобно представить этот порядок, нарисовав граф, который называется диаграммой Хассе порядка, или просто *графом Брюа*. Это направленный граф, вершины которого соответствуют элементам группы, а ребра соединяют те точки u и v , для которых выполняется элементарное отношение $u \prec v$; соответствующее ребро тогда направлено от u к v (точнее говоря, диаграмма Хассе также содержит ребра, которые соответствуют последовательностям элементарных отношений; эти ребра мы, как правило, будем опускать).

Поскольку W_G является группой Кокстера, мы видим, что, в частности, порядок Брюа может быть введен на всех группах Вейля. В некоторых случаях этому порядку может быть придан понятный геометрический смысл. Например, в случае групп $SL(n, \mathbb{C})$ (A -серии простых групп) группы Вейля эквивалентны группам S_n полных перестановок. Оказывается, существует геометрический способ ввести порядок Брюа. А именно, можно рассмотреть (*вещественное*) *пространство флагов*

$$Fl_n(\mathbb{R}) = \{\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = \mathbb{R}^n \mid \dim V_i = i\} = SL(n, \mathbb{R})/B_n^+,$$

где B_n^+ есть группа верхнетреугольных матриц с единичным детерминантом. Можно ввести разбиение этого пространства на $n!$ клеток X_v , называемых *клетками Шуберта*, занумерованных перестановками (элементами $v \in S_n$); это разбиение называется *клеточным разбиением Шуберта*, или *клеточным разбиением Брюа*.

Замыкания клеток Шуберта являются алгебраическими многообразиями в $F_n(\mathbb{R})$, определенными условиями на ранги пересечений соответствующих пространств V_i с данными (координатными) гиперплоскостями в $\mathbb{R}^n$. Можно показать, что в этом случае $v \prec u$ в смысле порядка Брюа на S_n , если и только если $X_v \subset \bar{X}_u$, где $\bar{X}_u$ – замыкание клетки X_u .

Можно найти похожие интерпретации порядка Брюа для других классических и спорадических групп. Оказывается, что существует аналог пространства флагов $F(G) = G/B^+$, где B^+ – положительная подгруппа Бореля группы G . Также имеется аналог клеточного разбиения Брюа пространства $F(G)$, заданного орбитами подгруппы Бореля B^+ , занумерованными элементами из W_G , но его связь с порядком Брюа на W_G не так очевидна, особенно в случае спорадических групп Ли.

2.3. Система Тоды. Литература о потоках Тоды довольно обширна. В нашем рассмотрении мы следуем работам [2] и [12]. Другие детали, в частности интегрируемость, можно найти в статьях [13] и [14]; схема Адлера–Костанта–Симса была развита в [15]–[17].

В теории потоков Тоды важную роль играют системы Тоды на классических простых группах или, скорее, на соответствующих алгебрах Ли (фактически можно говорить об индуцированной системе на соответствующих пространствах флагов G/B^+ , как и в обычном случае). Есть много способов определить систему Тоды на этих группах. Например, можно записать точные формулы для матриц L и M в терминах канонической системы корней (см. работу [2]): для любого базиса Картана–Вейля $H_1, \dots, H_r, E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_{n-r}}$, где $r = \text{rk } \mathfrak{g}$, $n = \dim \mathfrak{g}$, пусть Δ^+ определяет подмножество положительных корней (относительно данного базиса), тогда

$$L = \sum_{i=1}^r a_i H_i + \sum_{\alpha \in \Delta^+} b_{\alpha} (E_{\alpha} + E_{-\alpha}), \quad M = \sum_{\alpha \in \Delta^+} b_{\alpha} (E_{\alpha} - E_{-\alpha}),$$

и мы получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{L} = [M, L]. \quad (1)$$

Другой возможный подход состоит в том, чтобы рассмотреть разложение Ивасавы для группы G и применить к нему схему Адлера–Костанта–Симса. В обоих случаях при $G = SL(n, \mathbb{R})$ мы получим следующие матричные представления:

$$L = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ -b_{12} & 0 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{1n} & -b_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix} = L_+ - L_-,$$

где L_+ и L_- – верхняя и нижняя диагональные части матрицы L .

В настоящей работе мы выбираем точку зрения на обобщенную систему Тоды, которая была использована в работе [7] (см. также [2]). Она основана на следующей идее, обобщающей схему Адлера–Костанта–Симса: *если мы вкладываем группу G в подходящую группу $SL(n, \mathbb{R})$ так, что подалгебра Картана отображается в диагональные матрицы и корневые векторы соответствуют верхней и нижней треугольным матрицам, причем матрицы, соответствующие векторам α и $-\alpha$, получают транспонированием друг друга, то уравнение Тоды дается формулой (2), где матрица Лакса L принадлежит пересечению множества симметричных матриц и образа группы $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_n$, а M задается ограничением процедуры антисимметризации на L .*

В действительности, мы даже можем выбрать вложение, в котором положительные корневые векторы представлены строго верхнетреугольными матрицами, но это больше, чем нужно для наших целей.

Можно показать, что система, полученная таким способом, является гамильтоновой интегрируемой системой. Другим важным свойством системы Тоды является то, что она в некотором смысле имеет структуру градиентного потока. Существует много способов описать это (см., например, [12], [1]). Здесь мы представляем способ, адаптированный для используемой нами конструкции потока Тоды.

Рассмотрим вложение (односвязной вещественной формы) группы G в $SL(n, \mathbb{R})$, как объяснялось выше, тогда максимальная компактная подгруппа в G отображается внутрь группы ортогональных матриц $SO(n, \mathbb{R})$. Кроме того, из уравнения (1) следует, что собственные значения матрицы Лакса сохраняются потоком Тоды. Поскольку каждая вещественная симметричная матрица L может быть представлена в форме $\Psi \Lambda \Psi^t$, где Ψ – ортогональная матрица, Λ – диагональная матрица собственных значений, мы можем использовать данное разложение для матрицы Лакса L системы Тоды; в этом случае Ψ – матрица из максимальной компактной подгруппы $K_G \subset G$ и Λ – матрица из подгруппы Картана группы G .

Таким образом, поскольку матрица Λ не меняется под действием потока Тоды, фиксируя ее, мы получаем динамическую систему для Ψ :

$$\frac{d\Psi}{dt} = M(\Psi)\Psi, \quad M(\Psi) = (\Psi\Lambda\Psi^\dagger)_+ - (\Psi\Lambda\Psi^\dagger)_-. \quad (3)$$

Эта система в определенном смысле эквивалентна потоку Тоды (фактически поток Тоды получен из присоединенного действия $\Psi(t)$ на Λ). Можно рассмотреть эту систему на пространстве флагов, ассоциированном с G , которое эквивалентно $F(G) = K_G/(K_G \cap H)$, где H – выбранная максимальная коммутативная подгруппа.

Теперь можно показать, что уравнения (3) в самом деле заданы градиентным потоком на K_G (или на $F(G)$). Для этого введем инвариантную евклидову структуру на $\mathfrak{so}_n$ (подходящую деформацию формы Киллинга) и продолжим ее до римановой структуры на $SO(n, \mathbb{R})$, а затем ограничим эту структуру на подгруппу K_G , вложенную в ортогональную группу, как объяснялось выше. Тогда можно показать, что уравнение (3) имеет форму градиентного потока относительно выбранной римановой структуры для следующей функции: $F_G(\Psi) = \text{Tr}(\Psi\Lambda\Psi^\dagger N)$, где Λ – матрица собственных значений и N – подходящая диагональная матрица (представляющая элемент в выбранной подгруппе Картана). Список таких элементов для различных групп можно найти, например, в работе [1] (см. также [12]).

Еще одним важным свойством системы (3) является то, что можно найти достаточно большое множество многообразий в $SO(n, \mathbb{R})$, которые сохраняются этой системой. Важное семейство таких инвариантных многообразий составляют так называемые *минорные поверхности* (подробности см. в [18]): они образованы множествами нулей функций

$$M_I^+(g) = \det(g_{1,2,\dots,p}^I), \quad M_J^-(g) = \det(g_{n-q+1,\dots,n-1,n}^J)$$

(здесь $g \in SO(n, \mathbb{R})$, а I и J – мультииндексы, $I = (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n)$, $J = (1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n)$), где $g_{1,2,\dots,p}^I$ (и $g_{n-q+1,\dots,n-1,n}^J$) – подматрицы в g , образованные первыми p строками (соответственно последними q столбцами), среди тех строк (столбцов), номера которых заданы мультииндексом I (мультииндексом J). Ниже мы будем широко использовать эти минорные поверхности, основываясь на факте, что их пересечение со вложенной группой G сохраняется уравнением (3): это следует из того, что минорные поверхности сохраняются всеми уравнениями такого вида.

Другое важное семейство инвариантных подмногообразий потока Тоды на $SL(n, \mathbb{R})$ (или, скорее, на соответствующем пространстве флагов) составляют многообразия Шуберта (см. п. 2.2). Эти многообразия также инвариантны относительно произвольного потока в форме (3). Однако нужно быть осторожными: уравнение (3) можно рассматривать и как динамическую систему на группе G , вложенной в $SL(n, \mathbb{R})$, и как динамическую систему на самой $SL(n, \mathbb{R})$. В последнем случае она содержит клетки Шуберта как инвариантные подмногообразия. Конечно, пересечения этих подмногообразий с G суть инвариантные подмножества системы Тоды на G , однако неясно, какова связь между этими пересечениями и клетками Брюа самой группы G .

2.4. Элементарная теория Морса. Понятие функции Морса и ее свойства можно найти в многочисленных книгах. Ее применение к системе Тоды было рассмотрено нами в работах [3] и [4].

Если поток является градиентным, то это его свойство делает проблему описания фазового портрета системы. Тогда намного проще: как известно, градиентные потоки не могут иметь замкнутых траекторий; траектории градиентных потоков на компактных многообразиях (в частности, на пространстве флагов $F(G)$) всегда соединяют особые точки потока (т.е. точки, в которых векторные поля равны нулю). Кроме того, значение функции f всегда растет в направлении градиента; в частности, если функция f имеет только две особые точки с различными значениями функции f на многообразии, все траектории потока идут от точки с меньшим значением к точке с большим значением.

Особенно хороший тип градиентных полей – поля функций Морса. Напомним определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть f – гладкая вещественнозначная функция на многообразии M ; точка $x_0 \in M$ называется *особой точкой* функции f , если ее дифференциал в x_0 равен нулю. Особая точка x_0 функции f называется *невыврожденной*, если матрица $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})|_{x=x_0}$ невырождена, т.е. если ее детерминант (гессиан функции f в точке x_0) отличен от нуля. Наконец, функция f на гладком компактном многообразии M называется *функцией Морса*, если она имеет на M только конечное число невырожденных особых точек (иногда ставят дополнительное условие, что значения f в этих точках различны).

Функции Морса на гладких многообразиях, их структура и связь с топологией многообразий изучаются теорией Морса. Нам будут нужны только некоторые факты из этой теории.

Матрица $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})|_{x=x_0}$, как любая невырожденная вещественная квадратичная форма, полностью (с точностью до линейных преобразований координат) характеризуется количеством положительных и отрицательных членов после приведения ее к каноническому виду. Разность между количеством положительных и количеством отрицательных членов называется *индексом особой точки* x_0 . Можно доказать, что всегда существуют локальные координаты $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ на M с центром в x_0 такие, что функция f в окрестности точки x_0 в этих замечательных координатах имеет следующую форму:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_n) = f(x_0) + \xi_1^2 + \dots + \xi_k^2 - \xi_{k+1}^2 - \dots - \xi_n^2,$$

где $2k - n$ есть индекс точки x_0 . Более того, эти координаты можно сделать ортогональными в точке x_0 относительно данной римановой структуры (хотя не обязательно ортонормированными).

Подпространство в $T_{x_0}M$, натянутое на базисные векторы $\partial_{\xi_1}, \dots, \partial_{\xi_k}$, есть пространство, касательное к локальному подмногообразию $W_{x_0}^+ \subseteq M$, натянутому на траектории градиентного потока функции f , выходящего из x_0 ; при этом $W_{x_0}^+$ называется *устойчивым многообразием* точки x_0 . Подпространство в $T_{x_0}M$, натянутое на векторы $\partial_{\xi_{k+1}}, \dots, \partial_{\xi_n}$, есть пространство, касательное к подмногообразию $W_{x_0}^-$, натянутому на траектории, входящие в x_0 , при этом $W_{x_0}^-$ называется *неустойчивым многообразием* точки x_0 . Эта информация часто может быть решающей для определения фазовой структуры потока: если мы знаем, например, что в канонической системе координат в окрестности точки x_0 имеются два отрицательных направления, и что, с другой стороны, x_0 – одна из двух особых точек потока в инвариантном двумерном подмногообразии $\Sigma \subset M$, то мы можем заключить, что все траектории, выходящие из x_0 , приходят во вторую точку на Σ .

3. ДВА ПРИМЕРА

В этом разделе рассматриваются геометрические свойства потока Тоды на группе $Sp(4, \mathbb{R})$ и на простейшей исключительной группе G_2 (точнее, на ее вещественной форме). В нашем исследовании здесь мы свободно (и часто без ссылок) используем факты, перечисленные в предыдущих разделах. Похожие вычисления можно найти, например, в [6], [7].

3.1. Группа $Sp(4, \mathbb{R})$. Напомним, что $Sp(2n, \mathbb{R})$ – это группа линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n}$, сохраняющих ориентацию и заданную невырожденную антисимметричную билинейную форму J , т. е.

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \{A \in SL(2n, \mathbb{R}) \mid AJ = JA\}.$$

Обычно выбирают $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, где I_n – единичная матрица размера $n \times n$. Пространство флагов этой группы может быть описано в терминах симплектических подпространств в $\mathbb{R}^{2n}$.

Сконцентрируем теперь наше внимание на группе $Sp(4, \mathbb{R})$. Как известно, все антисимметричные невырожденные формы эквивалентны с точностью до выбора базиса. Но если мы хотим вложить $Sp(4, \mathbb{R})$ в $SL(4, \mathbb{R})$ так, чтобы положительные корни перешли в верхнетреугольные матрицы, нам следует выбрать матрицу J как

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С этого момента мы по умолчанию примем, что, когда мы говорим о симплектических матрицах, такое представление и выбрано. Например, вследствие этого вложения подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ диагональна и ее базис Шевалле дается матрицами

$$h_1 = \text{diag}(1, 0, 0, -1), \quad h_2 = \text{diag}(0, 1, -1, 0), \quad (4)$$

при этом алгебра Ли максимальной компактной подгруппы $U(2)$ в $Sp(4, \mathbb{R})$ состоит из матриц, имеющих форму

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 & \theta_3 & -\theta_4 \\ -\theta_1 & 0 & \theta_2 & \theta_3 \\ -\theta_3 & -\theta_2 & 0 & -\theta_1 \\ \theta_4 & -\theta_3 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Может также быть поучительным обратить пристальное внимание на координатную форму уравнений потока Тоды при таком вложении. В данном случае матрица Лакса – это симметричная матрица в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$:

$$L(U) = U\Lambda U^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & a_2 & -a_4 \\ a_1 & b_2 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & -b_2 & -a_1 \\ -a_4 & a_2 & -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь Λ – диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы L , и U – матрица из $U(2) = Sp(4, \mathbb{R}) \cap SO(4, \mathbb{R})$, максимальной компактной подгруппы группы $Sp(4, \mathbb{R})$. Тогда матрица M из формулы (2) равна

$$M(U) = (U\Lambda U^{-1})_{>0} - (U\Lambda U^{-1})_{<0} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & -a_4 \\ -a_1 & 0 & a_3 & a_2 \\ -a_2 & -a_3 & 0 & -a_1 \\ a_4 & -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Тогда для U выполняется уравнение

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{pmatrix}' =$$

$$= \begin{pmatrix} (-b_1 + \lambda_1)u_{11} & (-b_1 + \lambda_2)u_{12} & (-b_1 - \lambda_2)u_{13} & (-b_1 - \lambda_1)u_{14} \\ (-b_2 + \lambda_1)u_{21} - 2a_1u_{11} & (-b_2 + \lambda_2)u_{22} - 2a_1u_{12} & (-b_2 - \lambda_2)u_{23} - 2a_1u_{13} & (-b_2 - \lambda_2)u_{24} - 2a_1u_{14} \\ (b_2 + \lambda_1)u_{31} - 2a_2u_{11} - 2a_3u_{21} & (b_2 + \lambda_2)u_{32} - 2a_2u_{12} - 2a_3u_{22} & (b_2 - \lambda_2)u_{33} - 2a_2u_{13} - 2a_3u_{23} & (b_2 - \lambda_1)u_{34} - 2a_2u_{14} - 2a_3u_{24} \\ (-b_1 - \lambda_1)u_{41} & (-b_1 - \lambda_2)u_{42} & (-b_1 + \lambda_2)u_{43} & (-b_1 + \lambda_1)u_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-b_1 + \lambda_1)u_{11} & (-b_1 + \lambda_2)u_{12} & (-b_1 - \lambda_2)u_{13} & (-b_1 - \lambda_1)u_{14} \\ (b_2 - \lambda_1)u_{21} + 2a_3u_{31} + 2a_2u_{41} & (b_2 - \lambda_2)u_{22} + 2a_3u_{32} + 2a_2u_{42} & (b_2 + \lambda_2)u_{23} + 2a_3u_{33} + 2a_2u_{43} & (b_2 + \lambda_1)u_{24} + 2a_3u_{34} + 2a_2u_{44} \\ (-b_2 - \lambda_1)u_{31} + 2a_1u_{41} & (-b_2 - \lambda_2)u_{32} + 2a_1u_{42} & (-b_2 + \lambda_2)u_{33} + 2a_1u_{43} & (-b_2 + \lambda_1)u_{34} + 2a_1u_{44} \\ (-b_1 - \lambda_1)u_{41} & (-b_1 - \lambda_2)u_{42} & (-b_1 + \lambda_2)u_{43} & (-b_1 + \lambda_1)u_{44} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Зафиксируем собственные значения матрицы L как $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, так что соответствующий элемент в алгебре Картана есть $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$. Поскольку система Тоды на $Sp(4, \mathbb{R})$ задается ограничением уравнения (2) на $SL(4, \mathbb{R})$, можно описать устойчивые точки потока на пространстве флагов; они даются классами эквивалентности ортогональных матриц в $Sp(4, \mathbb{R})$ (матриц из $SO(4, \mathbb{R}) \cap Sp(4, \mathbb{R}) = U(2)$), которые сохраняют подалгебру Картана $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$, т. е. переводят диагональные матрицы из $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ снова в диагональные матрицы. Существуют восемь матриц перестановок, которые попадают в $U(2)$, мы будем обозначать их как $\tilde{s}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}$, где каждое μ_i равно λ_1 или λ_2 (т. е. мы используем обозначения перестановок с повторениями, см. [4]). Мы также будем использовать упрощенные обозначения $\tilde{s}_i$, $i = 1, \dots, 8$. Перечень матриц $\tilde{s}_i$ может быть найден в [6].

Теперь мы можем использовать формулы из работы [2], которые дают выражения для функций Морса системы Тоды на симплектических пространствах флагов в терминах корней алгебры $Sp(n, \mathbb{R})$. Функция Морса $F_{Sp(2n, \mathbb{R})}$ на $Sp(n, \mathbb{R})$ равна $\text{Tr}(LN)$, где мы имеем $n = 2l$ и матрица N определена следующими формулами:

$$N = (-1)^{1/2} \sum_j x_j h_j, \quad x_j = -\frac{j(2l-j)}{2};$$

в частности, когда $l = 2$ (т. е. для $Sp(4, \mathbb{R})$), есть только два элемента h_1, h_2 , и в этом случае мы будем иметь $x_1 = -3/2$, $x_2 = -2$. Это дает с точностью до постоянного множителя матрицу $N = \text{diag}(0, -1, 7, 6)$.

ТАБЛИЦА 1

i	$\tilde{s}_i$	$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$	Индекс	Миноры u_{ij}
1	$\tilde{s}_{1,2,-2,-1}$	$+, +, +, +$	0	$u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{41}, u_{42}, u_{43}$
2	$\tilde{s}_{-1,-2,2,1}$	$-, -, -, -$	4	$u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{42}, u_{43}, u_{44}$
3	$\tilde{s}_{-1,2,-2,1}$	$+, +, +, -$	1	$u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{42}, u_{43}, u_{44}$
4	$\tilde{s}_{1,-2,2,-1}$	$-, -, -, +$	3	$u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{41}, u_{42}, u_{43}$
5	$\tilde{s}_{2,1,-1,-2}$	$-, +, +, +$	1	$u_{11}, u_{13}, u_{14}, u_{41}, u_{42}, u_{44}$
6	$\tilde{s}_{2,-1,1,-2}$	$-, -, +, +$	2	$u_{11}, u_{13}, u_{14}, u_{41}, u_{42}, u_{44}$
7	$\tilde{s}_{-2,1,-1,2}$	$+, +, -, -$	2	$u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{41}, u_{43}, u_{44}$
8	$\tilde{s}_{-2,-1,1,2}$	$+, -, -, -$	3	$u_{11}, u_{12}, u_{14}, u_{41}, u_{43}, u_{44}$

Выразим квадратичную часть функции $F_{Sp(4, \mathbb{R})}$ в особых точках $\tilde{s}_i$, $i = 1, \dots, 8$, в терминах локальных координат, перенесенных из алгебры Ли (мы переносим их в соответствующую точку левыми сдвигами). Для этого заменим матрицу U в окрестности точки $\tilde{s}_i$ на

$$U = \tilde{s}_i \exp(\Theta) = \tilde{s}_i + \Theta \tilde{s}_i + \frac{1}{2} \Theta^2 \tilde{s}_i + o(\Theta^2). \quad (9)$$

Здесь через $o(\Theta^2)$ обозначена сумма членов третьей и выше степени по θ_i . Таким образом, матрица Лакса в окрестности устойчивой точки дается формулой

$$L(U) = U \Lambda U^{-1} = \tilde{s}_i \Lambda \tilde{s}_i^{-1} + [\Theta, \tilde{s}_i \Lambda \tilde{s}_i^{-1}] - \Theta \tilde{s}_i \Lambda \tilde{s}_i^{-1} \Theta + \frac{1}{2} [\Theta^2, \tilde{s}_i \Lambda \tilde{s}_i^{-1}]_+ + o(\theta^2). \quad (10)$$

Следующее выражение – пример квадратичной части функции $F_{Sp(4, \mathbb{R})}$ в особой точке:

$$d_{\tilde{s}_{1,2,-2,-1}}^2 F_{Sp(4, \mathbb{R})} = \theta_1^2 (\lambda_2 - \lambda_1) + 8\theta_2^2 \lambda_2 + 7\theta_3^2 (\lambda_1 + \lambda_2) + 6\theta_4^2 \lambda_1, \quad \lambda_2 > \lambda_1 > 0.$$

Как можно видеть, функция $F_{Sp(4, \mathbb{R})}$ есть в самом деле функция Морса (более того, гессиан диагонален, когда выбраны координаты θ_i), поэтому мы можем применить теорию Морса снова (как мы делали это в работе [3]). Однако этой информации недостаточно, чтобы восстановить точную картину траекторий, соединяющих особые точки. Поэтому, чтобы собрать больше информации, мы отметим, что, поскольку уравнение (8) есть ограничение уравнения (2) на вложенную группу, его инвариантные многообразия равны пересечениям подгруппы с минорными поверхностями.

В табл. 1 перечислены особые точки нашей системы, их индексы Морса (включая знаки у квадратов координат θ_i в соответствующих гессианах) и минорные поверхности, которым они принадлежат.

Сравнивая индексы Морса точек и множества точек внутри различных инвариантных подмногообразий (минорных поверхностей), мы можем воссоздать фазовый портрет этой системы. Получим следующую диаграмму:

Эта диаграмма однопараметрических семейств траекторий, соединяющих особые точки, которые соответствуют $\tilde{s}_i$. Как можно видеть, она совпадает с диаграммой порядка Брюа для группы Вейля группы $Sp(4, \mathbb{R})$ на рис. 8.3 из монографии [10]. Также отметим, что индексы особых точек совпадают с длинами соответствующих элементов Вейля (в смысле определений, данных в п. 2.2); этот факт также имел место во всех случаях, которые мы рассматривали в работах [3], [4].

3.2. Группа G_2 . Наименьшей спорадической группой из классификационного списка простых групп Ли является группа G_2 (мы будем всегда рассматривать вещественную форму всех классических групп, таким образом, здесь мы имеем дело с тем, что обычно называется $G_2(\mathbb{R})$, а не с соответствующей комплексной группой, которая появляется в списке). Существует много способов ввести эту группу, например как подгруппу в $SL(7, \mathbb{R})$, которая сохраняет заданную симметричную 2-форму и кубическую форму на $\mathbb{R}^7$; альтернативно можно описать ее как группу ортогональных преобразований семимерного евклидова пространства, которая сохраняет своего рода векторное произведение на этом пространстве (индуцированное структурой чисел Кэли).

В настоящей работе наше рассмотрение будет основано на описании группы G_2 , данном Гроссом [19]. Наша цель – вложить эту группу в $SL(7, \mathbb{R})$ так, чтобы все условия, перечисленные в п. 2.3, оставались в силе. Для этого мы сначала строим семимерное представление соответствующей алгебры Ли, удовлетворяющее похожим условиям. Напомним, что $\mathfrak{g}_2$ описывается в терминах корней как алгебра Ли ранга 2 (т. е. размерность ее подалгебры Картана равна 2). В этом случае мы имеем два простых корня, α , β , шесть положительных корней, α , β , $\alpha + \beta$, $2\alpha + \beta$, $3\alpha + \beta$, $3\alpha + 2\beta$, и такое же количество отрицательных (заданных добавлением минуса к положительным). В результате вещественная размерность этой алгебры равна 14; она натянута на два вектора Картана H_α , H_β и на шесть положительных и шесть отрицательных корневых векторов. Коммутационные соотношения соответствующих

положительных корневых векторов определены формулами [19]

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_\beta] &= E_{\alpha+\beta}, & [E_\alpha, E_{\alpha+\beta}] &= 2E_{2\alpha+\beta}, & [E_\alpha, E_{2\alpha+\beta}] &= 3E_{3\alpha+\beta}, \\ [E_\beta, E_{3\alpha+\beta}] &= -E_{3\alpha+2\beta}, & [E_{\alpha+\beta}, E_{2\alpha+\beta}] &= 3E_{3\alpha+2\beta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Другие соотношения вытекают из определений (см. п. 2.1). Эти корневые векторы представлены следующими матрицами [19]:

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\alpha} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_\beta &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{\alpha+\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-(\alpha+\beta)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{2\alpha+\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-(2\alpha+\beta)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{3\alpha+\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-(3\alpha+\beta)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{3\alpha+2\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-(3\alpha+2\beta)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Как можно видеть, это вложение не удовлетворяет условию, что положительные (или отрицательные) корневые векторы представлены строго треугольными матрицами, хотя E_γ и $E_{-\gamma}$ являются транспонированными по отношению друг к другу. Чтобы исключить этот недостаток, мы сопряжем представление ортогональной матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и положим

$$E_\gamma^{\text{new}} = (PE_{-\gamma}P^{-1})^\dagger, \quad E_{-\delta}^{\text{new}} = (PE_\delta P^{-1})^\dagger. \quad (12)$$

Поскольку P ортогональна, это преобразование не затрагивает ключевое свойство ($E_{-\gamma} = E_\gamma^\dagger$). На этом пути получаем следующее представление для корневых векторов:

$$\begin{aligned} E_\alpha^{\text{new}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\alpha}^{\text{new}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_\beta^{\text{new}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\beta}^{\text{new}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{\alpha+\beta}^{\text{new}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-(\alpha+\beta)}^{\text{new}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{2\alpha+\beta}^{\text{new}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-(2\alpha+\beta)}^{\text{new}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{3\alpha+\beta}^{\text{new}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-(3\alpha+\beta)}^{\text{new}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 E_{3\alpha+2\beta}^{\text{new}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-(3\alpha+2\beta)}^{\text{new}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Данные матрицы также удовлетворяют коммутационным соотношениям типа G_2 , хотя и немного модифицированные (в связи с переименованием, см. (12)):

$$\begin{aligned}
 [E_{\alpha}^{\text{new}}, E_{\beta}^{\text{new}}] &= E_{\alpha+\beta}^{\text{new}}, & [E_{\alpha}^{\text{new}}, E_{\alpha+\beta}^{\text{new}}] &= 2E_{2\alpha+\beta}^{\text{new}}, & [E_{\alpha}^{\text{new}}, E_{2\alpha+\beta}^{\text{new}}] &= -3E_{3\alpha+\beta}^{\text{new}}, \\
 [E_{\beta}^{\text{new}}, E_{3\alpha+\beta}^{\text{new}}] &= -E_{3\alpha+2\beta}^{\text{new}}, & [E_{\alpha+\beta}^{\text{new}}, E_{2\alpha+\beta}^{\text{new}}] &= -3E_{3\alpha+2\beta}^{\text{new}}.
 \end{aligned}$$

Как видно, здесь все матрицы являются либо строго верхнетреугольными, либо строго нижнетреугольными, так что матрицы, соответствующие корням γ и $-\gamma$ (для всех γ), транспонированы по отношению друг к другу. Таким образом, выполняется условие на вложение, необходимое для определения системы Тоды выбранным нами способом. В действительности можно было сделать все матрицы, соответствующие положительным корням, верхнетреугольными: для этого следует переобозначить базис корней, но нам это не требуется.

Алгебра Картана (мы получаем ее, сопрягая алгебру Картана, рассмотренную в работе [19], матрицей P) в этом случае состоит из матриц

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, 0, \lambda_3, \lambda_2, -\lambda_1), \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

и мы можем выписать точные матричные представления элементов группы Вейля в этом представлении (т. е. элементов в максимальной компактной подгруппе группы $G_2 \subset SL(7, \mathbb{R})$), так что сопряжение матриц Картана этими элементами дает действие группы Вейля):

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{\omega}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \tilde{\omega}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{\omega}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{\omega}_6 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\tilde{\omega}_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{\omega}_8 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\tilde{\omega}_9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{\omega}_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\tilde{\omega}_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tilde{\omega}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Заметим, что, поскольку мы интересуемся только перестановками $\pm \lambda_i$, индуцированными сопряжениями этих матриц, знак матричных элементов $\tilde{\omega}_i$ здесь не имеет особого значения, поэтому в этих матрицах можно заменить все ± 1 на звездочки.

Теперь оставшаяся часть рассуждения вполне похожа на случай $Sp(4, \mathbb{R})$: мы рассматриваем функцию Морса $F_{G_2}(L) = \text{Tr}(LN)$, где можно положить (см. [1])

$$N = \text{diag}(-11, -8, -3, 0, 3, 8, 11),$$

а L есть симметричная матрица из алгебры $\mathfrak{g}_2$, которая может рассматриваться как подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{sl}(7, \mathbb{R})$, порожденная корневыми матрицами E_7^{new} , перечисленными выше. Далее, антисимметричная часть этой вложенной алгебры $\mathfrak{g}_2$, которая соответствует алгебре Ли максимальной компактной подгруппы группы G_2 , натянута на матрицы

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta_6 & -\theta_5 & -\sqrt{2}\theta_4 & \theta_2 & \theta_1 & 0 \\ -\theta_6 & 0 & -\theta_3 & \sqrt{2}\theta_5 & -\theta_4 & 0 & -\theta_1 \\ \theta_5 & \theta_3 & 0 & \sqrt{2}\theta_6 & 0 & \theta_4 & -\theta_2 \\ \sqrt{2}\theta_4 & -\sqrt{2}\theta_5 & -\sqrt{2}\theta_6 & 0 & -\sqrt{2}\theta_6 & -\sqrt{2}\theta_5 & \sqrt{2}\theta_4 \\ -\theta_2 & \theta_4 & 0 & \sqrt{2}\theta_6 & 0 & \theta_3 & \theta_5 \\ -\theta_1 & 0 & -\theta_4 & \sqrt{2}\theta_5 & -\theta_3 & 0 & -\theta_6 \\ 0 & \theta_1 & \theta_2 & -\sqrt{2}\theta_4 & -\theta_5 & \theta_6 & 0 \end{pmatrix},$$

где θ_i – (вещественные) координаты на этой алгебре Ли. Левый сдвиг (этих координат) при помощи $g \in G_2$ можно использовать в качестве локальных координат

ТАБЛИЦА 2

i	$\tilde{\omega}_i$	$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$	Индекс	Миноры o_{ij}
1	$\tilde{\omega}_0$	$+, +, -, +, -, +$	2	$o_{12}, o_{13}, o_{14}, o_{15}, o_{16}, o_{17}$
2	$\tilde{\omega}_1$	$-, -, -, -, -, +$	5	$o_{11}, o_{12}, o_{13}, o_{14}, o_{15}, o_{16}$
3	$\tilde{\omega}_2$	$-, +, -, +, -, +$	3	$o_{11}, o_{12}, o_{13}, o_{14}, o_{15}, o_{17}$
4	$\tilde{\omega}_3$	$-, +, -, -, -, +$	4	$o_{11}, o_{13}, o_{14}, o_{15}, o_{16}, o_{17}$
5	$\tilde{\omega}_4$	$+, +, -, +, +, +$	1	$o_{11}, o_{12}, o_{14}, o_{15}, o_{16}, o_{17}$
6	$\tilde{\omega}_5$	$-, -, -, -, -, -$	6	$o_{11}, o_{12}, o_{13}, o_{14}, o_{16}, o_{17}$
7	$\tilde{\omega}_6$	$+, +, +, +, +, -$	1	$o_{12}, o_{13}, o_{14}, o_{15}, o_{16}, o_{17}$
8	$\tilde{\omega}_7$	$-, -, +, -, +, -$	4	$o_{11}, o_{12}, o_{13}, o_{14}, o_{15}, o_{16}$
9	$\tilde{\omega}_8$	$+, -, +, -, +, -$	3	$o_{11}, o_{13}, o_{14}, o_{15}, o_{16}, o_{17}$
10	$\tilde{\omega}_9$	$+, -, +, +, +, -$	2	$o_{11}, o_{12}, o_{13}, o_{14}, o_{15}, o_{17}$
11	$\tilde{\omega}_{10}$	$-, -, +, -, -, -$	5	$o_{11}, o_{12}, o_{13}, o_{14}, o_{16}, o_{17}$
12	$\tilde{\omega}_{11}$	$+, +, +, +, +, +$	0	$o_{11}, o_{12}, o_{14}, o_{15}, o_{16}, o_{17}$

на G_2 в окрестности элемента g . Тогда квадратичную часть функции F_{G_2} в особых точках, реализованных перечисленными выше представителями группы Вейля $\tilde{\omega}_i$, можно вычислить точно. Например,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d_{\tilde{\omega}_0}^2 F_{G_2} &= 19\theta_1^2(\lambda_1 - \lambda_2) + 14\theta_2^2(\lambda_1 - \lambda_3) + 5\theta_3^2(\lambda_3 - \lambda_2) + \\ &+ 11\theta_4^2(2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) + 8\theta_5^2(\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3) + 3\theta_6^2(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3). \end{aligned}$$

Фиксируем порядок собственных значений наложением условия $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Как и раньше, можно вычислить индексы особых точек, найти положительные/отрицательные направления относительно квадратичной формы $d^2 F_{G_2}$ в касательном пространстве максимальной компактной подгруппы G_2 в этих точках и перечислить минорные поверхности, содержащие эти точки. Эти данные представлены в табл. 2.

Анализируя инвариантные минорные подмногообразия, мы получаем картину всех возможных траекторий, соединяющих две особые точки (см. рис. 1, в котором мы опустили “максимальные” траектории, идущие из самого низа к самому верху диаграммы). Если мы уберем линии, которые соответствуют подмногообразиям высших размерностей, натянутым на траектории, мы получим рис. 2. Этот рисунок совпадает с диаграммой Хассе порядка Брюа группы G_2 с точностью до перестановок элементов. Это происходит из-за того, что выбранный нами порядок собственных значений не совпадает с каноническим $\lambda_1 < -\lambda_2 < -\lambda_3 < 0 < \lambda_3 < \lambda_2 < -\lambda_1$. Можно проверить, что, если учесть этот факт, мы получаем обычную диаграмму Брюа $D_6 = W_{G_2}$; более того, индексы точек снова совпадают с длинами элементов Вейля.

Рис. 1. Все возможные одномерные траектории, соответствующие локальным координатам θ_i и соединяющие две особые точки.

Рис. 2. Одномерные траектории, соединяющие две особые точки, которые не покрываются траекториями высших размерностей.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная статья является третьей в серии наших работ [3], [4], посвященных структуре траекторий полной симметричной системы Тоды. В наших предыдущих работах мы показали, что фазовые портреты этой системы на группах $SL(n, \mathbb{R})$ совпадают с диаграммами Брюа перестановок, как в обычном смысле, если собственные значения различны, так и с диаграммами Брюа перестановок с повторениями, когда некоторые собственные значения совпадают. Как мы объясняли в начале, обобщенная система Тоды может быть определена для произвольной полупростой группы Ли. В этом случае группа Вейля будет играть роль группы перестановок S_n . Таким образом, возникает естественный вопрос, справедливы ли аналогичные результаты для этого случая? Выражаясь точнее, можно сделать следующее предположение.

ГИПОТЕЗА. Фазовый портрет системы Тоды, ассоциированной с полупростой группой Ли, в случае, когда все собственные значения матрицы Лакса различны, совпадает с порядком Брюа на соответствующей группе Вейля. Точнее говоря, неподвижные точки этой системы взаимно однозначно соответствуют элементам группы Вейля, а траектории между двумя такими точками существуют, если и только если соответствующие элементы сравнимы по порядку Брюа. Более того, размерность пространства таких траекторий равна числу точек в соответствующем интервале Брюа. В частности, индекс Морса точки равен длине элемента в группе Вейля. Похожее утверждение справедливо для случая совпадающих собственных значений, но на этот раз следует рассматривать порядок Брюа на соответствующем “частичном пространстве флагов”.

Данное утверждение выглядит очень правдоподобно. Однако, неясно, легко ли его доказать в общем случае. Одной из возможных стратегий могло бы быть использование вложения полупростой группы в $SL(n; \mathbb{R})$ (для подходящего n), которое мы здесь применяли. Тогда динамика системы Тоды индуцирована ограничением уравнения (2) на вложенную группу, поэтому можно найти неподвижные точки системы, а также некоторое семейство инвариантных подмногообразий, индуцированных пересечениями вложенной подгруппы с инвариантными многообразиями потока Тоды на $SL(n, \mathbb{R})$ (см. работы [18], [20], [3]).

Этого, однако, недостаточно, чтобы сделать окончательный вывод, поскольку не все необходимые составляющие наших рассуждений из [3] могут быть перенесены с большой группы на вложенную подгруппу таким способом. Например, прямое вычисление показывает, что функция Морса, которая индуцирует систему Тоды, ассоциированную с $Sp(4; \mathbb{R})$, не совпадает с ограничением функции Морса группы $SL(4; \mathbb{R})$ (т.е. с функцией, которая индуцирует полную симметричную систему Тоды). Это означает, что нельзя использовать свойства функции Морса на $SL(n, \mathbb{R})$ (неподвижные точки, гессианы и т.д.) при изучении системы на подгруппе. С другой стороны, существует более чем одно вложение $Sp(4, \mathbb{R})$ в $SL(n, \mathbb{R})$, которое удовлетворяет условиям, перечисленным выше (т.е. переводит алгебру Картана в диагональные матрицы, а борелевские подгруппы – в верхне- и нижнетреугольные матрицы), и мы не можем сказать, удовлетворяют ли некоторые из них дополнительным свойствам или нет.

Еще менее ясно, как эти вложения ведут себя относительно клеток Брюа. Например, неясно, будет ли такое вложение переводить клетки Брюа подгруппы в клетки группы $SL(n, \mathbb{R})$; хотя выглядит вполне правдоподобным, что необходимое нам

вложение можно выбрать так, что клетки Брюа в подгруппе совпадают с пересечениями этой группы и клеток Брюа в $SL(n, \mathbb{R})$. Если это так, то стратегия доказательства нашей гипотезы станет понятной, поскольку мы знаем [3], что клетки Брюа в $SL(n, \mathbb{R})$ являются инвариантными многообразиями полной симметричной системы Тоды. Правдоподобность этого утверждения подкрепляется просто видом диаграммы, из которого можно заключить, что порядок, индуцированный на группе Вейля группы $Sp(4, \mathbb{R})$ ее естественным включением в S_4 , совпадает с истинным порядком Брюа на ней (даже при том, что длины элементов в этих двух группах не совпадают).

Однако вопрос, существует ли вложение, которое связывает клетки Брюа, хотя и сформулирован вполне классически, кажется, неизвестен специалистам. Представляется, что довольно трудно доказать это утверждение напрямую, поскольку само понятие алгебры Картана группы $SL(n, \mathbb{R})$ сильно отличается от образа алгебры Картана включенной подгруппы, даже когда включение переводит ее в диагональные матрицы алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Например, в случае $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ образ подалгебры Картана $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ состоит из матриц, собственные значения которых имеют кратность 2, хотя с точки зрения симплектической алгебры их координаты различны.

Также оказывается, что не так много известно о комбинаторике порядка Брюа на других вещественных простых группах, отличных от $SL(n, \mathbb{R})$, и о ее связи с клетками Брюа и двойственными клетками Брюа на группах и пространствах флагов. Все это делает проблему более трудной. С другой стороны, можно надеяться, что решение этой проблемы может пролить свет на структуру порядка Брюа на группах Вейля: например, будет возможно использовать динамику Тоды (которая довольно хорошо изучена) для описания порядка в случаях, когда обычным способом вычислить порядок слишком сложно. Структура “частичных многообразий флагов”, которая получается, если допустить совпадение некоторых собственных значений, кажется еще более интригующей. Мы надеемся решить эти проблемы в будущем.

Список литературы

- [1] A. M. Bloch, R. W. Brockett, T. S. Ratiu, “Completely integrable gradient flows”, *Commun. Math. Phys.*, **147**:1 (1992), 57–74.
- [2] Y. Kodama, J. Ye, “Iso-spectral deformations of general matrix and their reductions on Lie algebras”, *Commun. Math. Phys.*, **178**:3 (1996), 765–788.
- [3] Yu. B. Chernyakov, G. I. Sharygin, A. S. Sorin, “Bruhat order in full symmetric Toda system”, *Commun. Math. Phys.*, **330**:1 (2014), 367–399, arXiv: 1212.4803.
- [4] Yu. B. Chernyakov, G. I. Sharygin, A. S. Sorin, “Bruhat order in the full symmetric $\mathfrak{sl}_n$ Toda lattice on partial flag space”, *SIGMA*, **12** (2016), 084, 25 pp., arXiv: 1412.8116.
- [5] P. Deift, T. Nanda, C. Tomei, “Ordinary differential equations and the symmetric eigenvalue problem”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**:1 (1983), 1–22.
- [6] P. Fré, A. S. Sorin, “The Weyl group and asymptotics: All supergravity billiards have a closed form general integral”, *Nucl. Phys. B*, **815**:3 (2009), 430–494, arXiv: 0710.1059.
- [7] P. Fré, A. S. Sorin, M. Trigiante, “Integrability of supergravity black holes and new tensor classifiers of regular and nilpotent orbits”, *JHEP*, **04** (2012), 015, 105 pp., arXiv: 1103.0848.
- [8] Y. Kodama, L. Williams, “The full Kostant–Toda hierarchy on the positive flag variety”, *Commun. Math. Phys.*, **335**:1 (2015), 247–283, arXiv: 1308.5011.
- [9] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, МЦНМО, М., 2006.

- [10] A. Björner, F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **231**, Springer, New York, 2005.
- [11] M. Brion, “Lectures on the Geometry of Flag Varieties”, *Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties*, Trends in Mathematics, ed. P. Pragacz, Birkhäuser, Basel, 2005, 33–85, arXiv:math/0410240.
- [12] F. De Mari, M. Pedroni, “Toda flows and real Hessenberg manifolds”, *J. Geom. Anal.*, **9**:4 (1999), 607–625.
- [13] P. Deift, L. C. Li, T. Nanda, C. Tomei, “The Toda flow on a generic orbit is integrable”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **39**:2 (1986), 183–232.
- [14] N. Ercolani, H. Flaschka, S. Singer, “The geometry of the full Kostant–Toda lattice”, *Integrable Systems* (Luminy, France, July 1–5, 1991), Progress in Mathematics, **115**, eds. O. Babelon, P. Cartier, Y. Kosmann-Schwarzbach, Birkhäuser, Boston, 1993, 181–226.
- [15] M. Adler, “On a trace functional for pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg–DeVries type equations”, *Invent. Math.*, **50**:3 (1979), 219–248.
- [16] B. Kostant, “The solution to a generalized Toda lattice and representation theory”, *Adv. Math.*, **34**:3 (1979), 195–338.
- [17] W. W. Symes, “Systems of Toda type, inverse spectral problems, and representation theory”, *Invent. Math.*, **59**:1 (1980), 13–51.
- [18] Yu. B. Chernyakov, A. S. Sorin, “Explicit semi-invariants and integrals of the full symmetric $\mathfrak{sl}_n$ Toda lattice”, *Lett. Math. Phys.*, **104**:8 (2014), 1045–1052, arXiv:1306.1647.
- [19] K. I. Gross, “The Plancherel transform on the nilpotent part of G_2 and some applications to the representation theory of G_2 ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **132**:2 (196), 411–446.
- [20] А. С. Сорин, Ю. Б. Черняков, “Новый метод построения полуинвариантов и интегралов полной симметричной $\mathfrak{sl}_n$ решетки Тоды”, *ТМФ*, **183**:2 (2015), 222–253, arXiv:1312.4555.

Поступила в редакцию 18.10.2016