Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, Н. М. Гордеева, Поведение плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа в слое проводящей среды, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 3, 506–522

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9290>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:08:01

© 2017 г.

А. В. Латышев^{*}, Н. М. Гордеева[†]

ПОВЕДЕНИЕ ПЛАЗМЫ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ВЫРОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В СЛОЕ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ

Получено аналитическое решение граничной задачи о поведении (колебаниях) электронной плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа в слое проводящей среды, находящемся во внешнем электрическом поле. Применяются кинетическое уравнение Власова–Больцмана с интегралом столкновений типа Бхатнагара–Гросса–Крука и уравнение Максвелла для электрического поля. Используются зеркальные граничные условия отражения электронов от границы слоя. Граничная задача сводится к одномерной и односкоростной. Для этого применяется метод последовательных приближений, линеаризация уравнений относительно абсолютного распределения электронов Ферми–Дирака и закон сохранения числа частиц. Затем разделение переменных сводит уравнения задачи к характеристической системе уравнений. В пространстве обобщенных функций находятся собственные решения исходной системы, отвечающие непрерывному спектру (моды Ван Кампена). Далее путем решения дисперсионного уравнения находятся собственные решения, отвечающие присоединенному и дискретному спектрам (моды Друде и Дебая). Затем составляется общее решение граничной задачи в виде разложения по собственным решениям. Коэффициенты разложения находятся из граничных условий. Это позволяет в явном виде получить разложения функции распределения и электрического поля в явном виде.

Ключевые слова: характеристическая система, собственные функции, моды Друде, Дебая и Ван Кампена, разложение решения по собственным функциям.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9290>

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о колебаниях электронной плазмы впервые рассматривалась Власовым [1]. Ландау [2] аналитически решил задачу о поведении бесстолкновительной плазмы в полупространстве, находящемся во внешнем перпендикулярном поверхностности электрическом поле, при зеркальном отражении электронов от границы. Поэтому задачу о колебаниях плазмы естественно называть задачей Власова–Ландау.

^{*}Московский государственный областной университет, Москва, Россия

[†]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия. E-mail: nmgordeeva@yandex.ru

Впервые задача о колебаниях вырожденной электронной плазмы в слое металла была аналитически решена в работе [3]. Колебания максвелловской плазмы в полупространстве рассмотрены в работе [4]. Настоящая работа является продолжением работ [3] и [4] и обобщением их результатов на общий случай плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа.

С диффузным граничным условием для столкновительной плазмы эта задача в полупространстве была рассмотрена впервые в работе [5], где изучались общие вопросы разрешимости данной задачи с диффузными граничными условиями, исследована структура дискретного спектра в зависимости от параметров задачи. Детальный анализ решения в общем случае в указанной работе не проводился ввиду сложного характера этого решения.

Полное решение задачи о колебаниях вырожденной плазмы дано в работах [6], [7].

Родственные задачи возникают при исследовании отражения электромагнитного поля, они были рассмотрены в работах [8], [9] методом интегральных преобразований.

В работах [10], [11] был проведен общий асимптотический анализ поведения электрического поля на большом расстоянии от поверхности. В работе [10] указано на особое значение анализа поведения поля вблизи плазменного резонанса. В работе [11] выяснено, что поведение поля в этом случае для зеркального и диффузного рассеяний электронов на поверхности существенно различается.

Данная задача имеет большое значение в теории плазмы (см., например, [12], [13]) и продолжает изучаться в различных постановках и в настоящее время [14].

Целью настоящей работы является аналитическое решение. Сведение задачи к одномерной и односкоростной является решающим шагом в получении аналитического решения. Эта идея не нова. Она восходит к Ландау [2], который и предложил основную идею – рассматривать продольное внешнее электрическое поле, направленное вдоль оси x . После этого предположения задача становится одномерной (вдоль оси x) и односкоростной. Этой скоростью в задаче является проекция v_x скорости электронов $\mathbf{v}$ на ось x . Исходная трехмерная (по пространству и по скоростям) задача при такой декомпозиции ничуть не теряет общности. Ведь декомпозиция обусловлена лишь направлением внешнего электрического поля.

При переходе к безразмерным переменным и параметрам в уравнениях естественным образом возникает малый параметр – возмущение безразмерного (химического) потенциала, вызываемое наличием внешнего электрического поля. Используя метод малого параметра, линеаризуем задачу относительно абсолютного распределения электронов Ферми–Дирака. Применяя далее закон сохранения числа частиц, окончательно формулируем проблему в виде одномерной и односкоростной граничной задачи.

Разделение переменных сводит уравнения задачи к характеристической системе уравнений, содержащей спектральный параметр. В пространстве обобщенных функций находится континуальное семейство собственных решений исходной системы, отвечающих непрерывному спектру. Это моды Ван Кампена. Этому семейству отвечает одно решение в виде интеграла по непрерывному спектру от собственных решений, умноженных на неизвестную функцию, называемую коэффициентом непрерывного спектра.

Далее путем решения дисперсионного уравнения мы находим собственные решения, отвечающие присоединенному и дискретному спектрам. Это соответственно

моды Друде и Дебая. Затем составляется общее решение граничной задачи в виде разложения по собственным решениям, отвечающим непрерывному, присоединенному и дискретному спектрам. Это разложение есть сумма интеграла по непрерывному спектру от соответствующих собственных решений, умноженных на некоторую функцию спектрального параметра, и собственных решений, отвечающих присоединенному и дискретному спектрам, умноженных на неизвестные постоянные. Это коэффициенты, отвечающие присоединенному и непрерывному спектрам.

Коэффициенты разложения решения, отвечающие непрерывному, присоединенному и дискретному спектрам, находятся из граничных условий. Это позволяет получить разложения функции распределения и электрического поля в явном виде.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть невырожденная плазма Ферми–Дирака занимает слой $|x| < L$, заполненный проводящей средой. Будем считать внешнее поле достаточно слабым, чтобы было применимо линейное приближение [12]. Будем использовать τ -модельное уравнение Власова–Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu (f_{\text{eq}} - f) \quad (1)$$

и уравнение Максвелла для электрического поля

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \rho = e \int (f - f_0) d\Omega, \quad d\Omega = \frac{(2s+1)d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (2)$$

Здесь f_{eq} – локально-равновесная функция распределения Ферми–Дирака,

$$f_{\text{eq}}(\mathbf{r}, v, t) = \left\{ 1 + e^{(\mathcal{E} - \mu(\mathbf{r}, t))/kT} \right\}^{-1},$$

$f_0 = f_{\text{FD}}$ – невозмущенная (абсолютная) функция распределения Ферми–Дирака,

$$f_0(v, \mu) = f_{\text{FD}}(v, \mu) = \left\{ 1 + e^{(\mathcal{E} - \mu)/kT} \right\}^{-1},$$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс электрона, $\mathcal{E} = mv^2/2$ – кинетическая энергия электрона, μ и $\mu(\mathbf{r}, t)$ – соответственно невозмущенный и возмущенный химический потенциал, e и m – заряд и масса электрона, ρ – плотность заряда, $\hbar$ – постоянная Планка, ν – эффективная частота рассеяния электронов, s – спин частиц, для электрона $s = 1/2$, k – постоянная Больцмана, T – температура плазмы, которая считается постоянной в данной задаче, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ – электрическое и магнитное поля внутри плазмы.

Уравнения (1) и (2) сведем к односкоростным и одномерным. Этот шаг необходим для получения аналитического решения. Идея, как указывалось, принадлежит Ландау [2], который предложил рассматривать продольное внешнее электрическое поле, направленное вдоль оси x .

Итак, будем рассматривать продольное внешнее электрическое поле вне плазмы, перпендикулярное границе плазмы, которое изменяется по закону $\mathbf{E}_{\text{ext}}(t) = E_0 e^{-i\omega t}(1, 0, 0)$. Самосогласованное электрическое поле внутри плазмы будем обозначать через $\mathbf{E}(x, t) = E(x) e^{-i\omega t}(1, 0, 0)$. Нетрудно проверить, что при выбранной конфигурации внешнего электрического поля $\mathbf{H} = -(ic/\omega) \text{rot } \mathbf{E} = 0$. Таким образом, магнитное поле не входит в уравнение (1). Так как внешнее поле имеет одну

x -компоненту, то функция распределения f имеет вид $f = f(x, v_x, t)$, v_x – проекция скорости электронов на ось x . Внешнее электрическое поле вызывает изменение химического потенциала $\mu(x, t) = \mu + \delta\mu(x)e^{-i\omega t}$, $\mu = \text{const}$ – значение химического потенциала, отвечающее отсутствию внешнего электрического поля на границе плазмы. Введем безразмерный (приведенный) химический потенциал электронного газа $\alpha(x, t) = \mu(x, t)/kT$. Для приведенного химического потенциала предыдущее равенство имеет вид $\alpha(x, t) = \alpha + \delta\alpha(x)e^{-i\omega t}$, $\alpha = \text{const}$.

Будем считать, что величина $\delta\alpha(x, t) = \delta\alpha(x)e^{-i\omega t}$, представляющая собой возмущение приведенного химического потенциала, является малым параметром, т. е. $|\delta\alpha(x, t)| = |\delta\alpha(x)| \ll 1$. Физически это неравенство означает, что возмущение химического потенциала много меньше тепловой энергии электронов: $|\delta\mu(x, t)| \ll \mathcal{E}_T$, $\mathcal{E}_T = mv_T^2/2$. Будем действовать методом последовательных приближений, считая, что $|\delta\alpha(x)| \ll 1$.

Линеаризацию уравнений (1) и (2) проведем относительно абсолютной функции распределения Ферми–Дирака f_0 . Одновременно перейдем к безразмерным переменным и параметрам.

Введем безразмерный импульс (скорость) электронов $\mathbf{P} = \mathbf{p}/p_T = \mathbf{v}/v_T$, где $v_T = \sqrt{2kT/m}$ есть тепловая скорость электронов, и безразмерный (приведенный) химический потенциал $\alpha = \mu/kT$. Линеаризуем локально-равновесную функцию распределения: $f_{\text{eq}}(x, P, t) = f_0(P, \alpha) + g(P, \alpha)\delta\alpha(x)e^{-i\omega t}$, где

$$f_0(P, \alpha) = f_{\text{FD}}(P, \alpha) = \frac{1}{1 + e^{P^2 - \alpha}}, \quad g(P, \alpha) = \frac{e^{P^2 - \alpha}}{(1 + e^{P^2 - \alpha})^2}.$$

Линеаризуем функцию распределения электронов:

$$f(x, P_x, t) = f_0(P, \alpha) + g(P, \alpha)h(x, P_x)e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

где $h(x, P_x)$ – новая неизвестная функция.

Заметим, что в линейном приближении

$$e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = e\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \frac{e}{p_T} \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{P}} = -E(x)e^{-i\omega t} \frac{2eP_x}{p_T} g(P, \alpha).$$

Вместо уравнений (1) и (2) с помощью (3) и предыдущих соотношений получаем

$$-i\omega h(x, P_x) + v_T P_x \frac{\partial h}{\partial x} + \nu h(x, P_x) = eE(x) \frac{2P_x}{p_T} + \nu \delta\alpha(x), \quad (4)$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{8\pi e p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int h(x, P_x) g(P, \alpha) d^3P. \quad (5)$$

Величина $\delta\alpha(x)$ определяется из закона сохранения числа частиц:

$$\int f_{\text{eq}} d\Omega = \int f d\Omega.$$

Из этого уравнения находим, что

$$\delta\alpha(x) = \int h(x, P_x) g(P, \alpha) d\Omega \left[\int g(P, \alpha) d\Omega \right]^{-1}.$$

Здесь

$$\int g(P, \alpha) d^3 P = 4\pi g_2(\alpha), \quad g_2(\alpha) = \int_0^\infty g(P, \alpha) P^2 dP = \frac{1}{2} s_0(\alpha),$$

где

$$s_0(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dP}{1 + e^{P^2 - \alpha}} = \int_0^\infty f_0(P, \alpha) dP.$$

Отсюда ясно, что

$$\delta\alpha(x) = \frac{1}{4\pi g_2(\alpha)} \int h(x, P_x) g(P, \alpha) d^3 P.$$

Вычисляя здесь внутренний двойной интеграл в плоскости (P_y, P_z) , получаем

$$\delta\alpha(x) = \frac{1}{2s_0(\alpha)} \int_{-\infty}^\infty f_0(P_x, \alpha) h(x, P_x) dP_x.$$

Далее будем полагать, что $E(x) = E_0 e(x)$. Система уравнений (4) и (5) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} v_T P_x \frac{\partial h}{\partial x} + (\nu - i\omega) h(x, P_x) &= \frac{2eE_0}{p_T} P_x e(x) + \\ &+ \frac{\nu}{2s_0(\alpha)} \int_{-\infty}^\infty f_0(P_x, \alpha) h(x, P_x) dP_x, \end{aligned} \quad (6)$$

$$E_0 \frac{de(x)}{dx} = \frac{8\pi^2 e p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-\infty}^\infty f_0(P_x, \alpha) h(x, P_x) dP_x. \quad (7)$$

В этих уравнениях перейдем к безразмерным величинам и функциям

$$x_1 = \frac{x}{\lambda}, \quad \lambda = \tau v_T, \quad P_x = \mu, \quad H(x_1, \mu) = \frac{\nu p_T}{2eE_0} h(x, \mu),$$

где λ – средняя длина свободного пробега электронов (между двумя последовательными столкновениями). В результате перехода к безразмерным параметрам и функциям получаем следующую систему уравнений:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial x_1} + w_0 H(x_1, \mu) = \mu e(x_1) + \int_{-\infty}^\infty k(\mu', \alpha) H(x_1, \mu') d\mu', \quad (8)$$

$$\frac{de(x_1)}{dx_1} = \kappa^2(\alpha) \int_{-\infty}^\infty k(\mu', \alpha) H(x_1, \mu') d\mu', \quad (9)$$

где

$$\kappa^2(\alpha) = \frac{32\pi^2 e^2 p_T^3 s_0(\alpha)}{(2\pi\hbar)^3 m \nu^2},$$

введена новая функция $k(\mu, \alpha) = f_0(\mu, \alpha)/2s_0(\alpha)$, обладающая свойством

$$\int_{-\infty}^\infty k(\mu, \alpha) d\mu = 1,$$

кроме того, $w_0 = 1 - i\omega/\nu = 1 - i\omega\tau = 1 - i\Omega/\varepsilon$, где $\Omega = \omega/\omega_p$, $\varepsilon = \nu/\omega_p$, ω_p – плазменная (ленгмюровская) частота, $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$, N – числовая плотность

Рис. 1. Графики функции $k(\mu, \alpha)$ при $\alpha = -3, 0, 3$ (кривые 1, 2, 3 соответственно).

(концентрация) электронов в равновесном состоянии. Поведение ядер уравнений (8) и (9) при различных значениях химического потенциала приведено на рис. 1. Из определения числовой плотности вытекает, что

$$N = \int f_0(P, \alpha) d\Omega = \frac{2p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3P}{1 + e^{P^2 - \alpha}} = \frac{8\pi p_T^3}{(2\pi\hbar)^3} s_2(\alpha),$$

где

$$s_2(\alpha) = \int_0^\infty \frac{P^2 dP}{1 + e^{P^2 - \alpha}} = \int_0^\infty P^2 f_0(P, \alpha) dP.$$

Следовательно, числовая плотность частиц плазмы и тепловое волновое число $k_T = mv_T/\hbar$ связаны соотношением $N = (s_2(\alpha)/\pi^2)k_T^3$, кроме того,

$$\varkappa^2(\alpha) = \frac{\omega_p^2}{\nu^2} \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} = \frac{\Omega_p^2}{r(\alpha)} = \frac{1}{\varepsilon^2 r(\alpha)},$$

где

$$r(\alpha) = \frac{s_2(\alpha)}{s_0(\alpha)}, \quad \varepsilon = \frac{\nu}{\omega_p} = \frac{1}{\tau\omega_p} = \frac{1}{\Omega_p}, \quad \Omega_p = \omega_p\tau.$$

Графики функций $s_0(\alpha)$, $s_2(\alpha)$ и $r(\alpha)$ изображены на рис. 2.

С помощью выражений для $\varkappa^2(\alpha)$ уравнения (9) запишем в виде

$$\frac{de(x_1)}{dx_1} = \frac{1}{\varepsilon^2 r(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} k(\mu', \alpha) H(x_1, \mu') d\mu'. \quad (10)$$

Известно, что частота плазменных колебаний, как правило, много больше частоты столкновений электронов в металле [15]. Наиболее типичные значения величины ε заключены в интервале: $10^{-4} \leq \varepsilon \leq 10^{-2}$.

Рис. 2. Графики функций $s_0(\alpha)$ (кривая 1), $s_2(\alpha)$ (кривая 2) и $r(\alpha)$ (кривая 3) при изменении приведенного химического потенциала от $\alpha = -5$ до $\alpha = 10$.

В случае зеркального отражения электронов от границы плазмы для функции распределения электронов имеем следующие граничные условия на границе слоя размера $2L$:

$$f(\pm L, v_x, v_y, v_z, t) = f(\pm L, -v_x, v_y, v_z, t), \quad -\infty < v_x < +\infty.$$

Отсюда для функции $H(x_1, \mu)$ получаем зеркальные граничные условия:

$$H(l, \mu) = H(l, -\mu), \quad H(-l, \mu) = H(-l, -\mu), \quad \mu > 0, \quad (11)$$

где $l = L/\lambda$ – величина слоя в единицах свободного пробега электронов.

Для электрического поля граничное условие имеет вид

$$e(l) = 1, \quad e(-l) = 1. \quad (12)$$

Таким образом, граничная задача о колебаниях плазмы в слое проводящей среды сформулирована полностью и состоит в нахождении такого решения уравнений (8) и (10), которое удовлетворяет граничным условиям (11) и (12).

3. СОБСТВЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Сначала будем искать общее решение системы уравнений (8) и (10). Разделение переменных согласно общему методу Фурье приводит к следующей подстановке:

$$\begin{aligned} H_\eta(x_1, \mu) &= e^{-w_0 x_1 / \eta} \Phi_1(\eta, \mu) + e^{w_0 x_1 / \eta} \Phi_2(\eta, \mu), \\ e_\eta(x_1) &= [e^{-w_0 x_1 / \eta} + e^{w_0 x_1 / \eta}] E(\eta), \end{aligned} \quad (13)$$

где η – спектральный параметр, или параметр разделения, вообще говоря, комплексный. Подставим равенства (13) в уравнения (8) и (10), получим характеристическую систему уравнений

$$(\eta - \mu)\Phi_1(\eta, \mu) = \eta\mu \frac{E(\eta)}{w_0} + \frac{\eta}{w_0} \int_{-\infty}^{\infty} k(\mu', \alpha)\Phi_1(\eta, \mu') d\mu', \quad (14)$$

$$(\eta + \mu)\Phi_2(\eta, \mu) = \eta\mu \frac{E(\eta)}{w_0} + \frac{\eta}{w_0} \int_{-\infty}^{\infty} k(\mu', \alpha)\Phi_2(\eta, \mu') d\mu', \quad (15)$$

$$-\frac{w_0}{\eta}E(\eta) = \frac{1}{\varepsilon^2 r(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} k(\mu', \alpha)\Phi_1(\eta, \mu') d\mu', \quad (16)$$

$$\frac{w_0}{\eta}E(\eta) = \frac{1}{\varepsilon^2 r(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} k(\mu', \alpha)\Phi_2(\eta, \mu') d\mu'. \quad (17)$$

С помощью (16) и (17) преобразуем уравнения (14) и (15). Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (\eta - \mu)\Phi_1(\eta, \mu) &= \frac{E(\eta)}{w_0}(\mu\eta - \eta_1^2), \\ (\eta + \mu)\Phi_2(\eta, \mu) &= \frac{E(\eta)}{w_0}(\mu\eta + \eta_1^2), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\eta_1^2 = w_0 \varepsilon^2 r(\alpha) = \frac{\nu^2}{\omega_p^2} \left(1 - i\frac{\omega}{\nu}\right) r(\alpha) = \varepsilon(\varepsilon - i\Omega)r(\alpha).$$

При $\eta \in (-\infty, +\infty)$ ищем решение характеристических уравнений (18) в пространстве обобщенных функций [16]:

$$\Phi_1(\eta, \mu) = \frac{E(\eta)}{w_0}(\mu\eta - \eta_1^2)P \frac{1}{\eta - \mu} + g_1(\eta)\delta(\eta - \mu), \quad (19)$$

$$\Phi_2(\eta, \mu) = \frac{E(\eta)}{w_0}(\mu\eta + \eta_1^2)P \frac{1}{\eta + \mu} + g_2(\eta)\delta(\eta + \mu), \quad (20)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, символ Px^{-1} означает главное значение интеграла при интегрировании выражения x^{-1} , функции $g_1(\eta)$ и $g_2(\eta)$ играют роль произвольной “постоянной” интегрирования, $\eta, \mu \in (-\infty, +\infty)$, множество значений η , заполняющих числовую прямую, называют непрерывным спектром характеристического уравнения.

Решения (19) и (20) уравнения (15) называются собственными функциями характеристического уравнения.

Для нахождения функций $g_1(\eta)$ и $g_2(\eta)$ подставим (19) и (20) соответственно в уравнения (16) и (17). В результате получаем

$$g_1(\eta) = -g_2(\eta), \quad g_2(\eta) = \eta_1^2 E(\eta) \frac{\Lambda(\eta)}{\eta k(\eta, \alpha)}.$$

В этих равенствах введена дисперсионная функция

$$\Lambda(z) = \Lambda(z, \Omega, \varepsilon) = 1 + \frac{z}{w_0 \eta_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_1^2 - \mu' z}{\mu' - z} k(\mu', \alpha) d\mu'. \quad (21)$$

С помощью найденных функций $g_1(\eta)$ и $g_2(\eta)$ собственные функции (19) и (20) характеристической системы уравнений (18) представим в виде

$$\Phi_1(\eta, \mu) = \frac{E(\eta)}{w_0} F_1(\eta, \mu), \quad \Phi_2(\eta, \mu) = \frac{E(\eta)}{w_0} F_2(\eta, \mu),$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\eta, \mu) &= P \frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} - \frac{w_0\eta_1^2\Lambda(\eta)}{\eta k(\eta, \alpha)} \delta(\eta - \mu), \\ F_2(\eta, \mu) &= P \frac{\mu\eta + \eta_1^2}{\eta + \mu} + \frac{w_0\eta_1^2\Lambda(\eta)}{\eta k(\eta, \alpha)} \delta(\eta + \mu). \end{aligned}$$

Семейство (13) собственных решений уравнений (8) и (10) отвечает, как уже указывалось, непрерывному спектру. Это семейство непрерывного спектра часто называют модой Ван Кампена.

Заметим, что $F_2(\eta, -\mu) = -F_1(\eta, \mu)$ и $F_2(-\eta, \mu) = F_1(\eta, \mu)$.

Дисперсионную функцию $\Lambda(z)$ можно представить в виде

$$\Lambda(z) = 1 - \frac{1}{w_0} + \frac{\eta_1^2 - z^2}{w_0\eta_1^2} \lambda_0(z, \alpha), \quad (22)$$

где

$$\lambda_0(z, \alpha) = 1 + z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(\mu, \alpha) d\mu}{\mu - z}.$$

По формулам Сохоцкого вычислим граничные значения дисперсионной функции сверху и снизу на действительной оси:

$$\Lambda^{\pm}(\mu) = \Lambda(\mu) \pm i\pi \frac{\mu k(\mu, \alpha)}{w_0\eta_1^2} (\eta_1^2 - \mu^2),$$

где

$$\Lambda(\mu) = 1 + \frac{z}{w_0\eta_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_1^2 - \mu'\mu}{\mu' - \mu} k(\mu', \alpha) d\mu',$$

причем интеграл в этом выражении понимается как особый в смысле главного значения по Коши.

4. СОБСТВЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ПРИСОЕДИНЕННОГО И ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРОВ

Найдем нули дисперсионного уравнения

$$\frac{\Lambda(z)}{z} = 0. \quad (23)$$

Для этого разложим функцию $\lambda_0(z, \alpha)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\lambda_0(z, \alpha) = -\frac{k_2(\alpha)}{z^2} - \frac{k_4(\alpha)}{z^4} + \dots, \quad z \rightarrow \infty.$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_{2n}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\mu', \alpha) \mu'^{2n} d\mu' = \frac{1}{2s_0(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\mu', \alpha) \mu'^{2n} d\mu' = \\ &= \frac{s_{2n}(\alpha)}{s_0(\alpha)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad k_0(\alpha) \equiv 1, \end{aligned}$$

где

$$s_{2n}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\mu', \alpha) \mu'^{2n} d\mu'.$$

Подставим полученное разложение в равенство (22), получим разложение дисперсионной функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\Lambda(z) = \Lambda_{\infty} + \frac{\Lambda_{-2}}{z^2} + \frac{\Lambda_{-4}}{z^4} + \dots, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{\infty} &= 1 - \frac{1}{w_0} + \frac{k_2(\alpha)}{w_0 \eta_1^2}, \quad \Lambda_{-2} = \frac{k_4(\alpha) - \eta_1^2 k_2(\alpha)}{w_0 \eta_1^2}, \\ \Lambda_{-4} &= \frac{k_6(\alpha) - \eta_1^2 k_4(\alpha)}{w_0 \eta_1^2}, \quad \dots \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что значение дисперсионной функции в бесконечно удаленной точке не зависит от химического потенциала и равно

$$\Lambda_{\infty} = \Lambda(\infty) = 1 - \frac{1}{w_0} + \frac{k_2(\alpha)}{w_0 \eta_1^2} = -\frac{\omega^2 - \omega_p^2 + i\nu\omega}{(\nu - i\omega)^2}.$$

Отсюда получаем, что $\Lambda_{\infty} \neq 0$ при любых $\nu \neq 0$, т.е. в любой столкновительной плазме. Из (23) и разложения (24) вытекает, что точка $z_j = \infty$ является нулем дисперсионного уравнения. Эта точка принадлежит спектру, присоединенному к непрерывному спектру $(-\infty, +\infty)$. Точке $z_j = \infty$ отвечает следующее решение исходной системы уравнений (8) и (10):

$$H_{\infty}(x, \mu) = \frac{E_{\infty}}{z_0} \mu, \quad e_{\infty}(x) = E_{\infty}, \quad (25)$$

где E_{∞} – произвольная постоянная.

Решение (25) не зависит от химического потенциала. Его естественно называть модой Друде. Оно описывает объемную проводимость плазмы металла, рассмотренную Друде (см., например, [17]).

По определению дискретным спектром характеристической системы уравнений называется множество конечных комплексных нулей дисперсионного уравнения, не лежащих на действительной оси (разрезах дисперсионной функции).

Из разложения (24) видно, что в окрестности бесконечно удаленной точки существуют два нуля $\pm \eta_0$ дисперсионной функции $\Lambda(z, \alpha)$:

$$\pm \eta_0 \approx \sqrt{\frac{\eta_1^2 k_2(\alpha) - k_4(\alpha)}{\eta_1^2 (w_0 - 1) + k_2(\alpha)}} = \sqrt{\frac{\varepsilon(\varepsilon - i\Omega) s_2^2(\alpha) - s_0(\alpha) s_4(\alpha)}{s_0(\alpha) s_2(\alpha) (1 - \Omega^2 + i\varepsilon\Omega)}}. \quad (26)$$

В силу четности дисперсионной функции ее нули различаются лишь знаком. Под нулем η_0 будем понимать для определенности такое значение радикала из (26),

Рис. 3. Случай $\alpha = 0$. Кривая $L(\alpha)$ разделяет области единичного $D^+(\alpha)$ и нулевого $D^-(\alpha)$ индекса. Если $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$, то $N = 2$, если $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$, то $N = 0$.

что $\text{Re}(w_0/\eta_0) > 0$. Нулям $\pm\eta_0$, составляющим дискретный спектр характеристической системы, отвечает следующее решение исходных уравнений:

$$\begin{aligned} H_{\pm\eta_0}(x_1, \mu) &= e^{-w_0 x_1/\eta_0} \Phi_1(\eta_0, \mu) + e^{w_0 x_1/\eta_0} \Phi_2(\eta_0, \mu), \\ e_{\pm\eta_0}(x_1) &= [e^{-w_0 x_1/\eta_0} + e^{w_0 x_1/\eta_0}] E_0, \end{aligned} \quad (27)$$

где E_0 – произвольная постоянная, а

$$\Phi_1(\eta_0, \mu) = \frac{E_0}{w_0} \frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu}, \quad \Phi_2(\eta_0, \mu) = \frac{E_0}{w_0} \frac{\eta_0 \mu + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu}.$$

Решение (27) естественно назвать модой Дебая (это – плазменная мода). В низкочастотном случае она описывает известное экранирование Дебая [17].

Из (26) видно, что вблизи плазменного резонанса (при $\Omega \approx 1$), т. е. при $\omega \approx \omega_p$, модуль нуля η_0 становится неограниченным, когда $\varepsilon \ll 1$.

Множество физически значимых параметров (Ω, ε) заполняет четверть плоскости $\{\Omega \geq 0, \varepsilon \geq 0\}$. Случай $\Omega = 0$ (или $\omega = 0$) отвечает внешнему стационарному электрическому полю, а случай $\varepsilon = 0$ (или $\nu = 0$) отвечает случаю бесстолкновительной плазмы.

Возникает вопрос: имеются ли еще конечные комплексные нули дисперсионной функции, помимо нулей $\pm\eta_0$? Точно так же, как это сделано в [18], можно показать, что число нулей дисперсионной функции равно удвоенному индексу функции $G(\tau) = \Lambda^+(\tau)/\Lambda^-(\tau)$ на действительной положительной полуоси, $N = 2\kappa(G)$, $\kappa(\alpha) = \text{ind}_{[0, +\infty]} G(\tau)$. Как и в [18], можно показать, что из уравнений

$$\text{Re } G(\mu, \Omega, \varepsilon, \alpha) = 0, \quad \text{Im } G(\mu, \Omega, \varepsilon, \alpha) = 0, \quad 0 \leq \mu \leq +\infty,$$

находится кривая $L(\alpha)$, разделяющая области $D^+(\alpha)$ и $D^-(\alpha)$ (см. рис. 3). При этом если $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$, то число нулей дисперсионной функции равно двум (это и есть нули $\pm\eta_0$), а если $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$, то дисперсионная функция нулей не имеет.

Отметим, что в работе [19] разработан метод исследования граничного режима, когда $(\Omega, \varepsilon) \in L(\alpha)$.

Кривая $L(\alpha)$ определяется параметрическими уравнениями:

$$L(\alpha): \quad \Omega = \sqrt{L_1(\mu, \alpha)}, \quad \varepsilon = \sqrt{L_2(\mu, \alpha)}, \quad 0 \leq \mu \leq +\infty,$$

где

$$L_1(\mu, \alpha) = \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} \frac{\mu^2 [\lambda_0(\mu, \alpha)(1 + \lambda_0(\mu, \alpha)) + s^2(\mu, \alpha)]^2}{[-\lambda_0(\mu, \alpha)][(1 + \lambda_0(\mu, \alpha))^2 + s^2(\mu, \alpha)]},$$

$$L_2(\mu, \alpha) = \frac{s_0(\alpha)}{s_2(\alpha)} \frac{\mu^2 s^2(\mu, \alpha)}{[-\lambda_0(\mu, \alpha)][(1 + \lambda_0(\mu, \alpha))^2 + s^2(\mu, \alpha)]}.$$

5. ЗЕРКАЛЬНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ОТ ГРАНИЦЫ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим граничную задачу, состоящую из уравнений (5), (6), условия зеркального отражения электронов от границы плазмы (1), (2) и условий (3), (4), на электрическое поле. Покажем, что эта задача имеет решение, представимое в виде разложения по собственным функциям характеристической системы:

$$H(x_1, \mu) = \frac{E_\infty}{w_0} \mu + \frac{E_0}{w_0} \left[\frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu} e^{-w_0 x_1 / \eta_0} + \frac{\eta_0 \mu + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu} e^{w_0 x_1 / \eta_0} \right] +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-w_0 x_1 / \eta} F_1(\eta, \mu) - e^{w_0 x_1 / \eta} F_1(\eta, -\mu)] \frac{E(\eta)}{w_0} d\eta, \quad (28)$$

$$e(x_1) = E_\infty + E_0 [e^{-w_0 x_1 / \eta_0} + e^{w_0 x_1 / \eta_0}] +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-w_0 x_1 / \eta} + e^{w_0 x_1 / \eta}] E(\eta) d\eta, \quad (29)$$

где E_0 и E_∞ – неизвестные коэффициенты, отвечающие дискретному спектру (E_0 – амплитуда Дебая, E_∞ – амплитуда Друде), $E(\eta)$ – неизвестная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра. При $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$ в разложениях (28) и (29) следует положить $E_0 = 0$.

Преобразуем разложение (28). Для этого воспользуемся нечетностью функции $F_1(\eta, \mu)$ по совокупности переменных: $F_1(-\eta, -\mu) = -F_1(\eta, \mu)$, и четностью функции $E(\eta)$. Тогда имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{w_0 x_1 / \eta} F_1(\eta, -\mu) E(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w_0 x_1 / \eta} F_1(-\eta, -\mu) E(-\eta) d\eta =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w_0 x_1 / \eta} F_1(\eta, \mu) E(\eta) d\eta.$$

Используя это соотношение, разложения (28) и (29) представим в следующем виде:

$$H(x_1, \mu) = \frac{E_\infty}{w_0} \mu + \frac{E_0}{w_0} \left[\frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu} e^{-w_0 x_1 / \eta_0} + \frac{\eta_0 \mu + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu} e^{w_0 x_1 / \eta_0} \right] +$$

$$+ \frac{2}{w_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w_0 x_1 / \eta} F_1(\eta, \mu) E(\eta) d\eta,$$

$$e(x_1) = E_\infty + 2E_0 \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 x_1}{\eta_0}\right) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 x_1}{\eta}\right) E(\eta) d\eta.$$

Начнем со случая $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$. Вычислим значения функции $H(x_1, \pm\mu)$ на верхней границе. Имеем

$$H(+l, \pm\mu) = \pm \frac{E_\infty}{w_0} \mu + \frac{E_0}{w_0} \left[\frac{\pm\eta_0\mu - \eta_1^2}{\eta_0 \mp \mu} e^{-w_0 l/\eta_0} + \frac{\pm\eta_0\mu + \eta_1^2}{\eta_0 \pm \mu} e^{w_0 l/\eta_0} \right] + \\ + \frac{2}{w_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w_0 l/\eta} F_1(\eta, \pm\mu) E(\eta) d\eta.$$

Подставляя эти равенства в граничное условие (2), приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$\frac{E_\infty}{w_0} \mu + \frac{E_0 \operatorname{ch}(w_0 l/\eta_0)}{w_0} \left[\frac{\mu\eta_0 - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu} + \frac{\mu\eta_0 + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu} \right] + \\ + \frac{1}{w_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w_0 l/\eta} (F_1(\eta, \mu) - F_1(\eta, -\mu)) E(\eta) d\eta = 0.$$

После несложных преобразований приходим к следующему уравнению:

$$\frac{E_\infty}{w_0} \mu + 2 \frac{E_0 \operatorname{ch}(w_0 l/\eta_0)}{w_0} \mu \frac{\eta_0^2 - \eta_1^2}{\eta_0^2 - \mu^2} + \\ + \frac{2}{w_0} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\eta, \mu) E(\eta) \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta}\right) d\eta = 0, \quad -\infty < \mu < +\infty. \quad (30)$$

Можно убедиться непосредственной проверкой, что граничные условия для функции распределения на нижней пластине (границе) слоя приводят точно к такому же уравнению (30).

Подставим разложение (29) для электрического поля в граничное условие (30), получим следующее уравнение:

$$E_\infty + 2E_0 \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta_0}\right) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} E(\eta) \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta}\right) d\eta = 1. \quad (31)$$

Подставим в уравнение (30) собственные функции $F_1(\eta, \mu)$, получим сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши [20] на всей числовой оси $-\infty < \mu < +\infty$:

$$\frac{1}{2} E_\infty \mu + E_0 \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta_0}\right) \mu \frac{\eta_0^2 - \eta_1^2}{\eta_0^2 - \mu^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} E(\eta) \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta}\right) d\eta - \\ - w_0 \eta_1^2 \frac{\Lambda(\mu)}{\mu k(\mu, \alpha)} E(\mu) \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\mu}\right) = 0. \quad (32)$$

Введем вспомогательную функцию

$$M(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\eta - \eta_1^2}{\eta - z} E(\eta) \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta}\right) d\eta, \quad (33)$$

Функция $M(z)$ аналитична в комплексной плоскости, за исключением разреза — точек интегрирования всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$. Граничные значения вспомогательной функции $M(z)$ сверху и снизу на действительной оси связаны формулами Сохоцкого:

$$M^\pm(\mu) = \pm\pi i(\mu^2 - \eta_1^2)E(\mu) \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\mu}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} E(\eta) \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta}\right) d\eta,$$

где интеграл

$$M(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} E(\eta) \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta}\right) d\eta$$

понимается как особый в смысле главного значения по Коши.

Из формул Сохоцкого вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} M^+(\mu) - M^-(\mu) &= 2\pi i(\mu^2 - \eta_1^2)E(\mu) \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\mu}\right), \quad \mu \in (-\infty, +\infty), \\ M(\mu) &= \frac{M^+(\mu) + M^-(\mu)}{2}, \quad \mu \in (-\infty, +\infty). \end{aligned} \quad (34)$$

С помощью формул Сохоцкого для вспомогательной функции (33) и дисперсионной функции (21) преобразуем сингулярное уравнение (32) к краевой задаче:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_\infty\mu + E_0 \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta_0}\right)\mu \frac{\eta_0^2 - \eta_1^2}{\eta_0^2 - \mu^2} + \frac{1}{2}(M^+(\mu) + M^-(\mu)) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\Lambda^+(\mu) + \Lambda^-(\mu)}{\Lambda^+(\mu) - \Lambda^-(\mu)}(M^+(\mu) - M^-(\mu)) = 0, \quad -\infty < \mu < +\infty. \end{aligned}$$

Из этого уравнения выводим следующую краевую задачу о нахождении аналитической функции по ее нулевому скачку на разрезе:

$$\begin{aligned} \Lambda^+(\mu) \left[M^+(\mu) + \frac{1}{2}E_\infty\mu + E_0 \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta_0}\right)\mu \frac{\eta_0^2 - \eta_1^2}{\eta_0^2 - \mu^2} \right] - \\ - \Lambda^-(\mu) \left[M^-(\mu) + \frac{1}{2}E_\infty\mu + E_0 \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta_0}\right)\mu \frac{\eta_0^2 - \eta_1^2}{\eta_0^2 - \mu^2} \right] = 0, \quad \mu \in (-\infty, +\infty). \end{aligned} \quad (35)$$

Задача (35) имеет следующее решение:

$$M(z) = -\frac{1}{2}E_\infty z - E_0 \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta_0}\right)z \frac{\eta_0^2 - \eta_1^2}{\eta_0^2 - z^2} + \frac{C_1 z}{\Lambda(z)}, \quad (36)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Устраняя полюс в бесконечно удаленной точке, получаем, что $C_1 = E_\infty \Lambda_\infty / 2$. Амплитуда Дебая находится при устранении полюса в решении (36) в точках $\pm \eta_0$. В силу четности дисперсионной функции эти полюсы устраняются одним условием:

$$E_0 = \frac{E_\infty \Lambda_\infty \eta_0}{(\eta_1^2 - \eta_0^2) \Lambda'(\eta_0) \operatorname{ch}(w_0 l / \eta_0)}.$$

Коэффициент непрерывного спектра найдем, если подставим решение (36) в формулу Сохоцкого (34):

$$E(\mu) = \frac{E_\infty \Lambda_\infty}{2w_0 \eta_1^2} \frac{\mu^2 k(\mu, \alpha)}{\operatorname{ch}(w_0 l / \mu) \Lambda^+(\mu) \Lambda^-(\mu)}.$$

Для нахождения E_∞ воспользуемся уравнением (31), которое перепишем с учетом четности $E(\eta)$:

$$E_\infty + 2E_0 \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta_0}\right) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} E(\eta) \operatorname{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta}\right) d\eta = 1,$$

или в явном виде:

$$\frac{1}{\Lambda_\infty} + \frac{2\eta_0}{(\eta_1^2 - \eta_0^2)\Lambda'(\eta_0)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\Lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\Lambda^-(\eta)} \right) \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - \eta_1^2} = \frac{1}{\Lambda_\infty E_\infty}. \quad (37)$$

Интеграл в (37)

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\Lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\Lambda^-(\eta)} \right) \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - \eta_1^2}$$

можно вычислить аналитически.

Функция

$$\varphi(z) = \frac{z}{\Lambda(z)(z^2 - \eta_1^2)},$$

для которой $\varphi(z) = O(z^{-1})$, $z \rightarrow \infty$, аналитична в верхней и нижней комплексных полуплоскостях (вне разреза – действительной оси), за исключением точек $\pm\eta_1$, $\pm\eta_0$. Следовательно, этот интеграл равен

$$J = \left[\text{Res}_{\eta_0} + \text{Res}_{-\eta_0} + \text{Res}_{\eta_1} + \text{Res}_{-\eta_1} + \text{Res}_\infty \right] \varphi(z).$$

Замечая, что

$$\text{Res}_{\pm\eta_1} \varphi(z) = \frac{1}{2\Lambda_1}, \quad \Lambda_1 = \Lambda(\eta_1) = 1 - \frac{1}{1 - i\Omega}, \quad \text{Res}_{\pm\eta_0} \varphi(z) = \frac{\eta_0}{\Lambda'(\eta_0)(\eta_0^2 - \eta_1^2)},$$

получаем

$$J = \frac{2\eta_0}{\Lambda'(\eta_0)(\eta_0^2 - \eta_1^2)} + \frac{1}{\Lambda_1} - \frac{1}{\Lambda_\infty}.$$

Подставляя это равенство в (37), получаем, что

$$E_\infty = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_\infty}, \quad C_1 = \frac{1}{2}\Lambda_1. \quad (38)$$

Таким образом, разложения (28) и (29) установлены. Найдены коэффициенты разложений (28) и (29). Коэффициент присоединенного спектра E_∞ находится по формуле (38), а коэффициент дискретного спектра E_0 и коэффициент непрерывного спектра $E(\eta)$ находятся по формулам

$$E_0 = \frac{\Lambda_1 \eta_0}{(\eta_1^2 - \eta_0^2)\Lambda'(\eta_0) \text{ch}(w_0 l / \eta_0)}, \quad (39)$$

$$E(\eta) = \frac{\Lambda_1 \eta_0}{4\pi i (\eta^2 - \eta_1^2) \text{ch}(w_0 l / \eta)} \left(\frac{1}{\Lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\Lambda^-(\eta)} \right).$$

Структура электрического поля в общем случае имеет вид

$$e(x_1) = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_\infty} + \frac{2\Lambda_1 \eta_0}{\Lambda'(\eta_0)(\eta_1^2 - \eta_0^2)} \frac{\text{ch}(w_0 x_1 / \eta_0)}{\text{ch}(w_0 l / \eta_0)} +$$

$$+ \frac{\Lambda_1}{w_0 \eta_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^2 k(\eta, \alpha)}{\Lambda^+(\eta)\Lambda^-(\eta)} \frac{\text{ch}(w_0 x_1 / \eta)}{\text{ch}(w_0 l / \eta)} d\eta. \quad (40)$$

По формулам (38), (39) согласно (28) построим и функцию распределения:

$$H(x_1, \mu) = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_\infty} \frac{\mu}{w_0} + \frac{\Lambda_1 \eta_0}{w_0(\eta_1^2 - \eta_0^2) \Lambda'(\eta_0) \operatorname{ch}(w_0 l / \eta_0)} \times \\ \times \left[e^{-w_0 x_1 / \eta_0} \frac{\mu \eta_0 - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu} + e^{w_0 x_1 / \eta_0} \frac{\mu \eta_0 + \eta_1^2}{\eta_0 + \mu} \right] + \\ + \frac{\Lambda_1}{w_0^2 \eta_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-w_0 x_1 / \eta} F_1(\eta, \mu) \eta^2 k(\eta, \alpha)}{\Lambda^+(\eta) \Lambda^-(\eta) \operatorname{ch}(w_0 l / \eta)} d\eta. \quad (41)$$

Напомним, что формулы (40) и (41) справедливы при $(\Omega, \varepsilon) \in D^+(\alpha)$. В случае $(\Omega, \varepsilon) \in D^-(\alpha)$ нуль η_0 дисперсионной функции не существует. Следовательно, можно считать, что в этом случае $\eta_0 = 0$; тогда второе слагаемое в (40) и (41) пропадает и эти формулы упрощаются.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитически решена классическая задача о колебаниях электронной плазмы в слое проводящей среды с произвольной степенью вырождения электронного газа, находящегося во внешнем переменном электрическом поле. В явном виде найдены функция распределения электронов и экранированное электрическое поле внутри плазмы. Применяемый в работе метод может быть применен и для решения граничных задач для систем уравнений Власова–Пуассона (см., например, [21]).

Подчеркнем еще раз, что для аналитического решения такой сложной проблемы, как задача о колебаниях плазмы, ее сначала нужно свести к одномерной и односкоростной. Для этого следует вектор напряженности внешнего электрического поля направить вдоль той оси, которая ортогональна поверхности слоя с плазмой. В рассматриваемой задаче Власова–Ландау это ось x и поле имеет вид

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = E_0 e^{-i\omega t} (1, 0, 0). \quad (42)$$

Оно порождает самосогласованное поле внутри плазмы $E(x) e^{-i\omega t} (1, 0, 0)$. При этом функция распределения электронов имеет вид $f = f(x, v_x, t)$. Если же внешнее поле имеет три ненулевые координаты, т. е. $\mathbf{E}_{\text{ext}} = e^{-i\omega t} (E_1, E_2, E_3)$, то функция распределения становится функцией общего вида $f = f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$. Так что имея целью аналитическое решение задачи, внешнее поле берем в виде (42).

Отметим еще одну особенность данной задачи. Неоднородная краевая задача (35) из теории функций комплексного переменного не требует факторизации коэффициента (или решения соответствующей однородной задачи). Дело в том, что в силу симметричных граничных условий задача (35) оказывается заданной на том же разрезе, какой имеет дисперсионная функция задачи.

Список литературы

- [1] А. А. Власов, “О вибрационных свойствах электронного газа”, *ЖЭТФ*, **8**:3 (1938), 291–318.
- [2] Л. Д. Ландау, “О колебаниях электронной плазмы”, *Собрание трудов*, т. 2, Наука, М., 1969, 7–25; *ЖЭТФ*, **16** (1946), 574–586.
- [3] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, “Аналитическое решение граничных задач для нестационарных модельных кинетических уравнений”, *ТМФ*, **92**:1 (1992), 127–138.

- [4] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, “Плазма в высокочастотном электрическом поле с зеркальным условием на границе”, *Изв. РАН. Сер. МЖГ*, 2006, № 1, 165–177.
- [5] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, “Аналитическое решение задачи о поведении электронной плазмы в полупространстве металла в переменном электрическом поле”, *Поверхность. Физика, химия, механика*, 1993, № 2, 25–32.
- [6] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, “Вырожденная плазма в полупространстве во внешнем электрическом поле”, *ТМФ*, 147:3 (2006), 487–502.
- [7] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, “Аналитическое решение задачи о поведении вырожденной электронной плазмы”, *Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Сер. Б*, т. VII-I: *Математическое моделирование в низкотемпературной плазме*, ред. В. Е. Фортов, Янус-К, М., 2008, 159–177.
- [8] J. M. Keller, R. Fuchs, K. L. Kliewer, “*p*-polarized optical properties of a metal with a diffusely scattering surface”, *Phys. Rev. B*, 12:6 (1975), 2012–2029.
- [9] J. M. Kliewer, R. Fuchs, “*s*-polarized optical properties of metals”, *Phys. Rev. B*, 2:8 (1970), 2923–2936.
- [10] В. М. Гохфельд, М. А. Гулянский, М. И. Каганов, А. Г. Плявенек, “Неэкспоненциальное затухание электромагнитного поля в нормальных металлах”, *ЖЭТФ*, 89:3(9) (1985), 985–1001.
- [11] В. М. Гохфельд, М. А. Гулянский, М. И. Каганов, “Аномальное проникновение продольного переменного электрического поля в вырожденную плазму при произвольном параметре зеркальности”, *ЖЭТФ*, 92:2 (1987), 523–530.
- [12] А. А. Абрикосов, *Введение в теорию нормальных металлов*, Наука, М., 1972.
- [13] Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Наука, М., 1976.
- [14] Е. В. Чижонков, “К моделированию электронных колебаний в плазменном слое”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 51:3 (2011), 456–469.
- [15] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 10: *Физическая кинетика*, Наука, М., 1979.
- [16] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Физматлит, М., 2000.
- [17] Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, М., 1979.
- [18] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Граничные задачи для вырожденной электронной плазмы*, Изд-во МГОУ, М., 2006.
- [19] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, “Нестационарная граничная задача для модельных кинетических уравнений при критических параметрах”, *ТМФ*, 116:2 (1998), 305–320.
- [20] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, М., 1977.
- [21] В. В. Веденяпин, *Кинетическая теория по Максвеллу, Больцману и Власову*, Изд-во МГОУ, М., 2005.

Поступила в редакцию 19.10.2016,
после доработки 11.01.2017