Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, М. А. Лалик, Ю. Н. Орлов, Об асимптотике спектра комбинационного рассеяния на стоксовских фонах, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 1, 84–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9291>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:50:08

© 2017 г. А. И. Аптекарев*, М. А. Лапик*, Ю. Н. Орлов*

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ НА СТОКСОВСКИХ ФОНОНАХ

Для некоторого класса полиномиальных квантовых гамильтонианов, используемых в моделях комбинационного рассеяния в квантовой оптике, в представлении вторичного квантования получена асимптотика спектра при больших числах заполнения. Диагонализация гамильтонианов этого класса осуществляется с помощью специальной системы полиномов, задаваемых рекуррентными соотношениями с коэффициентами, зависящими от параметра (числа заполнения). Для этой системы полиномов определяется асимптотика дискретной меры, относительно которой они ортогональны. Получаемые предельные меры интерпретируются как равновесные меры в экстремальных задачах логарифмического потенциала во внешнем поле и с ограничениями на меру. Общий случай иллюстрируется точно решаемым примером, когда гамильтониан можно диагонализировать каноническим преобразованием Боголюбова, а специальные ортогональные полиномы вырождаются в классические дискретные полиномы Кравчука.

Ключевые слова: операторы рождения и уничтожения, полиномиальные квантовые гамильтонианы, комбинационное рассеяние, асимптотика дискретных ортогональных многочленов, равновесные меры во внешнем поле.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9291>

1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде моделей квантовой оптики, описывающих такие процессы, как взаимодействие нескольких одномодовых квантовых полей бозонов, генерация гармоник, многофотонное рассеяние и другие нелинейные процессы взаимодействия излучения с веществом (см. монографию [1]), используются гамильтонианы, полиномиальные

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00025).

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: aptekaa@keldysh.ru, mashalapik@gmail.com, orlmath@keldysh.ru

в терминах операторов рождения и уничтожения, действующих в симметричном пространстве Фока [2]:

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^p \omega_k a_k^+ a_k^- + \sum_{(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \in J} b_{\mathbf{rs}} a^{+\mathbf{r}} a^{-\mathbf{s}} + \text{э. с.} \quad (1)$$

Здесь принята мультииндексная запись монома $a^{\mathbf{r}} = a_1^{r_1} \dots a_p^{r_p}$, где индексы $\mathbf{r}$ (и аналогично $\mathbf{s}$) принадлежат некоторому подмножеству целочисленной p -мерной решетки $\mathbb{Z}_+^p$ в соответствии с размерностью задачи, определяемой количеством p типов частиц, так что вектор показателей степеней $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ принадлежит некоторому конечному подмножеству J целочисленной $2p$ -мерной решетки $\mathbb{Z}_+^{2p}$. Величины ω_i и $b_{\mathbf{rs}} = b_{\mathbf{sr}}^*$ суть некоторые постоянные, э. с. означает эрмитово сопряжение.

Операторы $a^\pm$ действуют в гильбертовом пространстве функций, реализованном как $L_2(\mathbb{R}^p)$. Стандартный ортонормированный базис этого пространства, состоящий из собственных векторов оператора $\hat{H}_0 = \sum_{k=1}^p \omega_k a_k^+ a_k^-$, обозначается через $\{|n\rangle\}$. Оператор $\hat{n}_k = a_k^+ a_k^-$ называется оператором числа частиц k -го типа.

Пусть $\{|n\rangle_k\}$ – базис, отвечающий частице k -го типа. Операторы $a_k^\pm$ и $\hat{n}_k$ действуют на векторы своего базиса по формулам [3]

$$a_k^- |n\rangle_k = \sqrt{n} |n-1\rangle_k, \quad a_k^+ |n\rangle_k = \sqrt{n+1} |n+1\rangle_k, \quad \hat{n}_k |n\rangle_k = n |n\rangle_k. \quad (2)$$

Для нескольких типов частиц, с каждым из которых связывается свое гильбертово пространство, базисом является тензорное произведение соответствующих одностичных базисов: $|n\rangle = |n_1\rangle_1 \dots |n_p\rangle_p$.

Задача, решаемая в настоящей работе, состоит в нахождении асимптотики собственных значений и собственных функций гамильтониана (1) при больших числах заполнения, т. е. при больших собственных значениях оператора числа частиц. Если множество J в (1) состоит только из элементов 0 и 1, гамильтониан (1) является квадратичным по операторам $a_k^\pm$ и может быть диагонализирован каноническим преобразованием Боголюбова [3]. Если взаимодействие имеет более высокий порядок по степеням $\mathbf{r}, \mathbf{s}$, точное диагонализующее преобразование в терминах операторов $a^\pm$ в общем случае неизвестно. В некоторых частных случаях операторов Гамильтона вида (1) при $p > 1$, когда гамильтониан представляется в виде суммы гамильтониана гармонического осциллятора и ангармонической поправки к потенциалу определенного вида [4], существует точное решение задачи диагонализации с помощью преобразования Дарбу (см. также работы [5], [6]). Далее мы рассматриваем общий случай полиномиальных гамильтонианов, для которых указанный метод не позволяет получить точное решение в форме, удобной для анализа и физической интерпретации.

При малых числах заполнения спектр и собственные функции можно найти приближенно с помощью теории возмущений. С одной стороны, сами полиномиальные модели вида (1) носят приближенный характер и при сколь угодно больших числах заполнения могут быть неадекватны исходной постановке задачи. С другой стороны, при достаточно больших числах заполнения, но таких, что ряд теории возмущений все же сходится, низшие приближения могут давать весьма неточные оценки, а вычисление высших поправок трудоемко. В этом случае практическую важность приобретают методы асимптотического анализа спектра гамильтониана

и нахождения соответствующего диагонализующего преобразования, т. е. асимптотических собственных функций.

Для анализа рассматриваемых гамильтонианов мы привлекаем асимптотическую теорию многочленов, ортогональных относительно дискретных мер, и конечных систем многочленов, определяемых рекуррентными соотношениями с коэффициентами, зависящими от размера системы. Эта теория бурно развивалась последние двадцать лет, начиная с пионерской работы Рахманова [7], посвященной слабой асимптотике дискретных многочленов Чебышёва, и в итоге развилась в теорию сильных асимптотик дискретно ортогональных многочленов, позволившую провести глобальный асимптотический анализ важных частных случаев: многочленов Хана, Кравчука, Мейкснера [8]–[11].

В настоящей работе для диагонализации гамильтониана мы вводим систему специальных многочленов от спектральной переменной. Эти многочлены формируют матрицу перехода от стандартного базиса к базису собственных векторов. Для рассматриваемых гамильтонианов эта система задается трехчленными рекуррентными соотношениями и дает обобщение многочленов Кравчука [12]. Анализ этой специальной системы многочленов лежит в основе предложенного в настоящей работе метода асимптотической диагонализации полиномиальных гамильтонианов вида (1), имеющих полный набор законов сохранения.

В разделе 2 мы проводим диагонализацию гамильтониана и находим специальную систему ортогональных многочленов, определяющую координаты собственного вектора. В разделе 3 формулируются основные результаты работы об асимптотических свойствах этой системы многочленов. Затем в разделе 4 рассматриваются экстремальные задачи теории логарифмического потенциала, описывающие главный член асимптотик, приводятся доказательства и обсуждения утверждений, сформулированных в разделе 3. Наконец, в разделе 5 специальный (при $p = 1$) случай рассматриваемых гамильтонианов (1) исследуется с помощью преобразования Боголюбова, что позволяет провести независимое сравнение с полученными в работе асимптотическими формулами (случай многочленов Кравчука).

2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ СТОКСА И СПЕЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Для построения диагонализующего преобразования при больших числах заполнения мы используем наличие у рассматриваемых гамильтонианов вида (1) законов сохранения (см., например, монографию [1]). Если среди этих законов существует один, обеспечивающий ограниченность всех чисел заполнения, то на соответствующем инвариантном подпространстве задача на собственные значения в терминах чисел заполнения становится конечной. На этом подпространстве можно найти степенную асимптотику спектра с точностью $\mathcal{O}(1/N)$ (главная асимптотика), где N есть сумма чисел заполнения, являющаяся собственным значением вышеуказанного закона сохранения [2]. Каждому значению N отвечают конечная эрмитова матрица гамильтониана на данном инвариантном подпространстве и соответствующая функция распределения его собственных значений. Мы интересуемся сходимостью последовательности функций распределения собственных значений при $N \rightarrow \infty$.

Рассмотрим подробно пример многофотонного рассеяния, являющегося одной из базовых моделей в ряде задач квантовой оптики [1].

Обозначим через J_Δ множество векторов $\mathbf{r} - \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^p$, где $(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \in J$, а через L – их линейную оболочку. Известно [2], что оператор

$$\hat{I} = \sum_{k=1}^p C_k \hat{n}_k \quad (3)$$

коммутирует с гамильтонианом (1), если и только если вектор $C = (C_1, \dots, C_p)$ ортогонален линейной оболочке L векторов $\mathbf{r} - \mathbf{s}$, т. е. принадлежит ортогональному дополнению $L^\perp$ в $\mathbb{R}^p$: $(C, \mathbf{r} - \mathbf{s}) = 0$. Это утверждение позволяет существенно упростить исследование неограниченного оператора $\hat{H}$, анализируя его на конечномерных инвариантных подпространствах.

При описании комбинационного рассеяния одномодового излучения частоты ω_0 на возбуждениях (фононах) нескольких сортов, возникающих в среде, используется следующая модель [1], называемая моделью рассеяния на стоксовых фононах (постоянная Планка положена равной единице):

$$\hat{H} = \sum_{k=0}^p \omega_k a_k^+ a_k^- + B \left(a_0^+ \prod_{k=1}^p a_k^- + \text{э. с.} \right), \quad (4)$$

где ω_k , B – действительные постоянные. Согласно (3) эта система имеет p законов сохранения, записываемых в виде [2]

$$\hat{I}_0 = \hat{n}_0 + \hat{n}_p, \quad \hat{I}_k = \hat{n}_k - \hat{n}_p, \quad k = 1, \dots, p-1. \quad (5)$$

Поскольку операторы $\hat{I}_k$ (5) коммутируют с гамильтонианом (4), пространство собственных значений этих операторов инвариантно относительно действия гамильтониана. Это означает, что при действии гамильтониана на каждое слагаемое в (5) величины $n_0 + n_p$ и $n_k - n_p$ не меняются. Положим

$$n_0 + n_p = N, \quad n_1 = n_2 = \dots = n_p = j. \quad (6)$$

При фиксированном N первое из равенств (6) обеспечивает ограниченность области изменения собственных значений n_k операторов числа частиц в (5). В общем случае для гамильтониана вида (1) система законов сохранения имеет вид [2]

$$\hat{I}_k = \gamma_p \hat{n}_k - \gamma_k \hat{n}_p = \text{const}, \quad k = 1, \dots, p-1, \quad \gamma = \mathbf{r} - \mathbf{s}.$$

Представим собственную функцию $|\psi\rangle$ оператора $\hat{H}$, отвечающую заданному значению N в законах сохранения (5) и (6), в виде разложения по стандартному фоковскому базису:

$$|\psi\rangle = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}_+^{p+1}} \nu_{\vec{n}} |n_0\rangle_0 |n_1\rangle_1 \dots |n_p\rangle_p, \quad \Rightarrow \quad |\psi\rangle_N = \sum_{j=0}^N \nu_j |N-j\rangle_0 |j\rangle_1 \dots |j\rangle_p. \quad (7)$$

Тогда из (2) получаем, что задача на собственные значения $\hat{H}|\psi^{(k)}\rangle_N = E_k^{(N)}|\psi^{(k)}\rangle_N$, $k = 0, 1, \dots, N$, для гамильтониана (4) на этом инвариантном подпространстве записывается следующим образом:

$$\sqrt{N-j}(j+1)^{p/2} \nu_{j+1} + \sqrt{N-j+1} j^{p/2} \nu_{j-1} = [\tilde{\lambda} + j\Omega] \nu_j, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (8)$$

где

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^{(N)} = \frac{E^{(N)} - \omega_0 N}{B}, \quad \Omega = \frac{1}{B} \left(\omega_0 - \sum_{k=1}^p \omega_k \right), \quad \nu_{-1} = 0. \quad (9)$$

Целью настоящей работы является нахождение предельного распределения энергетических уровней $\{E_k^{(N)}, k = 1, \dots, N\}$ и коэффициентов $\{\nu_j^{(N)}, j = 0, 1, \dots, N\}$ перехода к базису собственных функций (т. е. асимптотике диагонализующего преобразования).

Равенство (8) представляет собой линейную алгебраическую систему относительно коэффициентов ν_j :

$$\tilde{D}\bar{\nu} = \tilde{\lambda}\bar{\nu}, \quad \bar{\nu} := (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_N), \quad (10)$$

где $\tilde{D}$ – симметричная трехдиагональная матрица размера $(N+1) \times (N+1)$ с элементами

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{jk} &= \sqrt{\tilde{q}_{j+1,N}} \delta_{j,k-1} + j\Omega \delta_{j,k} + \sqrt{\tilde{q}_{j,N}} \delta_{j,k+1}, \\ \tilde{q}_{j,N} &= j^p(N-j+1), \quad j, k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, задача о распределении собственных значений гамильтониана (4) при больших числах заполнения (т. е. при $N \rightarrow +\infty$) свелась к исследованию асимптотики спектра симметричной трехдиагональной матрицы при увеличении ее размерности, причем элементы матрицы также зависят от размерности матрицы $\tilde{D}$ как от параметра.

Вектор $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_N)$ с компонентами, зависящими от собственных значений $\tilde{\lambda}$, которые определены в (10), является собственной функцией гамильтониана (4). Эти компоненты, как видно из (10), связаны рекуррентным соотношением и зависят от $\tilde{\lambda}$ полиномиально. Введем специальные полиномы $\tilde{P}_k^N(\tilde{\lambda})$ по формулам

$$\tilde{P}_k^N(\tilde{\lambda}) = \frac{\nu_k(\tilde{\lambda})}{\nu_0(\tilde{\lambda})}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (12)$$

Поскольку имеет смысл рассматривать задачи, которые в начальной квантовой моде содержат ненулевое число частиц N , то $\nu_0 \neq 0$ и $\tilde{P}_0^N \equiv 1$.

Верхний индекс полинома на единицу меньше порядка матрицы Якоби $\tilde{D}$. Следовательно, задача нахождения собственных функций спектральной задачи (10) свелась к трехчленным рекуррентным соотношениям с переменными коэффициентами. Такие системы рассматривались в работах (см. работы [13]–[16], рекуррентные соотношения более высокого порядка рассматривались в [17]–[19]).

3. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И МЕРЫ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

В этом разделе мы формулируем основной результат работы об асимптотике собственных значений задачи (10) и обсуждаем задачу о пределе меры ортогональности. Ввиду того что при $N \rightarrow +\infty$ рассматриваемые собственные значения уходят на бесконечность, мы проведем масштабирование спектральной переменной. С этой целью заметим, что при фиксированном N максимальные значения элементов матрицы $\tilde{D}$ имеют порядок $\sqrt{(N+1)^{p+1}}$. Поэтому удобно перейти от матрицы $\tilde{D}$ к другой матрице D с элементами $D_{ij} = \tilde{D}_{ij}(N+1)^{-(p+1)/2}$. Введем соответствующие

нормированные собственные значения

$$\lambda_j^{(N)} = \tilde{\lambda}_j^{(N)} (N+1)^{-(p+1)/2}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (13)$$

Тогда из (10) и (12) получаем для $k = 0, 1, \dots, N-1$

$$\lambda P_k^N(\lambda) = \sqrt{q_{k+1,N}} P_{k+1}^N(\lambda) + c_{k,N} P_k^N(\lambda) + \sqrt{q_{k,N}} P_{k-1}^N(\lambda), \quad P_{-1}^N = 0, P_0^N = 1, \quad (14)$$

$$q_{k,N} = \left(\frac{k}{N+1} \right)^p \left(1 - \frac{k}{N+1} \right), \quad c_{k,N} = \frac{k \Omega}{\sqrt{(N+1)^{p+1}}}. \quad (15)$$

При этом искомые собственные значения $\lambda_k^{(N)}$, определяющие после преобразований (13) и (9) уровни энергии гамильтониана (4), при фиксированном значении N являются корнями полинома

$$P_{N+1}^N(\lambda) = (\lambda - c_{N,N}) P_N^N(\lambda) - \sqrt{q_{N,N}} P_{N-1}^N(\lambda).$$

Отметим наличие непрерывных пределов коэффициентов (15) рекуррентных соотношений (14):

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{k/N \rightarrow t, \\ N \rightarrow \infty}} q_{k,N} &= q(t) = t^p(1-t), \\ \lim_{\substack{k/N \rightarrow t, \\ N \rightarrow \infty}} c_{k,N} &= c(t) = \begin{cases} t\Omega, & p = 1, \\ 0, & p \geq 2, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned} \quad (16)$$

В терминах этих функций (т. е. функций $q(t)$, $c(t)$) можно описать различные асимптотические характеристики задачи (14), (15). Введем отрезок

$$\Delta_t := [\alpha(t), \beta(t)] := [c(t) - 2\sqrt{q(t)}, c(t) + 2\sqrt{q(t)}]. \quad (17)$$

Известно (например, из теоремы Гершгорина [17]), что собственные значения $\{\lambda_j^{(N)}\}_{j=0}^N$ (т. е. нули многочлена P_{N+1}^N) для всех N принадлежат отрезку

$$\Delta := [A, B] := \left[\min_{t \in [0,1]} \alpha(t), \max_{t \in [0,1]} \beta(t) \right].$$

Нули многочленов P_k^N , $k = 1, \dots, N$, тоже принадлежат этому отрезку (ввиду их перемежаемости при различных k). Введем величины $t_{\pm}(\lambda)$ формулой

$$\{t: \alpha(t) \leq \lambda \leq \beta(t)\} =: [t_-(\lambda), t_+(\lambda)].$$

Введенные обозначения проиллюстрированы на рис. 1.

Рис. 1. Кривые $\alpha(t)$, $\beta(t)$, отрезок $\Delta = [A, B]$ и функции $t_{\pm}(\lambda)$ в случаях $p = 1$, $\Omega \neq 0$ (а) и $p > 1$ (б).

Введем понятие меры, считающей нули полинома P_n :

$$\chi_{P_n}(z) := \frac{1}{n} \sum_{\lambda_j: P_n(\lambda_j)=0} \delta(z - \lambda_j), \quad (18)$$

где δ есть мера Дирака (т.е. вероятностная мера с точечной массой в нуле). Тем самым $\chi_{P_{N+1}^N}(z)$ является мерой, считающей собственные значения $\{\lambda_j^{(N)}\}_{j=0}^N$ масштабированной задачи (14), (15). Справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Существует слабый предел мер, считающих масштабированные собственные значения (13) задачи (10), (11):*

$$\chi_{P_{N+1}^N}(\lambda) \xrightarrow{*} \sigma(\lambda) \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty. \quad (19)$$

При этом предельная мера σ абсолютно непрерывна и имеет плотность

$$\sigma'(\lambda) = \int_0^1 \omega'_{\Delta_\tau}(\lambda) d\tau, \quad \omega'_{[\alpha, \beta]}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(\beta - \lambda)(\lambda - \alpha)}}, & \lambda \in (\alpha, \beta), \\ 0, & \lambda \notin (\alpha, \beta), \end{cases} \quad (20)$$

где $\omega'_{\Delta_\tau}(\lambda)$ есть плотность меры Чебышёва отрезка $\Delta_\tau := [\alpha(\tau), \beta(\tau)]$, определенного в (17).

Применяя к предельной мере (20) распределения сжатых собственных значений $\{\lambda_j^{(N)}\}_{j=0}^N$ масштабировующее преобразование (13) и сдвиг (9), мы можем оценить, как ведут себя уровни энергии $\{E_k^{(N)}, k = 1, \dots, N\}$ при больших числах заполнения N .

Заметим, что, хотя все величины, стоящие под интегралом в (20), нам известны (см. (16), (17)), тем не менее получить явное выражение для интеграла

$$\sigma'(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{t_-(\lambda)}^{t_+(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{(\beta(\tau) - \lambda)(\lambda - \alpha(\tau))}} d\tau \quad (21)$$

Рис. 2. Предельные плотности $\sigma'(\lambda)$ (а) и предельные веса ортогональности $\lim_{N \rightarrow \infty} |W_N|^{(1/N)} =: e^{-Q}$ (б) при $p = 1, 2, 3, 4$.

удается лишь для случая $p = 1$. В этом случае $\sigma'(\lambda) = 1/2$, в чем можно убедиться, не прибегая к (20) (см. ниже раздел 5). В случае $p > 1$ для интеграла (20), (21)

$$\sigma'(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\theta(4\tau^p(1-\tau) - \lambda^2)}{\sqrt{4\tau^p(1-\tau) - \lambda^2}} d\tau, \quad \theta(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases} \quad (22)$$

можно получать степенные разложения. Так, для нечетных $p > 1$ справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Плотность предельной меры (19), (22) при $p = 2m + 1$ имеет разложение*

$$\sigma'(\lambda) = \frac{1}{p\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{(2k+2)/p} \frac{\Gamma(k + \frac{k+1}{p})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{k+1}{p}) k!} \operatorname{tg} \frac{\pi(k+1)}{p}.$$

Для четных p соответствующее разложение имеет более громоздкий вид (в нем появляются логарифмические члены).

В любом случае интегралы (21), (22) нетрудно получить численно. Графики предельных плотностей $\sigma'(\lambda)$ при различных p приведены на рис. 2а (рис. 2б нам понадобится ниже).

При анализе поведения предельной сжатой плотности распределения собственных значений (13) (см. рис. 2а) видно, что они накапливаются в нуле при $p > 1$. Тем не менее следующее утверждение показывает, что в реальности (до масштабирования) энергия не концентрируется в окрестности одной точки, а растекается.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Плотность предельной меры (20) после растяжения такова, что (если пронумеровать собственные значения по порядку) $\tilde{\lambda}_{[N/2]+1} - \tilde{\lambda}_{[N/2]} \sim \sqrt{N}$ при $p \neq 2$ и $\tilde{\lambda}_{[N/2]+1} - \tilde{\lambda}_{[N/2]} \sim N$ при $p = 2$.*

Теперь рассмотрим задачу об асимптотике меры ортогональности системы много-членов $P_k^N(\lambda)$, определенных рекуррентными соотношениями (14). Если мы знаем меру ортогональности, то, применяя процедуру ортогонализации Грама–Шмидта,

мы можем получить коэффициенты перехода $\{\nu_j^{(N)}, j = 0, 1, \dots, N\}$ к базису собственных функций. Тем самым асимптотика меры ортогональности дает асимптотику диагонализующего преобразования.

Отметим (см. (15)), что при $k = N + 1$ рекуррентный коэффициент $q_{k,N}$ обращается в нуль, т. е. речь идет о конечной системе ортогональных многочленов. При каждом N существует дискретная вероятностная мера $\rho_N(\lambda)$ (спектральная мера, сосредоточенная в корнях полинома $P_{N+1}^N(\lambda)$), относительно которой ортогональны первые N полиномов:

$$\int P_k^N(\lambda) P_m^N(\lambda) d\rho_N(\lambda) = \delta_{km}, \quad k, m = 0, 1, \dots, N,$$

где

$$\rho_N(\lambda) := \sum_{\lambda_j^{(N)} : P_{N+1}^N(\lambda_j^{(N)})=0} \rho_N^j \delta(\lambda - \lambda_j^{(N)}), \quad \rho_N^j = \frac{1}{\sum_{k=0}^N [P_k^N(\lambda_j^{(N)})]^2}. \quad (23)$$

Такие дискретные меры при больших N сходятся к абсолютно непрерывным мерам:

$$|\rho_N(\lambda) - M_N(\lambda)| \xrightarrow{*} 0, \quad dM_N(\lambda) := W_N(\lambda) d\lambda \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Имеются общие теоремы о существовании предельных абсолютно непрерывных мер $M_N(\lambda)$ и явные формулы для главного члена асимптотики их весов $|W_N|^{(1/N)}$ при $N \rightarrow \infty$. Мы приведем некоторые из них в следующем разделе. Однако подобного сорта теоремы требуют выполнения определенных технических условий, которые часто не удается проверить для конкретных систем ортогональных многочленов. Так обстоит дело и в случае рассматриваемых в нашей работе многочленов (14). Поэтому явный вид асимптотики весов $|W_N|^{(1/N)}$ формулируется нами в “условном” виде.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4 (УСЛОВНОЕ). *При существовании пределов (42), (43) (см. ниже) справедлива следующая асимптотическая формула для предельного веса W_N меры ортогональности ρ_N :*

$$\frac{1}{2N} \ln W_N(\lambda) \rightarrow - \int_0^{t_-(\lambda)} g_{\Delta_\tau}(\lambda) d\tau =: -Q(\lambda) \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty, \quad (25)$$

где g_{Δ_t} – функция Грина дополнения отрезка Δ_t в $\mathbb{C}$ с полюсом в бесконечности (см. формулу (35)).

Обоснование и обсуждение утверждений 1–4 мы приведем в следующем разделе.

4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

В этом разделе мы даем интерпретацию объектов, возникших при асимптотическом описании систем ортогональных многочленов $\{P_k^N\}_{k=1}^N$, в терминах экстремальных задач логарифмического потенциала для семейств мер на действительной оси во внешнем поле и с ограничениями на них. Это позволит нам получить

сформулированные выше утверждения как следствия из известных общих теорем и прояснить их смысл. Речь идет о предельной мере σ , к которой стремятся массы дискретной меры ортогональности ρ_N (см. соотношения (19), (23)), о предельной характеристике Q весов меры ортогональности ρ_N (см. (25)) и о предельной при $k/N \rightarrow t$, $N \rightarrow \infty$ характеристике Δ_t рекуррентных коэффициентов $q_{k,N}$, $c_{k,N}$, заданных в (14). Эти же обозначения σ , Q и Δ_t будут использоваться для соответствующих параметров экстремальных задач.

Экстремальной мерой $\lambda_Q^{t,\sigma}$ называется мера, доставляющая для функционала энергии $I_Q[\mu]$ с (непрерывным) *внешним полем* Q минимум среди всех борелевских мер массы t , ограниченных мерой σ (с носителем $S_\sigma \subseteq \mathbb{R}$):

$$I_Q[\mu] := \int U^\mu d\mu + 2 \int Q d\mu \longrightarrow \inf : \quad I_Q[\lambda_Q^{t,\sigma}] = \inf_{\substack{\mu(\mathbb{R})=t, \\ \mu \leq \sigma}} I_Q[\mu], \quad (26)$$

где функция

$$U^\mu(\lambda) = \int \ln \frac{1}{|\lambda - y|} d\mu(y) \quad (27)$$

называется *логарифмическим потенциалом* конечной борелевской меры μ , см. [21].

Из постановки экстремальной задачи следует, что внешнее поле определено с точностью до аддитивной константы. Мы в дальнейшем предполагаем, что минимум внешнего поля равен нулю,

$$\min_{\lambda \in S_\sigma} Q(\lambda) = 0, \quad (28)$$

и потенциал меры σ непрерывен. Это требование гарантирует отсутствие точечных масс у σ .

Для экстремальной задачи (26) с ограничением σ и внешним полем Q экстремальная мера $\lambda_Q^{t,\sigma}$ существует и единственна (в случае конечных энергий) [21], [22]. Также известно, что экстремальная мера однозначно характеризуется следующими *условиями равновесия*: для некоторой константы $w = w_Q^{t,\sigma}$ имеют место неравенства

$$U^{\lambda_Q^{t,\sigma}} + Q \begin{cases} \leq w & \text{на } S_{\lambda_Q^{t,\sigma}}, \\ \geq w & \text{на } S_{\sigma - \lambda_Q^{t,\sigma}}. \end{cases} \quad (29)$$

Множеством равновесия называют множество $S_{\lambda_Q^{t,\sigma}} \cap S_{\sigma - \lambda_Q^{t,\sigma}}$, а экстремальную меру называют также *равновесной*. На множестве равновесия экстремальная мера строго меньше ограничения, т. е. на этом множестве потенциал уравнивает внешнее поле. Также известно, что при росте массы мер равновесные меры возрастают:

$$1 \geq t_1 > t_2 > 0 \implies \lambda_Q^{t_1,\sigma} \geq \lambda_Q^{t_2,\sigma}.$$

Отсюда следует, что носители равновесных мер $S_{\lambda_Q^{t,\sigma}}$ возрастают по t , а множества $S_{\sigma - \lambda_Q^{t,\sigma}}$, где мера не достигла ограничения, убывают. Если предположить, что пересечение этих двух множеств, т. е. множество равновесия, есть интервал Δ_t , то его концы как функции от t имеют один максимум и один минимум.

Оказывается (см. [7], [9], [13], [14], [16], [22]–[24]), что равновесная мера $\lambda_Q^{t,\sigma}$, ограничение σ , поле Q и множество равновесия Δ_t связаны с системой полиномов P_n^N ,

удовлетворяющих рекуррентным соотношениям (14) и ортогональных относительно семейства мер ρ_N , определенных в (23).

Сначала остановимся на связи характеристики Δ_t рекуррентных коэффициентов $q_{k,N}$, $c_{k,N}$ с пределом меры, считающей нули полиномов P_n^N . Справедлива общая теорема [13].

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность многочленов P_k^N удовлетворяет (при фиксированном N) рекуррентным соотношениям (14), коэффициенты которых имеют непрерывные пределы

$$\lim_{\substack{k/N \rightarrow t, \\ N \rightarrow \infty}} q_{k,N} = q(t), \quad \lim_{\substack{k/N \rightarrow t, \\ N \rightarrow \infty}} c_{k,N} = c(t), \quad t \in [0, \infty).$$

Тогда существует слабый предел мер (18), считающих нули многочленов P_k^N :

$$\chi_{P_k^N}(\lambda) \xrightarrow{*} \frac{1}{t} \int_0^t \omega_{\Delta_\tau}(\lambda) d\tau \quad \text{при} \quad \frac{k}{N} \rightarrow t, \quad N \rightarrow \infty, \quad (30)$$

где $\omega_{[\alpha, \beta]}$ есть мера Чебышёва отрезка (17) при $t \in [0, \infty)$ с плотностью

$$\omega'_{[\alpha, \beta]}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(\beta - \lambda)(\lambda - \alpha)}}, \quad \lambda \in (\alpha, \beta). \quad (31)$$

Мера Чебышёва является *робеновской мерой* отрезка, т. е. вероятностной мерой, минимизирующей функционал энергии (26) в отсутствие внешнего поля (при $Q = 0$) и ограничения (при $\sigma' = \infty$).

Очевидно, что справедливость утверждения 1 является следствием теоремы 1.

Отметим, что доказать общий результат о наличии и значении предела (25), исходя только из коэффициентов рекуррентных соотношений (14), пока не удастся. Хотя, как видно из соотношения (25), значение этого предела зависит только от $\Delta_t = [\alpha(t), \beta(t)]$. Единственным результатом в этом направлении является доказательство в работе [16] формулы (25) для рекуррентных соотношений, коэффициенты которых ограничены и обеспечивают монотонное поведение в (17): рост $\alpha(t)$ и убывание $\beta(t)$ при $t \in [0, \infty)$. Для таких рекуррентных коэффициентов при доказательстве пределов (25), (43) не требуется условие (42). Доказательство аналогичного результата в классе, где $\alpha(t)$ имеет один минимум, а $\beta(t)$ имеет один максимум (именно этому классу принадлежат рассматриваемые в настоящей работе многочлены), представляется интересной открытой задачей.

Теперь вернемся к экстремальной задаче (26). В работах [23], [25] были получены явные формулы зависимости внешнего поля Q , ограничительной меры σ и равновесной меры $\lambda_Q^{t, \sigma}$ от множества равновесия Δ_t . Покажем, что по коэффициентам (16) можно так подобрать внешнее поле и ограничение, что множество равновесия будет совпадать с (17).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если функции β и α непрерывны на $[0, 1]$, удовлетворяют условиям $\alpha(0) = \beta(0)$, $\alpha(1) = \beta(1)$ и имеют один максимум и один минимум соответственно, то отрезки $\Delta_t = [\alpha(t), \beta(t)]$, $t \in (0, 1)$, являются множествами равновесия для экстремальной задачи (26) с ограничением σ во внешнем поле Q

и массами t , где

$$\sigma(\lambda) = \int_0^1 \omega_{\Delta_\tau}(\lambda) d\tau, \quad (32)$$

$$\lambda_Q^{t,\sigma}(\lambda) = \int_0^t \omega_{\Delta_\tau}(\lambda) d\tau, \quad (33)$$

$$Q(\lambda) = \int_0^{t_-(\lambda)} g_{\Delta_\tau}(\lambda) d\tau; \quad (34)$$

здесь g_{Δ_t} – функция Грина дополнения отрезка Δ_t в $\mathbb{C}$ с полюсом в бесконечности,

$$g_{[\alpha,\beta]}(\lambda) = \begin{cases} \ln \left| \frac{2\lambda - \alpha - \beta}{\beta - \alpha} + \sqrt{\left(\frac{2\lambda - \alpha - \beta}{\beta - \alpha} \right)^2 - 1} \right|, & \lambda \notin [\alpha, \beta], \\ 0, & \lambda \in [\alpha, \beta], \end{cases} \quad (35)$$

$$w = - \int_0^t \ln \text{cap}(\Delta_\tau) d\tau, \quad (36)$$

а $\text{cap}(\Delta_\tau)$ и $-\ln \text{cap}(\Delta_\tau)$ суть логарифмическая емкость компакта Δ_τ и энергия робеновской меры компакта Δ_τ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Логарифмический потенциал робеновской меры отрезка $\Delta = [\alpha, \beta]$ равен

$$U^{\omega_\Delta}(z) = -\ln \text{cap}(\Delta) - g_\Delta(z) = -\ln \frac{\beta - \alpha}{4} - g_{[\alpha,\beta]}(z). \quad (37)$$

Проверим для меры (33) условия равновесия (29) с ограничением (32) во внешнем поле (34):

$$U^{\lambda_Q^{t,\sigma}}(\lambda) + Q(\lambda) = - \int_0^t \ln \text{cap}(\Delta_\tau) d\tau + \int_t^{t_-(\lambda)} g_{\Delta_\tau}(\lambda) d\tau = w + \int_t^{t_-(\lambda)} g_{\Delta_\tau}(\lambda) d\tau. \quad (38)$$

При $\lambda \in \Delta_t$ последний интеграл в (38) равен нулю, так как $t_-(\lambda) \leq t \leq t_+(\lambda)$. При $\lambda \in S_{\lambda_Q^{t,\sigma}} \setminus \Delta_t$ последний интеграл в (38) меньше нуля, так как $t_-(\lambda) \leq t_+(\lambda) < t$. При $\lambda \in S_\sigma \setminus S_{\lambda_Q^{t,\sigma}}$ последний интеграл в (38) больше нуля, так как $t < t_-(\lambda)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1

$$\chi_{P_n^N} \xrightarrow{*} \frac{1}{t} \lambda_Q^{t,\sigma} \quad \text{при} \quad \frac{n}{N} \rightarrow t, \quad N \rightarrow \infty, \quad (39)$$

$$\chi_{P_{N+1}^N} \xrightarrow{*} \sigma \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty, \quad (40)$$

где σ и Q определяются формулами (32) и (34).

На рис. 3 показаны плотности равновесных мер (33) для разных значений массы t при $p = 1$ и $p = 2$. Мы можем наблюдать, что при малых t множество равновесия Δ_t совпадает с $S_{\lambda_Q^{t,\sigma}}$ (ограничение σ не активно), при увеличении t множество Δ_t возрастает, пока не начало действовать ограничение, потом множество равновесия убывает до нуля, т.е. равновесная мера совпадает с ограничением при единичной массе $t = 1$.

Рис. 3. Плотности равновесной меры при $p = 1$ для $t = 1, 1/4, 1/2, 3/4$ (а) и при $p = 2$ для $t = 1, 1/4, 1/2, 7/8$ (б).

Идея следующей теоремы – показать, что если предел (25) существует, то Q является внешним полем задачи (26), (32), (34) (см. утверждение 5). Обсудим вывод асимптотической формулы (39), но не в условиях теоремы 1 (т.е. когда многочлены P_n^N задаются рекуррентными соотношениями), а в терминах дискретной меры ортогональности (23). В рамках этого подхода асимптотика вида (39) впервые была получена Рахмановым в работе [7] для дискретно ортогональных многочленов Чебышёва. Затем этот подход получил свое развитие в ряде работ. Сформулируем общую теорему такого сорта. Справедлива (см. [7], [9], [14], [22], [23], [26])

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{P_n^N, n = 0, 1, \dots, N+1\}$ – семейство (по N) последовательностей многочленов, ортогональных относительно дискретных мер

$$\rho_N(\lambda) := \sum_{j=0}^N \rho_N^j \delta(\lambda - \lambda_j^{(N)}),$$

которые удовлетворяют трем предельным условиям:

1) существует слабый предел равномерно распределенных дискретных мер,

$$\sigma_N := \sum_{j=0}^N \frac{1}{N+1} \delta(\lambda - \lambda_j^{(N)}) \xrightarrow{*} \sigma \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (41)$$

такой что носитель потенциала σ есть интервал, и для любого компакта $K \subset S_\sigma$ потенциал $\sigma|_K$ непрерывен;

2) имеет место “разделенность” масс меры ортогональности:

$$I(\sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j \in \{0,1,\dots,N\}, \\ i \neq j}} \ln \frac{1}{|\lambda_j^{(N)} - \lambda_i^{(N)}|} < \infty; \quad (42)$$

3) существует предельный вес, т.е. непрерывная функция $\tilde{Q}$, такая что

$$\max_{j \in \{0,1,\dots,N\}} \left| \frac{\ln \rho_N^j}{N+1} + 2\tilde{Q}(\lambda_j^{(N)}) \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (43)$$

Тогда для каждого $t \in [0, 1]$ имеет место асимптотика (30):

$$\chi_{P_{[tN]}^{N-1}} \xrightarrow{*} \frac{1}{t} \lambda_{\tilde{Q}}^{t,\sigma} \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если для многочленов (14) существуют пределы (42), (43), то на множестве Δ

$$\tilde{Q}(\lambda) = Q(\lambda) = \int_0^{t_-(\lambda)} g_{\Delta_\tau}(\lambda) d\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнимость условия (41) следует из следствия 1 теоремы 1. Из формулы (37) для потенциала отрезка и теоремы Фубини следует непрерывность логарифмического потенциала σ . Учитывая полунепрерывность снизу логарифмического потенциала (см. книгу [21]), получим непрерывность ограничения потенциала σ на любой компакт.

Из следствия 1 также следует, что $\lambda_Q^{t,\sigma} = \lambda_{\tilde{Q}}^{t,\sigma}$ для всех t , а это влечет совпадение множеств равновесия, которые для каждого t представляют собой отрезок $[\alpha(t), \beta(t)]$. Условия равновесия (29) и утверждение 5 дают поле $\tilde{Q}$ с точностью до аддитивной константы. Покажем, что нормировки полей Q (28) и $\tilde{Q}$ совпадают.

Если $\min_{\Delta} \tilde{Q} < 0$, то из (43) следует, что для достаточно больших N некоторые из коэффициентов $\rho_N^j > 1$. Если $\min_{\Delta} 2\tilde{Q} = \delta > 0$, то из (43) следует, что для достаточно больших N , любого j и некоторого $\varepsilon_N < \delta/2$ имеет место неравенство $0 < \rho_N^j \leq e^{-(N+1)\delta/2}$. Следовательно,

$$\sum_j \rho_N^j \leq \frac{N+1}{e^{(N+1)\delta/2}} \rightarrow 0.$$

Оба случая противоречат (23).

Очевидно, что справедливость утверждения 4 вытекает из следствия 2 теоремы 2. Сделаем несколько замечаний относительно предельных условий теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Впервые предельное условие “разделенности” появилось в работе Рахманова [7] и имело вид $|\lambda_{j+1,N} - \lambda_{j,N}| > \mathcal{O}(1/N)$, $k = 1, \dots, N-1$. Затем в работе [23] он предположил, что это условие может быть заменено на более слабое (42). Гипотеза Рахманова была доказана Беккерманном в [26]. Условие (43) впервые появилось в работе [22].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как уже отмечалось, установить справедливость условия (42) для рассматриваемых многочленов (14), (15) нам пока не удалось, хотя можно показать ограниченность правой части в (42). Действительно, переходя от ортонормированных многочленов $\{P_n^N\}$, определяемых соотношениями (14), к многочленам $\{\hat{P}_n^N\}$ со старшим коэффициентом единица, из перемежаемости соседних нулей и определения результата имеем следующую оценку при больших N :

$$\left(\prod_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j| \right)^{\frac{N+1}{N}} > |\text{resultant}(\hat{P}_{N+1}^N, \hat{P}_N^N)|^{\frac{1}{N(N+1)}}.$$

Проведем тождественные преобразования

$$\begin{aligned} |\text{resultant}(\hat{P}_{N+1}^N, \hat{P}_N^N)|^{\frac{1}{N(N+1)}} &= (q_{N,N}^N q_{N-1,N}^{N-1} \cdots q_{2,N}^2 q_{1,N}^1)^{\frac{1}{N(N+1)}} = \\ &= \frac{(N!)^{\frac{1}{N}} (N^N \cdots 2^2 1^1)^{\frac{p-1}{N(N+1)}}}{(N+1)^{(p+1)/2}}, \end{aligned}$$

где мы пользуемся рекуррентными соотношениями (15) и свойствами результата. Используя преобразование

$$(N^N \cdots 2^2 1^1)^{\frac{1}{N(N+1)}} = \exp\left(\frac{N}{N+1} \frac{\frac{N}{N} \ln N + (1 - \frac{1}{N}) \ln(N-1) + \cdots + \frac{1}{N} \ln 1}{N}\right),$$

вычитая и прибавляя в числителе последней дроби выражение $(\frac{N+1}{2}) \ln N$, получаем

$$(N^N \cdots 2^2 1^1)^{\frac{1}{N(N+1)}} = \exp\left(\frac{\ln N}{2} + \frac{N}{N+1} \frac{\frac{N}{N} \ln 1 + (1 - \frac{1}{N}) \ln(1 - \frac{1}{N}) + \cdots + \frac{1}{N} \ln \frac{1}{N}}{N}\right).$$

Заметим, что под экспонентой стоит сумма Дарбу интеграла $\int_0^1 x \ln x dx$. Это позволяет перейти к пределу:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|\right)^{\frac{1}{N(N+1)}} &> \\ &> \frac{(N!)^{1/N} (N^N \cdots 2^2 1^1)^{\frac{p-1}{N(N+1)}}}{(N+1)^{(p+1)/2}} \rightarrow \exp\left\{(p-1) \int_0^1 x \ln x dx - 1\right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, для левой части равенства в (42), которая является энергией дискретной меры $\chi_{P_{N+1}^N}$, считающей собственные значения (13), мы получили оценку

$$\frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j \in \{0,1,\dots,N\}, \\ i \neq j}} \ln \frac{1}{|\lambda_j^{(N)} - \lambda_i^{(N)}|} = I(\chi_{P_{N+1}^N}) < \frac{p+3}{4}. \quad (44)$$

С другой стороны, существование предела (40) и полунепрерывность снизу функционала энергии (см., например, книгу [21]) дают

$$I(\sigma) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} I(\chi_{P_{N+1}^N}) < \frac{p+3}{4}. \quad (45)$$

Тем самым ограниченность в (42) доказана, однако существование предела в (42) и его совпадение с $I(\sigma)$ остается открытой задачей.

Для $p = 1$, как будет показано в следующем разделе, рассматриваемые многочлены являются дискретными многочленами Кравчука, поэтому все $\lambda_j^{(N)}$ распределены равномерно и мера σ в (42) есть мера Лебега отрезка. Условие (43) может быть проверено явно, путем рассмотрения предела весов ортогональности классических полиномов Кравчука.

В заключение данного раздела приведем доказательство утверждений 2 и 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Из (22) с помощью обратного преобразования Меллина и представления бета-интеграла получаем

$$\begin{aligned}
 \sigma(x) &= \frac{1}{\pi x} \int_0^1 \frac{\chi\left(\frac{4\tau^p(1-\tau)}{x^2} - 1\right) d\tau}{\sqrt{\frac{4\tau^p(1-\tau)}{x^2} - 1}} = \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 i x} \int_0^1 d\tau \int_{-i\infty}^{i\infty} \sqrt{\pi} \left(\frac{4\tau^p(1-\tau)}{x^2} \right)^{-\lambda} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \lambda)}{\Gamma(1 - \lambda)} d\lambda = \\
 &= \frac{1}{2ix\pi\sqrt{\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\frac{2}{x} \right)^{2\lambda} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \lambda)}{\Gamma(1 + \lambda)} \left(\int_0^1 \tau^{p\lambda}(1-\tau)^\lambda d\tau \right) d\lambda = \\
 &= \frac{1}{2\pi i x} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\frac{2}{x} \right)^{2\lambda} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2}) \Gamma(p\lambda + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma((p+1)\lambda + 2)} d\lambda.
 \end{aligned}$$

Если $p = 2m+1$, $m \geq 1$, то полюсы $\{-(k+1/2), k \in \mathbb{N}_0\}$ первого множителя в числителе подынтегрального выражения в правой части равенства гасятся полюсами $\{-(k+2)/(p+1), k \in \mathbb{N}_0\}$ знаменателя, и остаются только полюсы $\{\lambda = -k/p, k \in \mathbb{N}\}$ второго множителя в числителе; все они простые. В результате имеем

$$\begin{aligned}
 \sigma(x) &= \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{\lambda=-k/p} \left(\frac{2}{x} \right)^{2\lambda} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2}) \Gamma(p\lambda + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma((p+1)\lambda + 2)} \Big|_{p=2m+1} = \\
 &= \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{2k}{2m+1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{k}{2m+1})}{\sqrt{\pi} \Gamma(2 - k - \frac{k}{2m+1})} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)! p}.
 \end{aligned}$$

Совершим сдвиг $k \mapsto k+1$ и преобразуем Γ -функцию по формуле дополнения:

$$\sigma(x) = \frac{1}{(2m+1)x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{2k+2}{2m+1}} \frac{\Gamma(k + \frac{k+1}{2m+1})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{k+1}{2m+1}) k!} \operatorname{tg} \frac{\pi(k+1)}{2m+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3. Вблизи нуля $\sigma'(\lambda) \sim \lambda^{2/p-1}$ при $p \neq 2$ и $\sigma'(\lambda) \sim \ln \lambda$ при $p = 2$. Вычислим расстояние между двумя последовательными собственными значениями в случае $p \neq 2$ и $p = 2$ соответственно:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\tilde{\lambda}_{[N/2]+1}}{N^{(p+1)/2}}} \lambda^{2/p-1} dt &\sim \frac{1}{N} \implies \tilde{\lambda}_{[N/2]+1} - \tilde{\lambda}_{[N/2]} \sim \sqrt{N}, \\
 \int_0^{\frac{\tilde{\lambda}_{[N/2]+1}}{N^{(p+1)/2}}} \ln \lambda dt &\sim \frac{1}{N} \implies \tilde{\lambda}_{[N/2]+1} - \tilde{\lambda}_{[N/2]} \sim N.
 \end{aligned}$$

5. ТОЧНО РЕШАЕМЫЙ СЛУЧАЙ

В этом разделе с помощью преобразований Боголюбова и формул (20), (25) мы показываем, что в случае полного резонанса предельное распределение сжатого спектра при $p = 1$ есть ограничительная мера с плотностью $\sigma'(\lambda) = 1/2$. Также мы выводим, что показатель асимптотической весовой функции равен

$$Q(\lambda) = \frac{(\lambda+1) \ln(\lambda+1) + (1-\lambda) \ln(1-\lambda)}{4}. \quad (46)$$

Положим в (4) $p = 1$. Тогда гамильтониан

$$\hat{H} = \omega_0 a_0^+ a_0^- + \omega_1 a_1^+ a_1^- + B(a_0^+ a_1^- + a_1^+ a_0^-) \quad (47)$$

приводится к диагональному виду преобразованием Боголюбова:

$$a_0^\pm = b_0^\pm \cos \varphi - b_1^\pm \sin \varphi, \quad a_1^\pm = b_0^\pm \sin \varphi + b_1^\pm \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{\omega_0 - \omega_1}.$$

Легко проверяется, что $[b_i^-, b_j^+] = [a_i^-, a_j^+] = \delta_{ij}$. В терминах новых операторов гамильтониан принимает вид

$$\hat{H}' = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_1 + 2B)b_0^+ b_0^- + \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_1 - 2B)b_1^+ b_1^-. \quad (48)$$

Это гамильтониан двумерного гармонического осциллятора с разделенными переменными. По каждой из переменных собственные значения операторов $\hat{n}'_k = b_k^+ b_k^-$ суть неотрицательные целые числа, а собственные функции – многочлены Эрмита, умноженные на свою весовую функцию (плотность меры).

С другой стороны, поскольку согласно (5) гамильтониан (47) обладает законом сохранения $n_0 + n_1 = N$, его собственные значения $E_k^{(N)}$, $k \leq N$, на указанном инвариантном подпространстве равны

$$E_k^{(N)} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_1 + 2B)N - 2Bk. \quad (49)$$

Рассмотрим случай точного резонанса, когда $\Omega = 0$. Из формулы (49) следует, что собственные значения матрицы $\tilde{D}$ (11), отвечающей оператору $\hat{H}$ (47) в стандартном фоковском базисе, равны $\tilde{\lambda}_k^{(N)} = 2k - N$, $k \leq N$. Это означает, что характеристический многочлен симметричной двухдиагональной матрицы с элементами

$$\tilde{D}_{ij} = \sqrt{k(N-k+1)}\delta_{i,j-1} + \sqrt{(k+1)(N-k)}\delta_{i,j+1}$$

при четной и нечетной размерностях имеет вид

$$\tilde{P}_{2N+1}^{2N}(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda} \prod_{k=1}^N (\tilde{\lambda}^2 - 4k^2), \quad \tilde{P}_{2N}^{2N-1}(\tilde{\lambda}) = \prod_{k=1}^N (\tilde{\lambda}^2 - (2k-1)^2). \quad (50)$$

С учетом равномерного распределения собственных значений следует ожидать, что после сжатия предельная мера (40) есть вероятностная мера Лебега на отрезке $[-1, 1]$. Действительно, подставляя в (20), (25) $\Delta_\tau = [-2\sqrt{\tau(1-\tau)}, +2\sqrt{\tau(1-\tau)}]$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-\lambda^2}}{2}} \frac{d\tau}{\sqrt{4\tau(1-\tau)} - \lambda^2} = -\frac{1}{2\pi} \oint \frac{dz}{\sqrt{4z(1-z)} - \lambda^2} = \\ &= -i \operatorname{Res}_{z=\infty} \left(\frac{1}{2iz} \frac{1}{1+o(z)} \right) \equiv \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где ветвь корня мы фиксируем равной $2iz$ при $\mathbb{R}_+ \ni z \rightarrow \infty$. Можно найти в явном виде и предельную диагонализующую меру e^{-Q} , где внешнее поле Q имеет вид (при $\lambda > 0$)

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \int_0^{t^{-(\lambda)}} \ln \left| \frac{\lambda}{2\sqrt{\tau(1-\tau)}} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\tau(1-\tau)}} \right)^2 - 1} \right| d\tau = \\ &= \left[\frac{\lambda}{4} \ln(1-2\tau - \sqrt{\lambda^2 - 4\tau(1-\tau)}) - \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2 + 2\tau - 2 + \sqrt{\lambda^2 - 4\tau(1-\tau)}}{t-1} \right]_0^{\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{2}} = \\ &= \frac{(\lambda+1)\ln(\lambda+1) + (1-\lambda)\ln(1-\lambda)}{4}. \end{aligned}$$

Рекуррентные соотношения (14) (без сжатия) принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} \tilde{P}_k^N(\tilde{\lambda}) &= \sqrt{(k+1)(N-k)} \tilde{P}_{k+1}^N(\tilde{\lambda}) + \sqrt{k(N-k+1)} \tilde{P}_{k-1}^N(\tilde{\lambda}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \\ \tilde{P}_{-1}^N &= 0, \quad \tilde{P}_0^N = 1. \end{aligned}$$

С точностью до сдвига и растяжения эта система полиномов представляет собой классические полиномы Кравчука с параметром $1/2$ [27], [12], которые удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$2\tilde{\lambda} \tilde{K}_k^N(\tilde{\lambda}) = \sqrt{(k+1)(N-k)} \tilde{K}_{k+1}^N(\tilde{\lambda}) + N \tilde{K}_k^N(\tilde{\lambda}) + \sqrt{k(N-k+1)} \tilde{K}_{k-1}^N(\tilde{\lambda}), \quad (51)$$

где $k = 0, 1, \dots, N-1$, с начальными условиями $\tilde{K}_{-1}^N = 0$, $\tilde{K}_0^N = 1$, т. е.

$$\tilde{P}_k^N(2\tilde{\lambda} - N) = \tilde{K}_k^N(\tilde{\lambda}). \quad (52)$$

Асимптотика полиномов $\tilde{K}_k^N(\tilde{\lambda})$ рассмотрена в работах [22] и [14].

Мы показали двумя способами, с помощью преобразований Боголюбова и с помощью формул (20), (25), что в случае полного резонанса предельное распределение сжатого спектра при $p = 1$ есть ограничительная мера с плотностью $\sigma'(\tilde{\lambda}) = 1/2$, а асимптотическая весовая функция задается формулой (46).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В качестве резюме опишем алгоритм асимптотической диагонализации гамильтониана (1) для нахождения асимптотики собственных значений и собственных функций гамильтониана комбинационного рассеяния.

1. Фиксируем подпространство Λ с законами сохранения

$$n_0 + n_p = N, \quad n_1 = \dots = n_p = j.$$

2. Сопоставляем оператору $\hat{H}$ на Λ систему ортогональных полиномов с матрицей Якоби (11).

3. Сжимаем эти полиномы и переходим к нормированным собственным значениям (13) и полиномам (14).

4. Рассматриваем систему отрезков $\Delta_t = [c(t) - 2\sqrt{q(t)}, c(t) + 2\sqrt{q(t)}]$, где

$$c(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Omega t}{B \sqrt{(N+1)^{p-1}}}, \quad q(t) = t^p(1-t), \quad t \in [0, 1],$$

как систему множеств равновесия некоторой экстремальной меры $\lambda_Q^{t,\sigma}$. Эта мера восстанавливается по ним с помощью равенства (33).

5. Мера, считающая нули полиномов P_n^N , имеет предел по лучам, равный

$$\chi_{P_{n_j, N_j}} \xrightarrow{*} \frac{1}{t} \lambda_Q^{t,\sigma} \quad \text{при} \quad \frac{n_j}{N_j} \rightarrow t.$$

Предельное распределение сжатого спектра будет в этом случае ограничительной мерой с плотностью (20):

$$\sigma'(x) = \int_0^1 \omega_{\Delta_\tau}(x) d\tau.$$

6. Если существует непрерывный предел (43) и выполнено условие “разделенности” масс (42), то показатель асимптотики весов равен

$$-2Q(x) = -2 \int_0^{t_-(x)} g_{\Delta_\tau}(x) d\tau,$$

и асимптотические собственные функции “сжатой” задачи комбинационного рассеяния ортогональны с весом $W = e^{-2Q}$.

Благодарности. Авторы признательны Д. Н. Тулякову за полезные советы и обсуждения.

Список литературы

- [1] Ja. Perina, *Quantum Statistics of Nonlinear Optics*, Reidel, Dordrecht, 1984.
- [2] В. В. Веденяпин, Ю. Н. Орлов, “О законах сохранения для полиномиальных гамильтонианов и для дискретных моделей уравнения Больцмана”, *ТМФ*, **121**:2 (1999), 307–315.
- [3] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, М., 1984.
- [4] В. Г. Багров, Б. Ф. Самсонов, “Преобразование Дарбу, факторизация, суперсимметрия в одномерной квантовой механике”, *ТМФ*, **104**:2 (1995), 356–367.
- [5] В. F. Samsonov, J. Negro, “Darboux transformations of the Jaynes–Cummings Hamiltonian”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:43 (2004), 10115–10127.
- [6] С. Б. Лебле, “Метод одевания в квантовых моделях взаимодействия излучения с веществом”, *ТМФ*, **152**:1 (2007), 118–132.
- [7] Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискретной переменной”, *Матем. сб.*, **187**:8 (1996), 109–124.
- [8] A. Borodin, “Riemann–Hilbert problem and discrete Bessel kernel”, *Internat. Math. Res. Notices*, **2000**:9 (2000), 467–494, arXiv:math/9912093.
- [9] J. Baik, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, P. D. Miller, *Discrete orthogonal polynomials: asymptotics and application*, Annals of Mathematics Studies, **164**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.
- [10] D. Dai, R. Wong, “Global asymptotics of Krawtchouk polynomials – a Riemann–Hilbert approach”, *Chin. Ann. Math. Ser. B*, **28**:1 (2007), 1–34.
- [11] А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, “Асимптотики многочленов Мейкснера и ядер Кристоффеля–Дарбу”, *Тр. ММО*, **73**:1 (2012), 87–132.
- [12] Г. Сёге, *Ортогональные полиномы*, Физматгиз, М., 1962.
- [13] A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, “The asymptotic zero distribution of orthogonal polynomials with varying recurrence coefficients”, *J. Approx. Theory*, **99**:1 (1999), 167–197.

- [14] A. I. Aptekarev, W. Van Assche, “Asymptotic of discrete orthogonal polynomials and the continuum limit of the Toda lattice”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:48 (2001), 10627–10639.
- [15] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, F. Marcellán, “Toda-type differential equations for the recurrence coefficients of orthogonal polynomials and Freud transformation”, *J. Comput. Appl. Math.*, **78**:1 (1997), 139–160.
- [16] A. I. Aptekarev, J. S. Geronimo, W. Van Assche, “Varying weights for orthogonal polynomials with monotonically varying recurrence coefficients”, *J. Approx. Theory*, **150**:2 (2008), 214–238.
- [17] А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, “Главный член асимптотики Планшереля–Ротаха для решений рекуррентных соотношений”, *Матем. сб.*, **205**:12 (2014), 17–40.
- [18] A. I. Aptekarev, V. Kalyagin, López G. Lagomasino, I. A. Rocha, “On the limit behavior of recurrence coefficients for multiple orthogonal polynomials”, *J. Approx. Theory*, **139**:1-2 (2006), 346–370.
- [19] А. И. Аптекарев, Г. Лопес Лагомасино, И. А. Роча, “Асимптотика отношения полиномов Эрмита–Паде для систем Никишина”, *Матем. сб.*, **196**:8 (2005), 3–20.
- [20] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, **27**, Springer, Berlin, 2000.
- [21] E. B. Saff, V. Totik, *Logarithmic Potentials with External Fields*, Grundlehren Math. Wiss., **316**, Springer, Berlin, 1997.
- [22] P. D. Dragnev, E. B. Saff, “Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable”, *J. Anal. Math.*, **72**:1 (1997), 223–259.
- [23] A. B. J. Kuijlaars, E. A. Rakhmanov, “Zero distributions for discrete orthogonal polynomials”, *J. Comp. Appl. Math.*, **99**:1–2 (1998), 255–274.
- [24] P. Deift, K. T.-R. McLaughlin, *A Continuum Limit of the Toda Lattice*, Memoirs of the American Mathematical Society, **624**, AMS, Providence, RI, 1998.
- [25] В. С. Буюров, Е. А. Рахманов, “О семействах мер, равновесных во внешнем поле на вещественной оси”, *Матем. сб.*, **190**:6 (1999), 11–22.
- [26] B. Beckermann, “On a conjecture of E. A. Rakhmanov”, *Constr. Approx.*, **16**:3 (2000), 427–448.
- [27] M. Krawtchouk, “Sur une généralisation des polynomes d’Hermite”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **189**:17 (1929), 620–622.

Поступила в редакцию 1.11.2016,
после доработки 24.01.2017