Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Хакимов, О p -адической модели SOS на дереве Кэли, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 3, 547–562

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9293>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:27:52

© 2017 г.

О. Н. Хакимов*

О p -АДИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ SOS НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Рассмотрена p -адическая модель SOS (Solid-on-Solid) на дереве Кэли со взаимодействием ближайших соседей с $m + 1$ спинами и константой связи $J \in \mathbb{Q}_p$. Найдены условия, при которых в модели не происходит фазовый переход. Показано, что если p делится на $m + 1$, то при некоторых J имеет место фазовый переход. Кроме того, для модели SOS с $m + 1$ состояниями сформулирован критерий ограниченности p -адических мер Гиббса.

Ключевые слова: p -адическое число, p -адическая модель SOS, дерево Кэли, p -адическая мера Гиббса.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9293>

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

p -Адические числа были впервые введены немецким математиком К. Гензелем. Они являются неотъемлемой частью теории чисел, алгебраической геометрии, теории представлений и других областей современной математики. Были предложены многочисленные применения этих чисел в теоретической физике, см., например, работу [1] о применении p -адических чисел в квантовой механике и работу [2], где рассматривались физические наблюдаемые со значениями в поле p -адических чисел. Ряд p -адических физических моделей нельзя описать с помощью обычной теории вероятностей, основанной на аксиомах Колмогорова. В работе [3] была предложена теория случайных процессов со значениями в поле p -адических чисел и, в более общем случае, в неархимедовых полях, при этом рассматривались распределения вероятностей с неархимедовыми значениями.

Теория вероятностей и теория случайных процессов являются базовыми отделами математики, лежащими в основе статистической механики, и, поскольку мы уже имеем теорию вероятностей и теорию случайных процессов в неархимедовой формулировке, естественно рассмотреть задачи статистической механики в контексте p -адической теории вероятностей. Заметим, что p -адические меры Гиббса для некоторых p -адических моделей статистической механики изучались в работах [4]–[11].

Модель SOS (Solid-on-Solid) можно рассматривать как обобщение модели Изинга (которая отвечает случаю системы с двумя состояниями). Известно, что в p -

*Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: hakimovo@mail.ru

адической модели Изинга на дереве Кэли не возникает фазовый переход. Мы доказываем, что в модели SOS с $m + 1$ состояниями, если p не делится на $m + 1$, также не происходит фазовый переход. Кроме того, мы показываем, что в этой модели может иметь место фазовый переход, если p делится на $m + 1$. О результатах для (вещественной) модели SOS на деревьях Кэли см. работы [12], [13].

Настоящая статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит математическое введение. В разделе 3 мы строим p -адические меры Гиббса для p -адической модели SOS с $m + 1$ состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 1$ и изучаем проблему ограниченности таких мер. В разделе 4 мы изучаем множество всех трансляционно-инвариантных p -адических мер Гиббса для модели SOS с тремя состояниями и доказываем критерий единственности p -адической меры Гиббса.

1.1. p -АДические числа и меры. Пусть $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел. Для фиксированного простого числа p каждое рациональное число $x \neq 0$ может быть представлено в виде

$$x = p^r \frac{n}{m}, \quad r, n, m \in \mathbb{Z}, \quad m > 0,$$

числа m и n взаимно просты с p (наибольшие общие делители $(p, n) = 1$, $(p, m) = 1$). p -Адическая норма числа x определяется по формуле

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Эта норма является неархимедовой и удовлетворяет так называемому сильному неравенству треугольника $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$. Из этого свойства непосредственно вытекают следующие (неархимедовы) свойства нормы:

- 1) если $|x|_p \neq |y|_p$, то $|x - y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$;
- 2) если $|x|_p = |y|_p$, то $|x - y|_p \leq |x|_p$.

Пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по p -адической норме задает поле $\mathbb{Q}_p$ p -адических чисел [14]. Известно, что любое пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ есть либо поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо одно из полей $\mathbb{Q}_p$ p -адических чисел (теорема Островского).

Каждое p -адическое число $x \neq 0$ может быть единственным образом представлено в канонической форме

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots),$$

где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и x_j – целые числа, $x_0 > 0$, $0 \leq x_j \leq p - 1$ [14]–[16]. В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

Следующая теорема доказана в работе [16].

ТЕОРЕМА 1.1. Уравнение $x^2 = a$ при

$$0 \neq a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots), \quad a_0 > 0, \quad 0 \leq a_j \leq p - 1, \quad j = 1, 2, \dots,$$

имеет решение $x \in \mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: число $\gamma(a)$ четное; если $p \neq 2$, уравнение $y^2 = a_0 \pmod{p}$ разрешимо; если $p = 2$, справедливо равенство $a_1 = a_2 = 0$.

Обозначим как

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}, \quad \mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}$$

множество всех *целых p -адических чисел* и множество *p -адических единиц*.

Следующее утверждение известно как лемма Гензеля [16].

ЛЕММА 1.1. Пусть $f(x)$ – многочлен с целыми p -адическими коэффициентами. Предположим, что a_0 – целое p -адическое число такое, что $f(a_0) \equiv 0 \pmod{p^{2i+1}}$, $f(a_0) \not\equiv 0 \pmod{p^i}$, но $f'(a_0) \not\equiv 0 \pmod{p^{i+1}}$ при некотором $i \geq 0$. Тогда функция $f(x)$ имеет единственный целый p -адический корень x_0 , который удовлетворяет условию $x_0 \equiv a_0 \pmod{p}$.

Для $a \in \mathbb{Q}_p$ и $r > 0$ положим $B(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}$. p -Адический логарифм определяется как ряд

$$\log_p(x) = \log_p(1 + (x - 1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x - 1)^n}{n},$$

который сходится при $x \in B(1, 1)$; p -адическая экспонента определяется как ряд

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

который сходится при $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$.

ЛЕММА 1.2. Пусть $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$. Тогда

$$\begin{aligned} |\exp_p(x)|_p &= 1, & |\exp_p(x) - 1|_p &= |x|_p, & |\log_p(1 + x)|_p &= |x|_p, \\ \log_p(\exp_p(x)) &= x, & \exp_p(\log_p(1 + x)) &= 1 + x. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\mathcal{E}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1, |x - 1|_p < p^{-1/(p-1)}\}.$$

Следующая лемма вытекает из свойств неархимедовой нормы.

ЛЕММА 1.3. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$. Следующие утверждения эквивалентны:

- а) f есть сжимающее отображение;
- б) для всех $x, y \in \mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)|_p < |x - y|_p$;
- в) для всех $x, y \in \mathbb{Q}_p$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)|_p \leq \frac{1}{p} |x - y|_p$.

Больше подробностей о p -адической математике и p -адической математической физике можно найти в [14]–[16].

Пусть $(X, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, где $\mathcal{B}$ – алгебра подмножеств в X . Функция $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ называется p -адической мерой, если для любого набора множеств $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j);$$

p -адическая мера называется *вероятностной*, если $\mu(X) = 1$; p -адическая мера называется *ограниченной*, если [2]

$$\sup_{A \in B} |\mu(A)|_p < \infty.$$

1.2. Дерево Кэли. Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево (граф без циклов), из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Здесь V – множество вершин и L – множество ребер. Две вершины x и y называются *ближайшими соседями*, если существует ребро $l \in L$, соединяющее их. Мы используем при этом обозначение $l = \langle x, y \rangle$. Набор ребер $\langle x, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, y \rangle$, соединяющих ближайших соседей, называется *путем из x в y* . Расстояние $d(x, y)$ на дереве Кэли равно количеству ребер, составляющих кратчайший путь из x в y .

Пусть $x^0 \in V$ – фиксированная точка (корень). Введем обозначения

$$W_n = \{x \in V : d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{k=1}^n W_k$$

и определим *множество прямых потомков* вершины $x \in W_n$:

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}.$$

Пусть G_k – прямое произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка с соответствующими образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$. Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли Γ^k и группой G_k .

1.3. p -Адическая модель SOS. Пусть $\mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел и Φ – некоторое конечное множество. Конфигурация σ на множестве V определяется как функция, сопоставляющая $x \in V$ значение $\sigma(x) \in \Phi$; аналогично определяются конфигурации σ_n и $\sigma^{(n)}$ на V_n и W_n соответственно. Множество всех конфигураций на V (на V_n , на W_n) совпадает с $\Omega = \Phi^V$ (соответственно с $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$, с $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$). Для удобства мы будем использовать одно и то же обозначение σ для конфигураций на V и V_n .

Пусть G_k^* – подгруппа группы G_k . Функция h_x (например, конфигурация $\sigma(x)$), определенная для $x \in G_k$, называется G_k^* -периодической, если $h_{yx} = h_x$ (соответственно $\sigma(yx) = \sigma(x)$) для любых $x \in G_k$ и $y \in G_k^*$. G_k -Периодическая функция называется *трансляционно-инвариантной* (ТИ).

Мы рассматриваем p -адическую модель SOS на дереве Кэли, в которой спины принимают значения из множества $\Phi := \{0, 1, 2, \dots, m\}$ и приписаны к вершинам дерева.

Определим (формальный) гамильтониан p -адической модели SOS на Ω_{V_n} :

$$H_n(\sigma) = J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} |\sigma(x) - \sigma(y)|_\infty, \quad \sigma \in \Omega_{V_n}, \quad (1.1)$$

где $J \in B(0, p^{-1/(p-1)})$ есть константа связи, $\langle x, y \rangle$ – ребро, соединяющее ближайших соседей, L_n – множество ребер в V_n и $|\cdot|_\infty$ обозначает обычную абсолютную величину. Данную p -адическую модель SOS можно рассматривать как обобщение p -адической модели Изинга (которая возникает при $m = 1$).

2. СИСТЕМА p -АДИЧЕСКИХ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мы используем стандартное определение p -адической меры Гиббса и ТИ-меры. Будем называть меру μ *симметричной*, если она сохраняется при преобразовании $j \mapsto m - j$, примененном одновременно ко всем вершинам $x \in V$.

Пусть $\mathbf{z}: x \mapsto \mathbf{z}_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, \dots, z_{m,x}) \in \mathcal{E}_p^{m+1}$ есть p -адическая векторнозначная функция на $x \in V \setminus \{x_0\}$. Для заданного $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим p -адическое распределение вероятностей $\mu^{(n)}$ на Ω_{V_n} , заданное как

$$\mu_{\mathbf{z}}^{(n)}(\sigma) = Z_{n,\mathbf{z}}^{-1} \exp_p\{H_n(\sigma)\} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x),x}. \quad (2.1)$$

Здесь $\sigma \in \Omega_{V_n}$, а $Z_{n,\mathbf{z}}$ – соответствующая статистическая сумма,

$$Z_{n,\mathbf{z}} = \sum_{\omega \in \Omega_{V_n}} \exp_p\{H_n(\omega)\} \prod_{x \in W_n} z_{\omega(x),x}. \quad (2.2)$$

Будем говорить, что p -адические распределения (2.1) согласованы, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma \in \Phi^{V_{n-1}}$

$$\sum_{\omega \in \Omega_{V_n} : \omega|_{V_{n-1}} \equiv \sigma} \mu_{\mathbf{z}}^{(n)}(\omega) = \mu_{\mathbf{z}}^{(n-1)}(\sigma). \quad (2.3)$$

Отметим, что для p -адических распределений (2.1) можно доказать аналог теоремы Колмогорова о продолжении меры (см. работу [5]). Согласно этой теореме существует единственная p -адическая мера $\mu_{\mathbf{z}}$ на Ω такая, что для всех n и $\sigma \in \Omega_{V_n}$

$$\mu_{\mathbf{z}}(\{\omega \in \Omega : \omega|_{V_n} \equiv \sigma\}) = \mu_{\mathbf{z}}^{(n)}(\sigma).$$

Такая мера называется *p -адической мерой Гиббса*, отвечающей гамильтониану (1.1) и векторнозначной функции $\mathbf{z}_x$, $x \in V$. Обозначим символом $G(H)$ множество всех p -адических мер Гиббса, отвечающих гамильтониану H . Если $|G(H)| \geq 2$, будем говорить, что для такой модели имеет место *фазовый переход*.

Следующее утверждение описывает условия на функцию $\mathbf{z}$, гарантирующие согласованность распределений $\mu_{\mathbf{z}}^{(n)}(\sigma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *p -Адические распределения $\mu_{\mathbf{z}}^{(n)}(\sigma)$, $n = 1, 2, \dots$, заданные в (2.1), согласованы для p -адической модели SOS, если и только если для любого $x \in V \setminus \{x_0\}$ выполняется следующая система уравнений:*

$$\tilde{z}_{i,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{|i-j|_{\infty}} \tilde{z}_{j,y} + \theta^{m-i}}{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{m-j} \tilde{z}_{j,y} + 1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.4)$$

Здесь $\theta = \exp_p(J)$ и $\tilde{z}_{i,x} = z_{i,x}/z_{m,x}$ для $i = 0, 1, \dots, m-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Предположим, что равенство (2.3) выполнено, и докажем, что имеет место (2.4). Подставляя выражение (2.1) в (2.3), для любой конфигурации $\sigma \in \Omega_{V_{n-1}}$ получаем

$$\frac{Z_{n-1,\mathbf{z}}}{Z_{n,\mathbf{z}}} \sum_{\omega \in \Omega_{V_n} : \omega|_{V_{n-1}} \equiv \sigma} \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y \in S(x)} \exp_p(J|\sigma(x) - \omega(y)|_{\infty}) z_{\omega(y),y} = \prod_{x \in W_{n-1}} z_{\sigma(x),x}.$$

Отсюда для каждого $i = 0, 1, \dots, m$

$$\prod_{y \in S(x)} \frac{\sum_{j=0}^m \exp_p(J|i-j|_\infty) z_{j,y}}{\sum_{j=0}^m \exp_p(J(m-j)) z_{j,y}} = \frac{z_{i,x}}{z_{m,x}}. \quad (2.5)$$

Вводя обозначения $\theta = \exp_p(J)$ и $\tilde{z}_{i,x} = z_{i,x}/z_{m,x}$, из (2.5) получаем уравнения (2.4).

Достаточность. Предположим, что выполнены уравнения (2.4). Это эквивалентно тому, что

$$\prod_{y \in S(x)} \sum_{j=0}^m \theta^{|i-j|_\infty} z_{j,y} = a(x) z_{i,x}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.6)$$

при некоторой функции $a(x)$. Мы можем записать левую часть равенства (2.3) как

$$\frac{1}{Z_{n,\mathbf{z}}} \exp_p(H_{n-1}(\sigma)) \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y \in S(x)} \sum_{j=0}^m \theta^{|i-j|_\infty} z_{i,y}. \quad (2.7)$$

Подставляя в это выражение равенство (2.6) и вводя обозначение

$$A_n(x) = \prod_{y \in W_{n-1}} a(y),$$

получаем, что выражение (2.7) можно переписать в виде

$$\frac{A_{n-1}}{Z_{n,\mathbf{z}}} \exp_p(H_{n-1}(\sigma)) \prod_{x \in W_{n-1}} z_{\sigma(x),x}. \quad (2.8)$$

Поскольку $\mu_{\mathbf{z}}^{(n)}$ есть вероятностная мера для всех $n \geq 1$, мы имеем

$$\sum_{\omega \in \Omega_{V_n}} \mu_{\mathbf{z}}^{(n)}(\omega) = 1.$$

Таким образом, сравнивая (2.7) и (2.8), мы получаем, что $Z_{n,\mathbf{z}} = A_{n-1} Z_{n-1,\mathbf{z}}$, тем самым имеет место равенство (2.3).

Следующее предложение доказывается непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть H – гамильтониан p -адической модели SOS с $m+1$ состояниями на дереве Кэли Γ^k . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) всякая мера μ с локальными распределениями $\mu^{(n)}$, удовлетворяющими равенствам (2.1), (2.3), принадлежит множеству $G(H)$;

2) мера $\mu \in G(H)$ является ТИ-мерой, если и только если $z_{i,x}$ не зависит от x , $z_{i,x} \equiv z_i$ при $x \in V$ для каждого $i \in \Phi$, и является симметричной ТИ-мерой, если и только если $z_i = z_{m-i}$ для всех $i \in \Phi$.

2.1. Ограниченность p -адической меры Гиббса. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть H – гамильтониан p -адической модели SOS с $m+1$ состояниями на дереве Кэли порядка k . Мера $\mu \in G(H)$ ограничена, если и только если $m+1$ не делится на p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{z}_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, \dots, z_{m-1,x})$ есть решение системы (2.4). Тогда из уравнений (2.6) мы находим, что для всех $x \in V \setminus \{x_0\}$

$$a(x) = \prod_{y \in S(x)} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{m-j} z_{j,y} + 1 \right) = \prod_{y \in S(x)} \left(\sum_{j=0}^{m-1} (\theta^{m-j} z_{j,y} - 1) + m + 1 \right).$$

Поскольку $\theta \in \mathcal{E}_p$ и $z_{i,x} \in \mathcal{E}_p^m$, из свойств неархимедовой нормы мы получаем, что

$$|a(x)|_p \begin{cases} = 1, & \text{если } p \text{ не делится на } m+1, \\ \leq p^{-k}, & \text{если } p \text{ делится на } m+1. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$|A_n(x)|_p = \prod_{y \in W_{n-1}} |a(y)|_p \begin{cases} = 1, & \text{если } p \text{ не делится на } m+1, \\ \leq p^{-k|W_{n-1}|}, & \text{если } p \text{ делится на } m+1. \end{cases} \quad (2.9)$$

При этом мы использовали рекуррентную формулу $Z_{n,\mathbf{z}} = A_{n-1}Z_{n-1,\mathbf{z}}$. Из (2.9) мы получаем

$$|Z_{n,\mathbf{z}}|_p = \prod_{x \in V_{n-1}} |A_{n-1}(x)|_p \begin{cases} = 1, & \text{если } p \text{ не делится на } m+1, \\ \leq p^{-k|V_{n-1}|}, & \text{если } p \text{ делится на } m+1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Для любой конфигурации $\sigma \in \Omega_{V_n}$ с учетом (2.10) мы имеем

$$\begin{aligned} |\mu_{\mathbf{z}}^{(n)}(\sigma)|_p &= \frac{|\exp_p\{H_n(\sigma)\} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x),x}|_p}{|Z_{n,\mathbf{z}}|_p} = \\ &= \frac{1}{|Z_{n,\mathbf{z}}|_p} \begin{cases} = 1, & \text{если } p \text{ не делится на } m+1, \\ \geq p^{k|V_{n-1}|}, & \text{если } p \text{ делится на } m+1, \end{cases} \end{aligned}$$

и это означает, что мера $\mu_{\mathbf{z}}$ ограничена, если и только если p не делится на $m+1$.

3. МОДЕЛЬ SOS С ТРЕМЯ СОСТОЯНИЯМИ

Из предложения 2.2 следует, что для всякой функции $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_x, x \in V\}$, удовлетворяющей условию (2.4), существует единственная p -адическая мера Гиббса μ . Рассмотрим множество всех p -адических ТИ-мер для модели (1.1). Заметим, что это множество содержится в $G(H)$, однако его описание для произвольного m представляет собой непростую задачу.

Пусть $m = 2$, т. е. $\Phi = \{0, 1, 2\}$. Мы полагаем $z_{2,x} \equiv 1$ ($z_{m,x} \equiv 1$ для общего m).

3.1. ТИ-решения. Естественно начать с ТИ-решений, для которых $\mathbf{z}_x = \mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{E}_p^{m+1}$ при всех $x \in V$. Если иное не оговорено особо, мы концентрируем свое внимание на случае $m = 2$, т. е. полагаем, что спин принимает значения 0, 1 и 2. В этом случае из (2.4) мы получаем

$$z_0 = \left(\frac{z_0 + \theta z_1 + \theta^2}{\theta^2 z_0 + \theta z_1 + 1} \right)^k, \quad (3.1)$$

$$z_1 = \left(\frac{\theta z_0 + z_1 + \theta}{\theta^2 z_0 + \theta z_1 + 1} \right)^k. \quad (3.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. При $p \neq 3$ система уравнений (3.1), (3.2) не имеет решений в множестве $\mathcal{A}_p = \{(z_0, z_1) \in \mathcal{E}_p^2: z_0 \neq 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $A = z_0 + \theta z_1 + \theta^2$, $B = \theta^2 z_0 + \theta z_1 + 1$. Тогда из (3.1) получаем

$$(z_0 - 1) \left(B^k + (\theta^2 - 1) \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B^i \right) = 0. \quad (3.3)$$

В силу того, что $\theta, z_0, z_1 \in \mathcal{E}_p$, имеем $A \equiv 3 \pmod{p}$ и $B \equiv 3 \pmod{p}$, следовательно,

$$\left| B^k + (\theta^2 - 1) \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B^i \right|_p = |3^k|_p = 1. \quad (3.4)$$

Из соотношений (3.3) и (3.4) мы получаем $z_0 = 1$.

Заметим, что $z_0 = 1$ удовлетворяет уравнению (3.1) независимо от k , θ и z_1 . Подставляя $z_0 = 1$ в (3.2), мы имеем

$$z_1 = \left(\frac{2\theta + z_1}{\theta^2 + \theta z_1 + 1} \right)^k. \quad (3.5)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left(\frac{2a + x}{a^2 + ax + 1} \right)^k.$$

Пусть $p \neq 3$ и $a \in \mathcal{E}_p$. Тогда для любого $x \in \mathcal{E}_p$ из свойств неархимедовой нормы вытекает, что

$$|f(x)|_p = \left(\frac{|2a + x|_p}{|a^2 + ax + 1|_p} \right)^k = 1,$$

$$|f(x) - 1|_p = \left| \frac{(a - 1)(1 - x - a) \sum_{i=0}^{k-1} (2a + x)^{k-1-i} (a^2 + ax + 1)^i}{(a^2 + ax + 1)^k} \right|_p < p^{-1/(p-1)}.$$

Таким образом, мы показали, что функция f переводит $\mathcal{E}_p$ в $\mathcal{E}_p$, если $p \neq 3$ и $a \in \mathcal{E}_p$.

Теперь покажем, что $|f'(x)|_p < 1$ для всех $x \in \mathcal{E}_p$. Имеем

$$f'(x) = -\frac{k(a^2 - 1)}{(a^2 + ax + 1)^2} \left(\frac{2a + x}{a^2 + ax + 1} \right)^{k-1}.$$

Поскольку $p \neq 3$ и $a \in \mathcal{E}_p$, мы получаем

$$|f'(x)|_p = |k(a^2 - 1)|_p \leq \frac{1}{p}.$$

Следовательно, для всех $x, y \in \mathcal{E}_p$

$$|f(x) - f(y)|_p \leq \frac{1}{p} |x - y|_p.$$

В результате функция f имеет единственную неподвижную точку x^* , поскольку множество $\mathcal{E}_p$ компактно. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. При $p \neq 3$ система уравнений (3.1), (3.2) имеет единственное решение в множестве $\mathcal{E}_p^2 \setminus \mathcal{A}_p$.

Из предложений 3.1 и 3.2 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $p \neq 3$. Тогда для p -адической модели SOS с тремя состояниями на дереве Кэли порядка k существует единственная p -адическая ТИ-мера Гиббса.

Теперь рассмотрим случай $p = 3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $p = 3$. Если $\theta \in \{x \in \mathcal{E}_3 : |x - 1|_3 < 3^{-2}\}$, то система уравнений (3.1), (3.2) имеет решение в $\mathcal{E}_3^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующий полином с p -адическими целыми коэффициентами:

$$g(x) = \theta x^{k+1} - x^k + (\theta^2 + 1)x - 2\theta. \quad (3.6)$$

Проверим, выполнены ли условия леммы Гензеля: мы имеем

$$g(1) = \theta(\theta - 1), \quad g'(1) = (\theta - 1)(\theta + k + 2) + 3. \quad (3.7)$$

Поскольку $\theta \in \{x \in \mathcal{E}_3 : |x - 1|_3 < 3^{-2}\}$, мы получаем равенство

$$\theta \equiv 1 \pmod{27}, \quad (3.8)$$

используя которое, выводим из (3.7) следующие соотношения:

$$g(1) \equiv 0 \pmod{27}, \quad g'(1) \equiv 0 \pmod{3}, \quad g'(1) \not\equiv 0 \pmod{9}.$$

Таким образом, мы показали, что для функции $g(x)$ выполнены все условия леммы Гензеля. Поэтому $g(x)$ имеет единственный p -адический целый корень x_* , удовлетворяющий условию $x_* \equiv 1 \pmod{9}$.

Нетрудно увидеть, что $x_*^k \in \mathcal{E}_3$ при любом $k \geq 1$ и что $z_1^* = x_*^k$ является решением уравнения (3.5). Следовательно, $(1, z_1^*) \in \mathcal{E}_3^2$ является решением системы (3.1), (3.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $p = 3$. Если k – четное число, не делящееся на p , то система уравнений (3.1), (3.2) имеет решение в $\mathcal{E}_3^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях предложения мы получаем

$$2^k \equiv 1 \pmod{3}, \quad k \not\equiv 0 \pmod{3}. \quad (3.9)$$

Рассмотрим функцию $g(x)$ (см. (3.6)). Имеем

$$g(2) = 2^{k+1}\theta - 2^k + 2(\theta^2 - \theta + 1), \quad g'(2) = (k+1)2^k\theta - k2^{k-1} + \theta^2 + 1.$$

Поскольку $\theta \in \mathcal{E}_3$, используя (3.9), мы получаем

$$\begin{aligned} g(2) &= 2^{k+1}\theta - 2^k + 2(\theta^2 - \theta + 1) \equiv 0 \pmod{3}, \\ g'(2) &= (k+1)2^k\theta - k2^{k-1} + \theta^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{3}. \end{aligned}$$

Тогда в силу леммы Гензеля существует единственное p -адическое целое число $\tilde{x}_*$ такое, что $g(\tilde{x}_*) = 0$ и $\tilde{x}_* \equiv 2 \pmod{3}$. Нетрудно проверить, что $\tilde{x}_*^k \in \mathcal{E}_3$. Положим $\tilde{z}_* = \tilde{x}_*^k$. Тогда $\tilde{z}_*$ – решение уравнения (3.2). Следовательно, $(1, \tilde{z}_1^*) \in \mathcal{E}_3^2$ есть решение системы (3.1), (3.2).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $p = 3$ и $\theta \in \{x \in \mathcal{E}_3 : |x - 1|_3 < 3^{-2}\}$. Если k – четное число, не делящееся на p , то система уравнений (3.1), (3.2) имеет по меньшей мере два решения в $\mathcal{E}_3^2$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $p = 3$ и $\theta \in \{x \in \mathcal{E}_3 : |x - 1|_3 < 3^{-2}\}$. Если k – четное число, не делящееся на p , то в p -адической модели SOS с тремя состояниями на дереве Кэли порядка k происходит фазовый переход.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть $p = 3$ и $k = 2$. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\theta \notin \{x \in \mathcal{E}_3 : |x - 10|_3 < 3^{-2}\}$, то система уравнений (3.1), (3.2) не имеет решений в множестве $\mathcal{A}_3 = \{(z_0, z_1) \in \mathcal{E}_3^2 : z_0 \neq 1\}$;
- 2) если $\theta \in \{x \in \mathcal{E}_3 : |x - 37|_3 < 3^{-3}\}$, то система уравнений (3.1), (3.2) имеет два решения в множестве $\mathcal{A}_3 = \{(z_0, z_1) \in \mathcal{E}_3^2 : z_0 \neq 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $z_i \in \mathcal{E}_p$ для $i = 1, 2$, в силу теоремы 1.1 существует $\sqrt{z_i} \in \mathbb{Q}_p$. Положим $x = \sqrt{z_0}$ и $y = \sqrt{z_1}$. Перепишем уравнения (3.1), (3.2) как

$$x = \frac{x^2 + \theta y^2 + \theta^2}{\theta^2 x^2 + \theta y^2 + 1}, \quad (3.10)$$

$$y = \frac{\theta x^2 + y^2 + \theta}{\theta^2 x^2 + \theta y^2 + 1}. \quad (3.11)$$

Из уравнения (3.10) мы получаем

$$(x - 1)(\theta^2 x^2 + \theta y^2 + 1 + (\theta^2 - 1)(x + 1)) = 0. \quad (3.12)$$

Пусть $x \neq 1$. Тогда

$$\theta^2 x^2 + \theta y^2 + 1 = (1 - \theta^2)(x + 1). \quad (3.13)$$

Подставим это соотношение в (3.11) и получим

$$\theta y = \frac{x}{x + 1}. \quad (3.14)$$

Отсюда мы заключаем, что

$$x \equiv 1 \pmod{3}, \quad y \equiv 2 \pmod{3}.$$

Из (3.13) и (3.14) мы получаем следующее уравнение:

$$\theta^3 x^4 + \theta(3\theta^2 - 1)x^3 + (4\theta^3 - 2\theta + 1)x^2 + \theta(3\theta^2 - 1)x + \theta^3 = 0. \quad (3.15)$$

Заметим, что оно имеет решение $x = 1$, если и только если $12\theta^3 - 4\theta + 1 = 0$.

Предположим, что $12\theta^3 - 4\theta + 1 = 0$. Тогда из уравнения (3.15) получаем

$$(x - 1)^2(\theta^3 x^2 + \theta(5\theta^2 - 1)x + \theta^3) = 0.$$

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\theta^3 x^2 + \theta(5\theta^2 - 1)x + \theta^3 = 0. \quad (3.16)$$

Оно имеет решения в $\mathbb{Q}_3$, если и только если в $\mathbb{Q}_3$ существует $\sqrt{1-7\theta^2}$. Покажем, что квадратное уравнение (3.16) не имеет решений в $\mathbb{Q}_3$. Из уравнения $12\theta^3 - 4\theta + 1 = 0$ и условия $\theta \in \mathcal{E}_3$ мы получаем, что $\theta \equiv 10 \pmod{27}$. Тогда $1 - 7\theta^2 \equiv 3 \pmod{27}$. Следовательно, в силу теоремы 1.1 не существует $\sqrt{1-7\theta^2} \in \mathbb{Q}_3$. Поэтому (3.16) не имеет решений в $\mathbb{Q}_3$.

Пусть теперь $12\theta^3 - 4\theta + 1 \neq 0$. Положим $t = x + x^{-1}$. Тогда из (3.15) мы имеем

$$\theta^3 t^2 + \theta(3\theta^2 - 1)t + 2\theta^3 - 2\theta + 1 = 0. \quad (3.17)$$

Введем обозначение $D = \theta^4 + 2\theta^2 - 4\theta + 1$. Уравнение (3.17) имеет два различных решения t_i , $i = 1, 2$, если существует $\sqrt{D} \in \mathbb{Q}_3$. Кроме того, $t_i \equiv 2 \pmod{3}$ для $i = 1, 2$. Решения уравнения (3.15) таковы:

$$x^\pm = \frac{1 - 3\theta^2 + \sqrt{D} \pm \sqrt{(1 - 7\theta^2 + \sqrt{D})(1 + \theta^2 + \sqrt{D})}}{4\theta^2},$$

$$x_\pm = \frac{1 - 3\theta^2 - \sqrt{D} \pm \sqrt{(1 - 7\theta^2 - \sqrt{D})(1 + \theta^2 - \sqrt{D})}}{4\theta^2}.$$

Заметим, что условие существования решений $x^\pm$ эквивалентно условию существования $\sqrt{D} \in \mathbb{Q}_3$ и условию существования $\sqrt{2(1 - 7\theta^2 - \sqrt{D})} \in \mathbb{Q}_3$. Кроме того, если существуют решения $x^\pm$, то $x^\pm \equiv 1 \pmod{3}$.

Покажем, что в $\mathbb{Q}_3$ не существует $\sqrt{2(1 - 7\theta^2 + \sqrt{D})}$. Сначала проверим существование $\sqrt{D}$. Имеем

$$D = \theta^4 + 2\theta^2 - 4\theta + 1 = (\theta - 1)(4\theta + (\theta - 1)(\theta + 1)^2).$$

Поскольку $\theta \in \mathcal{E}_3$, используя теорему 1.1, мы заключаем, что $\sqrt{D}$ существует, если и только если

$$\theta = 1 + 3^{2n}(1 + \varepsilon), \quad n \in \mathbb{N}, \quad |\varepsilon|_3 < 1. \quad (3.18)$$

Отсюда мы получаем

$$\sqrt{D} = 3^n(1 + \varepsilon'), \quad |\varepsilon'|_3 < 1.$$

Следовательно, для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |1 - 7\theta^2 + \sqrt{D}|_3 &= |1 - 7(1 + 3^{2n}(1 + \varepsilon)) + 3^n(1 + \varepsilon')|_3 = \\ &= |-6 + 3^n + 3^n\varepsilon' - 14(1 + \varepsilon)3^{2n} + 7(1 + \varepsilon)^2 3^{4n}|_3 = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

По теореме 1.1 число $\sqrt{2(1 - 7\theta^2 + \sqrt{D})}$ не существует в $\mathbb{Q}_3$.

Теперь проверим существование числа $\sqrt{2(1 - 7\theta^2 - \sqrt{D})}$. Используя (3.18), получаем

$$|1 - 7\theta^2 + \sqrt{D}|_3 \begin{cases} = \frac{1}{3}, & \text{если } n > 1, \\ < \frac{1}{3}, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Следовательно, в силу теоремы 1.1 при $n > 1$ не существует $\sqrt{2(1 - 7\theta^2 - \sqrt{D})} \in \mathbb{Q}_3$. Таким образом, нам осталось проверить случай $n = 1$.

Пусть $|\theta - 37|_3 < 3^{-3}$, т. е. $\theta = 37 + \beta$, $|\beta|_3 < 3^{-3}$. Тогда мы получаем

$$(1 - 7\theta^2 + \sqrt{D})(1 - 7\theta^2 - \sqrt{D}) = 4\theta(12\theta^3 - 4\theta + 1) = \\ = 4(37 + \beta)(12(37 + \beta)^3 - 4(37 + \beta) + 1) = 27(1 + 2 \cdot 3 + 3^2 + \dots). \quad (3.20)$$

С другой стороны, используя соотношение (3.19), можно найти

$$1 - 7\theta^2 + \sqrt{D} = 6(1 + \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3^2 + \dots), \quad \alpha_i \in \{0, 1, 2\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Отсюда с учетом (3.20) мы получаем

$$2(1 - 7\theta^2 - \sqrt{D}) = 9(1 + \gamma_1 \cdot 3 + \gamma_2 \cdot 3^2 + \dots), \quad \gamma_i \in \{0, 1, 2\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда по теореме 1.1 существует $\sqrt{2(1 - 7\theta^2 - \sqrt{D})} \in \mathbb{Q}_3$. Следовательно, (x_+, y_+) и (x_-, y_-) , где $y_{\pm} = x_{\pm}/\theta(x_{\pm} + 1)$, являются решениями системы уравнений (3.10), (3.11). Положим теперь $z_0^{\pm} = x_{\pm}$ и $z_1^{\pm} = y_{\pm}$. Понятно, что $z_i^{\pm} \in \mathcal{E}_3$, $i = 0, 1$, и $z_0^{\pm} \neq 1$.

Итак, мы показали, что система уравнений (3.1), (3.2) имеет два решения в $\mathcal{A}_3$, если $|\theta - 37|_3 < 3^{-3}$, и не имеет решений в $\mathcal{A}_3$, если $|\theta - 1|_3 < 3^{-2}$.

Использував предложение 3.5, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.3. *В 3-адической модели SOS с тремя состояниями на дереве Кэли порядка два фазовый переход имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

- 1) $\theta \in \{x \in \mathcal{E}_3 : |x - 1|_3 < 3^{-2}\}$,
- 2) $\theta \in \{x \in \mathcal{E}_3 : |x - 37|_3 < 3^{-3}\}$.

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ p -АДИЧЕСКОЙ МЕРЫ ГИББСА

В предыдущем разделе мы показали, что при $p \neq 3$ в p -адической модели SOS с тремя состояниями не происходит фазовый переход. Возникает естественный вопрос: какова должна быть связь между числом m и простым числом p , чтобы в p -адической модели SOS с $m + 1$ состояниями произошел фазовый переход? В настоящем разделе мы найдем эту связь.

Сначала докажем несколько технических утверждений. В работе [7] доказана следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. *Если $a_i \in \mathcal{E}_p$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $\prod_{i=1}^n a_i \in \mathcal{E}_p$.*

Напомним, что p -адическая норма вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}_p^m$ определяется как

$$\|\mathbf{x}\|_p = \max_{1 \leq i \leq m} \{|x_i|_p\}.$$

Введем набор функций $F_i : \mathbb{Q}_p^{m+1} \mapsto \mathbb{Q}_p$, $i = 0, 1, \dots, m$, с помощью формулы

$$F_i(\mathbf{z}, \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, m) = \frac{\sum_{j=0}^m a_{ij} z_j}{\sum_{j=0}^m b_{ij} z_j},$$

где

$$\mathbf{a}_i = (a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im}) \in \mathcal{E}_p^{m+1}, \quad \mathbf{b}_i = (b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{im}) \in \mathcal{E}_p^{m+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Далее для краткости мы будем писать $F_i(\mathbf{z})$ вместо $F_i(\mathbf{z}, \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, m)$.

ЛЕММА 4.2. Пусть $m+1$ не делится на p . Тогда F_i – функция из $\mathcal{E}_p^{m+1}$ в $\mathcal{E}_p$ при каждом $i = 0, 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_p^{m+1}$. Покажем, что $|F_i(\mathbf{z}) - 1|_p < p^{-1/(p-1)}$. Используя лемму 4.1, имеем $a_{ij}z_j, b_{ij}z_j \in \mathcal{E}_p$ при каждом $j = 0, 1, \dots, m$, поскольку $a_{ij}, b_{ij}, z_j \in \mathcal{E}_p$. Учитывая, что $m+1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, и используя свойства неархимедовой нормы, мы получаем

$$\left| \sum_{j=0}^m b_{ij}z_j \right|_p = \left| \sum_{j=0}^m (b_{ij}z_j - 1) + m + 1 \right|_p = 1. \quad (4.1)$$

Отсюда

$$|F_i(\mathbf{z}) - 1|_p = \frac{\left| \sum_{j=0}^m (a_{ij} - b_{ij})z_j \right|_p}{\left| \sum_{j=0}^m b_{ij}z_j \right|_p} \leq \max_{0 \leq j \leq m} \{|a_{ij} - b_{ij}|_p\} < p^{-1/(p-1)}.$$

ЛЕММА 4.3. Пусть $m+1$ не делится на p . Тогда для любых $\mathbf{z}, \mathbf{t} \in \mathcal{E}_p^{m+1}$ выполнено неравенство

$$|F_i(\mathbf{z}) - F_i(\mathbf{t})|_p \leq \frac{1}{p} \|\mathbf{z} - \mathbf{t}\|_p, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m+1 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда для любых $z, t \in \mathcal{E}_p$ из соотношения (4.1) мы получаем

$$\begin{aligned} |F_i(\mathbf{z}) - F_i(\mathbf{t})|_p &= \frac{\left| \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^m a_{ij}b_{il}(z_jt_l - z_lt_j) \right|_p}{\left| \sum_{j=0}^m a_{ij}z_j \sum_{l=0}^m b_{il}t_l \right|_p} = \\ &= \left| \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^m a_{ij}b_{il}(t_l(z_j - t_j) - t_j(z_l - t_l)) \right|_p = \\ &= \left| \sum_{s=0}^m (z_s - t_s) \left(\sum_{l \neq s} a_{is}b_{il} - \sum_{j \neq s} a_{ij}b_{is} \right) \right|_p \leq \frac{1}{p} \|\mathbf{z} - \mathbf{t}\|_p. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В силу того, что $a_{ij}, b_{il} \in \mathcal{E}_p$, используя лемму 4.1, мы получаем, что $a_{ij}b_{il} \in \mathcal{E}_p$. Следовательно, для любых $i, j, l \in \{0, 1, \dots, m\}$

$$|a_{ij} - b_{il}|_p = |a_{ij} - 1 + 1 - b_{il}|_p \leq \max\{|a_{ij} - 1|_p, |b_{il} - 1|_p\} < p^{-1/(p-1)} \leq \frac{1}{p}.$$

Отсюда с учетом (4.2) получаем неравенство

$$|F_i(\mathbf{z}) - F_i(\mathbf{t})|_p \leq \frac{1}{p} \|\mathbf{z} - \mathbf{t}\|_p.$$

ЛЕММА 4.4. Пусть $\{\mathbf{z}^{(r)}\}_{r \in \mathbb{N}}$ и $\{\mathbf{t}^{(r)}\}_{r \in \mathbb{N}}$ – последовательности в $\mathcal{E}_p^{m+1}$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\left| \prod_{s=1}^n F_i(\mathbf{z}^{(s)}) - \prod_{s=1}^n F_i(\mathbf{t}^{(s)}) \right|_p \leq \frac{1}{p} \max_{1 \leq s \leq n} \|\mathbf{z}^{(s)} - \mathbf{t}^{(s)}\|_p, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем для доказательства индукцию по n . В силу леммы 4.3 неравенство (4.3) выполняется при $n = 1$. Предположим, что неравенство (4.3) верно для n , и докажем, что оно также верно для $n + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \prod_{s=1}^{n+1} F_i(\mathbf{z}^{(s)}) - \prod_{s=1}^{n+1} F_i(\mathbf{t}^{(s)}) \right|_p &= \left| \prod_{s=1}^n F_i(\mathbf{z}^{(s)}) \cdot F_i(\mathbf{z}^{(n+1)}) - \prod_{s=1}^n F_i(\mathbf{t}^{(s)}) \cdot F_i(\mathbf{t}^{(n+1)}) \right|_p = \\ &= \left| \left(\prod_{s=1}^n F_i(\mathbf{z}^{(s)}) - \prod_{s=1}^n F_i(\mathbf{t}^{(s)}) \right) F_i(\mathbf{z}^{(n+1)}) + (F_i(\mathbf{z}^{(n+1)}) - F_i(\mathbf{t}^{(n+1)})) \prod_{s=1}^n F_i(\mathbf{t}^{(s)}) \right|_p. \end{aligned} \quad (4.4)$$

С учетом лемм 4.1 и 4.2 получаем

$$|F_i(\mathbf{z}^{(n+1)})|_p = 1, \quad \left| \prod_{s=1}^n F_i(\mathbf{t}^{(s)}) \right|_p = 1.$$

Используя свойства неархимедовой нормы, выводим из (4.4) следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \prod_{s=1}^{n+1} F_i(\mathbf{z}^{(s)}) - \prod_{s=1}^{n+1} F_i(\mathbf{t}^{(s)}) \right|_p &\leq \\ &\leq \max \left\{ \left| \prod_{s=1}^n F_i(\mathbf{z}^{(s)}) - \prod_{s=1}^n F_i(\mathbf{t}^{(s)}) \right|_p, |F_i(\mathbf{z}^{(n+1)}) - F_i(\mathbf{t}^{(n+1)})|_p \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \max \left\{ \max_{1 \leq s \leq n} \|\mathbf{z}^{(s)} - \mathbf{t}^{(s)}\|_p, \|\mathbf{z}^{(n+1)} - \mathbf{t}^{(n+1)}\|_p \right\} = \frac{1}{p} \max_{1 \leq s \leq n+1} \|\mathbf{z}^{(s)} - \mathbf{t}^{(s)}\|_p. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть $\mathbf{z}_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, \dots, z_{m,x}) \in \mathcal{E}_p^{m+1}$. Рассмотрим следующие функциональные уравнения:

$$z_{i,x} = \prod_{y \in S(x)} F_i(\mathbf{z}_y), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad x \in V \setminus \{x_0\}. \quad (4.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $m+1$ не делится на p . Тогда уравнения (4.5) имеют единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{z}_x) = \prod_{y \in S(x)} F_i(\mathbf{z}_y). \quad (4.6)$$

Пусть $\mathbf{z}_x, \mathbf{t}_x \in \mathcal{E}_p^{m+1}$ при любом $x \in V \setminus \{x_0\}$. Поскольку $|S(x)| = k$ для любого $x \in V \setminus \{x_0\}$, используя лемму 4.4, имеем

$$|\mathcal{F}_i(\mathbf{z}_x) - \mathcal{F}_i(\mathbf{t}_x)|_p \leq \frac{1}{p} \max_{y \in S(x)} \|\mathbf{z}_y - \mathbf{t}_y\|_p, \quad x \in V \setminus \{x_0\}. \quad (4.7)$$

Введем обозначение

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}_x) = (\mathcal{F}_0(\mathbf{z}_x), \mathcal{F}_1(\mathbf{z}_x), \dots, \mathcal{F}_m(\mathbf{z}_x)).$$

По лемме 4.2 $\mathcal{F}$ есть функция из $\mathcal{E}_p^{m+1}$ в $\mathcal{E}_p^{m+1}$. Из неравенства (4.7) для каждого $x \in V \setminus \{x_0\}$ мы получаем

$$\|\mathcal{F}(\mathbf{z}_x) - \mathcal{F}(\mathbf{t}_x)\|_p \leq \frac{1}{p} \max_{y \in S(x)} \|\mathbf{z}_y - \mathbf{t}_y\|_p,$$

и это означает, что функция $\mathcal{F}$ сжимающая. Следовательно, она имеет единственную неподвижную точку в $\mathcal{E}_p^{m+1}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть H – гамильтониан p -адической модели SOS с $m+1$ состояниями на дереве Кэли Γ^k . Если p не делится на $m+1$, то $|G(H)| = 1$. Более того, мера $\mu \in G(H)$ является симметричной ТИ-мерой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F_m(\mathbf{z}) \equiv 1$ и

$$F_i(\mathbf{z}) = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{|i-j|_\infty} z_{j,y} + \theta^{m-i}}{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{m-j} z_{j,y} + 1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Если p не делится на $m+1$, то в силу предложений 2.1 и 4.1 для p -адической модели SOS с $m+1$ состояниями на дереве Кэли Γ^k существует единственная p -адическая мера Гиббса.

Пусть

$$\mathcal{I} = \{(z_0, z_1, \dots, z_m) : z_j \in \mathcal{E}_p, z_j = z_{m-j} \text{ для } j = 0, \dots, m\}.$$

Нетрудно заметить, что если $z \in \mathcal{I}$, то $F_i(\mathbf{z}) = F_{m-i}(\mathbf{z})$ для всех $i = 1, 2, \dots, m+1$. Согласно доказательству предложения 4.1 единственное решение уравнений (4.5) принадлежит $\mathcal{I}$. Тогда в силу предложения 2.2 единственная p -адическая мера Гиббса является симметричной ТИ-мерой.

Список литературы

- [1] P. G. O. Freund, M. Olson, “Non-archimedean strings”, *Phys. Lett.*, **199**:2 (1987), 186–190.
- [2] A. Yu. Khrennikov, “ p -Adic quantum mechanics with p -adic valued functions”, *J. Math. Phys.*, **32**:4 (1991), 932–936.
- [3] A. Khrennikov, S. Ludkovsky, “Stochastic processes on non-Archimedean spaces with values in non-Archimedean fields”, *Markov Process. Related Fields*, **9**:1 (2003), 131–162.
- [4] G. Gandolfo, U. A. Rozikov, J. Ruiz, “On p -adic Gibbs measures for hard core model on a Cayley tree”, *Markov Process. Related Fields*, **18**:4 (2012), 701–720.
- [5] Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухамедов, У. А. Розиков, “Фазовые переходы в модели Изинга на $\mathbb{Z}$ над полем p -адических чисел”, *Узб. матем. журн.*, 1998, № 4, 23–29.

- [6] О. Н. Хакимов, “ p -Адические меры Гиббса для модели твердых сфер с тремя состояниями на дереве Кэли”, *ТМФ*, **177**:1 (2013), 68–82.
- [7] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, “On Gibbs measures of p -adic Potts model on the Cayley tree”, *Indag. Math.*, **15**:1 (2004), 85–100.
- [8] F. M. Mukhamedov, “On p -adic quasi Gibbs measures for $q + 1$ -state Potts model on the Cayley tree”, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **2**:3 (2010), 241–251.
- [9] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.
- [10] У. А. Розиков, О. Н. Хакимов, “ p -Адические меры Гиббса и марковские случайные поля на счетных графах”, *ТМФ*, **175**:1 (2013), 84–92.
- [11] U. A. Rozikov, O. N. Khakimov, “Description of all translation-invariant p -adic Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree”, *Markov Process. Related Fields*, **21**:1 (2015), 177–204.
- [12] C. Kuelske, U. A. Rozikov, “Extremality of translational-invariant phases for a three state SOS model on the binary tree”, *J. Stat. Phys.*, **160**:3 (2015), 659–680.
- [13] U. A. Rozikov, Y. M. Suhov, “Gibbs measures for SOS model on a Cayley tree”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **9**:3 (2006), 471–488.
- [14] Н. Коблиц, *p -Адические числа, p -адический анализ и дзета-функции*, Мир, М., 1981.
- [15] W. H. Schikhof, *Ultrametric Calculus. An Introduction to p -Adic Analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **4**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [16] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p -Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.

Поступила в редакцию 6.11.2016