Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Панин, Г. И. Шляпугин, О локальной разрешимости и разрушении решений одномерных уравнений типа Ядзимы–Ойкавы–Сацумы, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 2, 179–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9294>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:49:14

© 2017 г. А. А. Панин*, Г. И. Шляпугин*

О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЯДЗИМЫ–ОЙКАВЫ–САЦУМЫ

Рассмотрены одномерные уравнения типа уравнения ионно-звуковых волн Ядзимы–Ойкавы–Сацумы. Доказана локальная разрешимость, методом пробных функций получены достаточные условия разрушения решений и найдены оценки времени разрушения.

Ключевые слова: blow-up, локальная разрешимость, ионно-звуковые волны.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9294>

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1978 г. в работе [1] для описания слабо нелинейных ионно-звуковых волн было предложено уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta \varphi - \varphi) + \Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi)^2. \quad (1)$$

Работы [1], [2] посвящены изучению солитонных решений уравнения (1), в частности аналитическому и численному исследованию взаимодействия солитонов (см. также монографию [3]). Теоретические исследования этих и подобных моделей, а также экспериментальные работы активно продолжают вплоть до настоящего времени (можно упомянуть, например, статьи [4], [5]). Однако также представляет интерес исследование режимов с обострением для уравнения (1) и родственных ему.

Настоящая работа состоит из двух частей. Первая является логическим продолжением работы [6], где было исследовано уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{xx} - u) + u_{xx} + uu_x = 0.$$

Работа А. А. Панина была выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-03524).

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: a-panin@yandex.ru

В данном случае мы рассматриваем сходное уравнение, но второго порядка по времени:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx} - u) + u_{xx} + uu_x = 0. \quad (2)$$

Во второй части работы рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx} - u) + u_{xx} = \frac{\partial}{\partial t}(u^2)_x. \quad (3)$$

Оно получается заменой $u = \varphi_x$ из уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi_{xx} - \varphi) + \varphi_{xx} = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_x)^2,$$

которое, в свою очередь, является одномерным вариантом уравнения (1). Отметим, что в исходном уравнении (1) величина φ есть (в обезразмеренных переменных) потенциал скорости ионов плазмы, следовательно, u в уравнении (3) есть скорость ионов.

В настоящей работе для обоих уравнений (2), (3) методом сжимающих отображений доказана локальная (по времени) разрешимость и получены достаточные условия разрушения их решений. Существуют три основные группы методов исследования разрушения решений. Это метод нелинейной емкости (пробных функций) Похожаева–Митидиери [7], которым мы пользуемся в нашей работе, а также энергетический метод Левина и его модификации [8]–[11]; метод автомодельных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в работах Самарского, Галактионова, Курдюмова и Михайлова [12] (см. также работу [13]).

2. ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (2)

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx} - u) + u_{xx} + uu_x &= 0, & x \in [0, l], \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & \frac{\partial}{\partial t}u(x, 0) &= u_1(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) &= 0, & lu_x(0, t) &= u(l, t), & t > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $u_0(x), u_1(x) \in C^{(2)}([0, l])$ и удовлетворяют граничным условиям. Далее мы установим локальную разрешимость этой задачи и получим достаточные условия разрушения ее решения.

2.2. Эквивалентная переформулировка. Введем следующие функциональные пространства:

$$\begin{aligned} Z &= C([0, l]), & \|z\|_Z &= \|z\|_C, \\ Z_1 &= \{z(x) \in C^{(1)} \mid z(0) = 0, lz_x(0) = z(l)\}, & \|z\|_{Z_1} &= \|z\|_{C^{(1)}}, \\ Z_2 &= \{z(x) \in C^{(2)} \mid z(0) = 0, lz_x(0) = z(l)\}, & \|z\|_{Z_2} &= \|z\|_{C^{(2)}}. \end{aligned}$$

Введем непрерывный оператор $\mathbb{L}: Z_2 \rightarrow Z$ следующим образом:

$$\mathbb{L}z = z_{xx} - z. \quad (5)$$

Оператор $\mathbb{L}$ имеет обратный $\mathbb{G}: Z \rightarrow Z_2$, действующий по правилу

$$(\mathbb{G}f)(x) = \int_0^l G(x, s)f(s) ds,$$

где $G(x, s)$ – функция Грина задачи

$$v_{xx} - v = f(x), \quad x \in [0, l], \quad v(0) = 0, \quad lv_x(0) = v(l).$$

Функцию $G(x, s)$ можно записать в явном виде:

$$G(x, s) = G_0(x, s) + \frac{\operatorname{sh} x(l \operatorname{ch} s - \operatorname{ch} l \operatorname{sh} s)}{l - \operatorname{sh} l},$$

$$G_0(x, s) = \begin{cases} -\operatorname{sh} x \operatorname{ch} s, & \text{если } 0 \leq x \leq s \leq l, \\ -\operatorname{sh} s \operatorname{ch} x, & \text{если } 0 \leq s \leq x \leq l. \end{cases}$$

Очевидно, что оператор $\mathbb{G}: Z \rightarrow Z_2$ непрерывен.

Решением задачи (4) назовем функцию $u(x)(t)$ такую, что:

- $u(x)(t) \in C^2([0, T_0), Z_2)$, где величина T_0 может как быть конечной, так и равняться $+\infty$;
- $u(x)(t)$ удовлетворяет начальным и граничным условиям задачи (4);
- $u(x)(t)$ удовлетворяет абстрактному обыкновенному дифференциальному уравнению в пространстве Z_2

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{L}u + u_{xx} + uu_x = 0. \quad (6)$$

Отметим, что так определенное решение заведомо удовлетворяет задаче (4) в классическом смысле, поскольку для любой функции $z(x)(t) \in C^1([0, T_0), Z)$ ее производная по t в пространстве Z будет и поточечной производной.

В силу равенства

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbb{L}u = \mathbb{L} \frac{d^2}{dt^2} u$$

(где в левой части дифференцирование по t происходит в пространстве Z , а в правой – в пространстве Z_2) уравнение (6) можно переписать в виде

$$\mathbb{L}u'' + u_{xx} + uu_x = 0$$

или, учитывая, что $\mathbb{G}$ есть обратный оператор к $\mathbb{L}$, – в виде

$$u'' + \mathbb{G}(u_{xx}) + \mathbb{G}(uu_x) = 0.$$

Заметим, что

$$\mathbb{G}(u_{xx}) = \mathbb{G}(u_{xx} - u + u) = u + \mathbb{G}(u). \quad (7)$$

Таким образом, получаем задачу Коши в пространстве Z_2 :

$$u'' + u = A(u(t)), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad (8)$$

где штрих обозначает производную по t и введено обозначение

$$A(u(t)) = -(\mathbb{G}(uu_x) + \mathbb{G}(u)). \quad (9)$$

Задача Коши (8) эквивалентна абстрактному интегральному уравнению Вольтерра в пространстве Z_2

$$u(x, t) = u_0(x) \cos t + u_1(x) \sin t + \int_0^t \sin(t-s) A(u(s)) ds. \quad (10)$$

2.3. Интегральное уравнение в пространстве Z_1 . По причинам, которые станут ясны в дальнейшем, мы начнем с рассмотрения уравнения (10) не в пространстве Z_2 , а в пространстве Z_1 . Нетрудно видеть, что оператор $A(u)$ можно считать действующим не только в пространстве Z_2 , но и в пространстве Z_1 .

Покажем, что интегральное уравнение (10) удовлетворяет условиям теоремы 1 из статьи [14]. Рассмотрим оператор A , введенный в (9). Он, очевидно, непрерывен как отображение $A(t, u): \mathbb{R}_+ \times Z_1 \rightarrow Z_1$ по метрике

$$\rho((t_1, u_1), (t_2, u_2)) = \max(|t_1 - t_2|, \|u_1 - u_2\|_{Z_1}), \quad (t_1, u_1), (t_2, u_2) \in \mathbb{R}_+ \times Z_1.$$

Заметим, что в данном случае $A(t, u) = A(u)$, т. е. A не зависит от t .

Оператор $A(t, u)$ ограниченно липшиц-непрерывен как отображение $Z_1 \rightarrow Z_2$. Действительно, для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и любых $\bar{u}, \bar{\bar{u}} \in Z_1$

$$\begin{aligned} \|A(t, \bar{u}) - A(t, \bar{\bar{u}})\|_{Z_2} &= \|\mathbb{G}(\bar{u}\bar{u}_x) + \mathbb{G}(\bar{u}) - \mathbb{G}(\bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}_x) - \mathbb{G}(\bar{\bar{u}})\|_{Z_2} \leq \\ &\leq \|\mathbb{G}\|_{Z \rightarrow Z_2} \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_Z + \|\mathbb{G}\|_{Z \rightarrow Z_2} \|\bar{u}\bar{u}_x - \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}_x\|_Z, \\ \|\bar{u}\bar{u}_x - \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}_x\|_Z &= \|\bar{u}\bar{u}_x - \bar{u}\bar{\bar{u}}_x + \bar{u}\bar{\bar{u}}_x - \bar{\bar{u}}\bar{\bar{u}}_x\|_Z \leq \\ &\leq \|\bar{u}\|_{Z_1} \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_{Z_1} + \|\bar{\bar{u}}\|_{Z_1} \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_{Z_1} \leq \\ &\leq 2 \max(\|\bar{u}\|_{Z_1}, \|\bar{\bar{u}}\|_{Z_1}) \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|_{Z_1}. \end{aligned}$$

Линейный оператор $\mathbb{G}$ непрерывен, следовательно, ограничен, $\|\mathbb{G}\|_{Z \rightarrow Z_2} < +\infty$. Таким образом, A ограниченно липшиц-непрерывен как отображение $Z_1 \rightarrow Z_2$, что и требовалось доказать.

Оператор A липшиц-непрерывен и как отображение $Z_1 \rightarrow Z_1$. Действительно, рассмотрим оператор вложения $J: Z_2 \rightarrow Z_1$, $J(u) = u$. Этот оператор, очевидно, линеен и непрерывен. Рассмотрим произведение $JA: Z_1 \rightarrow Z_1$. Справедлива очевидная оценка

$$\|JA(t, \bar{u}) - JA(t, \bar{\bar{u}})\|_{Z_1} \leq \|J\|_{Z_2 \rightarrow Z_1} \|A(t, \bar{u}) - A(t, \bar{\bar{u}})\|_{Z_2}.$$

Поэтому оператор A липшиц-непрерывен и как отображение $Z_1 \rightarrow Z_1$.

Таким образом, для уравнения (10) выполнены все условия теоремы 1 о непродолжаемом решении из статьи [14]. Следовательно, существует $T_0 > 0$ и решение $u(t)$ такие, что $u(t)$ – единственное непродолжаемое решение на $[0, T_0)$. Причем если $T_0 < \infty$, то $\limsup_{t \rightarrow T_0-0} \|u(t)\|_{Z_1} = +\infty$.

Оформим вышесказанное в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Решение $u(x)(t)$ уравнения (10) в классе $C^2([0, T_0), Z_1)$ существует и единственно на некотором промежутке $[0, T_0)$. К тому же, если $T_0 < +\infty$, то $\limsup_{t \rightarrow T_0-0} \|u(t)\|_{Z_1} = +\infty$.*

2.4. Повышение гладкости $Z_1 \rightarrow Z_2$. Перед тем как перейти непосредственно к содержанию данного пункта, сделаем несколько замечаний о том, для чего нам понадобилось это так называемое повышение гладкости.

В предыдущем пункте для рассматриваемой задачи было доказано существование решения $u(x)(t)$ на некотором временном промежутке $[0, T_0)$ в классе $C^2([0, T_0), Z_1)$. В настоящем пункте мы доказываем, что это решение принадлежит более узкому классу $C^2([0, T_0), Z_2)$. Забегая вперед, скажем, что в п. 2.5 будет доказано следующее утверждение: если решение $u(x)(t) \in C^2([0, T_0), Z)$ существует, то оно принадлежит классу $C^2([0, T_0), Z_1)$. Таким образом, если на промежутке $[0, T_0)$ существует решение $u(x)(t) \in C^2([0, T_0), Z)$, то оно также принадлежит классу $C^2([0, T_0), Z_2)$. В п. 2.6 будет показано разрушение решения в норме пространства Z_2 , классической для оператора $\mathbb{L}$. Отсюда следует, что на самом деле разрушение имеет место в норме пространства Z . Действительно, предположим, что решение в пространстве Z_2 существует на промежутке $[0, T_0)$, а в пространстве Z – на большем промежутке $[0, T_1)$, $T_1 > T_0$. Тогда, в силу того что решение $u(x)(t) \in C^2([0, T), Z)$ принадлежит $C^2([0, T), Z_2)$, можно заключить, что решение в пространстве Z_2 также существует на промежутке $[0, T_1)$. Получаем противоречие. Отсюда следует, что имеет место разрушение по норме пространства Z .

Так как оператор A липшиц-непрерывен как отображение $Z_1 \rightarrow Z_2$ и $A(0) = 0$, то, во-первых,

$$\|A(u)\|_{Z_2} = \|A(u) - A(0)\|_{Z_2} \leq L(\|u\|_{Z_1})\|u\|_{Z_1},$$

где $L(\cdot)$ – функция, ограниченная на каждом ограниченном подмножестве множества $[0, +\infty)$, а во-вторых, $A(u(t)) \in C([0, T), Z_2)$, как только $u(t) \in C([0, T), Z_1)$. Следовательно, если $u(x)(t)$ – решение интегрального уравнения (10) в пространстве Z_1 , то интеграл в (10) существует и в смысле пространства Z_2 , причем

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \sin(t-s)A(u(s))ds \right\|_{Z_2} &\leq \int_0^t \|\sin(t-s)A(u(s))\|_{Z_2} ds \leq \\ &\leq \int_0^t \|A(u(s))\|_{Z_2} ds \leq \int_0^t L(\|u(s)\|_{Z_1})\|u(s)\|_{Z_1} ds. \end{aligned}$$

Очевидно, $u_0(x) \cos t + u_1(x) \sin t \in Z_2$ при каждом t . Следовательно, правая часть уравнения (10) принадлежит пространству Z_2 при каждом t и дифференцируема по t как интеграл с переменным пределом. А поскольку

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \sin(t-s)A(u(s))ds = 0 + \int_0^t \cos(t-s)A(u(s))ds$$

не содержит внеинтегральных слагаемых, правая часть уравнения (10) дважды дифференцируема по t в пространстве Z_2 .

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Если на промежутке $[0, T_0)$ существует решение $u(x)(t)$ интегрального уравнения (10) в классе $C^2([0, T_0), Z_1)$, то оно также является решением в классе $C^2([0, T_0), Z_2)$.*

2.5. Уравнение в пространстве Z . Рассмотрим задачу (8) с $u(x, t) \in Z$ при каждом t . Для этого необходимо доопределить оператор $\mathbb{G}(zz_x)$ при $z \in Z$. Оператор $\mathbb{G}$ записывается в виде

$$\begin{aligned} (\mathbb{G}f)(x) &= \int_0^x g_2(x, s)f(s) ds + \int_x^l g_1(x, s)f(s) ds, \\ g_1(x, s) &= -\operatorname{sh} x \operatorname{ch} s + \frac{\operatorname{sh} x(l \operatorname{ch} s - \operatorname{ch} l \operatorname{sh} s)}{l - \operatorname{sh} l}, \\ g_2(x, s) &= -\operatorname{sh} s \operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh} x(l \operatorname{ch} s - \operatorname{ch} l \operatorname{sh} s)}{l - \operatorname{sh} l}. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая равенство $2zz_x = (z^2)_x$, проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}(zz_x)(x) &= \frac{1}{2} \left[\int_0^x g_2(x, s)(z^2(s))_s ds + \int_x^l g_1(x, s)(z^2(s))_s ds \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[g_2(x, s)z^2(s) \Big|_{s=0}^{s=x} - \int_0^x \frac{\partial g_2}{\partial s} z^2(s) ds + g_1(x, s)z^2(s) \Big|_{s=x}^{s=l} - \int_x^l \frac{\partial g_1}{\partial s} z^2(s) ds \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[g_1(x, l)z^2(l) - g_2(x, 0)z^2(0) - \int_0^x \frac{\partial g_2}{\partial s} z^2(s) ds - \int_x^l \frac{\partial g_1}{\partial s} z^2(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Будем считать формулу (12) определением оператора $\mathbb{G}(zz_x)$ при $z \in Z$.

Функция $\mathbb{G}(zz_x)(x)$ дифференцируема, ее производная равна

$$\begin{aligned} (G(zz_x))_x(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, l)z^2(l) - \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, 0)z^2(0) - \frac{\partial g_2}{\partial s}(x, s) \Big|_{s=x} z^2(x) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^x \frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial s}(x, s)z^2(s) ds + \frac{\partial g_1}{\partial s}(x, s) \Big|_{s=x} z^2(x) - \int_x^l \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial s}(x, s)z^2(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Можно проверить, что для функции $A(t)(z) = -\mathbb{G}(zz_x) - \mathbb{G}(z)$ выполнены граничные условия из (4). Следовательно, при $z \in Z$ имеем $A(t)(z) \in Z_1$ для любого t .

Функции $g_1(x, s)$, $g_2(x, s)$ и их производные ограничены при $x, s \in [0, l]$, так как они непрерывны. Кроме того, для любых $z_1, z_2 \in Z$ при всех $x \in [0, l]$

$$|z_1^2(x) - z_2^2(x)| = |z_1(x) - z_2(x)| \cdot |z_1(x) + z_2(x)| \leq \|z_1 - z_2\|_Z (\|z_1\|_Z + \|z_2\|_Z).$$

Из определения (12) оператора $\mathbb{G}(zz_x)(x)$, формулы (13) и оценки, приведенной выше, видно, что оператор $z \mapsto \mathbb{G}(zz_x)$ ограниченно липшиц-непрерывен равномерно по t как отображение $Z \rightarrow Z_1$. И, следовательно, $A(t)(z) = -\mathbb{G}(zz_x) - \mathbb{G}(z)$ ограничено липшиц-непрерывен равномерно по t как отображение $Z \rightarrow Z_1$.

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теорем 1 и 2, получаем, что верны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Решение $u(x)(t)$ уравнения (10) в классе $C^2([0, T_0], Z)$ существует и единственно на некотором промежутке $[0, T_0)$. К тому же если $T_0 < \infty$, то $\limsup_{t \rightarrow T_0-0} \|u(t)\|_Z = +\infty$.*

ТЕОРЕМА 4. *Если на промежутке $[0, T_0)$ существует решение $u(x)(t)$ интегрального уравнения (10) в классе $C^2([0, T_0], Z)$, то $u(x)(t) \in C^2([0, T_0], Z_1)$.*

Объединяя предыдущие утверждения, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. 1. *Существует и единственно непродолжаемое решение $u(x)(t)$ интегрального уравнения (10) в классе $C^2([0, T_0), Z)$ (где оператор $\mathbb{G}(u|_{u_x})$ понимается в смысле (12)), причем $\limsup_{t \rightarrow T_0-0} \|u(t)\|_Z = +\infty$ при $T_0 < +\infty$.*

2. Решение уравнения (10) (или, что то же самое, решение задачи (4) в классе $C^2([0, T_0), Z_2)$) существует по меньшей мере на том же промежутке $[0, T_0)$ и совпадает на нем с $u(x)(t)$.

2.6. Разрушение решения. Получим достаточные условия разрушения решения методом пробных функций, который подробно изложен, например, в [15].

Домножим основное уравнение (4) на пробную функцию $l - x$ и проинтегрируем по $x \in (0, l)$. С учетом граничных условий (4) получим

$$\begin{aligned} \int_0^l (l-x)u_{xx} dx &= (l-x)u_x \Big|_0^l + \int_0^l u_x dx = 0, & \int_0^l (l-x)u''_{xx} dx &= 0, \\ \int_0^l (l-x)uu_x dx &= \frac{1}{2}(l-x)u^2 \Big|_0^l + \frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда имеем равенство

$$J''(t) = \frac{1}{2} \int_0^l u^2 dx. \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_0^l (l-x)u(x, t) dx, & J(0) &= \int_0^l (l-x)u_0(x) dx, \\ J'(t) &= \int_0^l (l-x)u_t(x, t) dx, & J'(0) &= \int_0^l (l-x)u_1(x) dx, \\ J''(t) &= \int_0^l (l-x)u_{tt}(x, t) dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского

$$J^2(t) = \left(\int_0^l (l-x)u dx \right)^2 \leq \int_0^l (l-x)^2 dx \cdot \int_0^l u^2 dx = \frac{l^3}{3} \int_0^l u^2 dx,$$

получаем, что

$$\int_0^l u^2 dx \geq \frac{3}{l^3} J^2(t), \quad (16)$$

и тогда из (14) вытекает неравенство

$$J''(t) \geq aJ^2(t), \quad a = \frac{3}{2l^3}. \quad (17)$$

Предположим, что $J'(0) = J_1 > 0$. Тогда в силу (17) имеем

$$J'(t) \geq J_1 > 0, \quad t \in [0, T_0). \quad (18)$$

Домножим (17) на $J'(t)$, получим $J''J' \geq aJ^2J'$, или

$$\frac{((J')^2)'}{2} \geq \frac{a}{3}(J^3)'.$$

Теперь проинтегрируем последнее неравенство по t :

$$(J'(t))^2 - (J'(0))^2 \geq \frac{2a}{3}(J^3(t) - J^3(0)), \quad (19)$$

или

$$(J'(t))^2 \geq \frac{2a}{3}J^3(t) + (J'(0))^2 - \frac{2}{3}aJ^3(0). \quad (20)$$

Заметим, что в силу (18) верно неравенство $J(t) \geq J(0)$, поэтому правая часть неравенства (20) не меньше положительного числа J_1^2 на всем промежутке $[0, T_0)$ существования решения. Это вместе с положительностью $J'(t)$ позволяет извлечь квадратный корень из обеих частей неравенства (20),

$$J'(t) \geq \sqrt{\frac{2}{3}aJ^3(t) + (J'(0))^2 - \frac{2}{3}aJ^3(0)},$$

и поделить обе его части на правую часть,

$$\frac{J'(t)}{\sqrt{\frac{2}{3}aJ^3(t) + (J'(0))^2 - \frac{2}{3}aJ^3(0)}} \geq 1. \quad (21)$$

Положим

$$b = (J'(0))^2 - \frac{2}{3}aJ^3(0). \quad (22)$$

Тогда неравенство (21) можно переписать в виде

$$\frac{J'(t)}{\sqrt{2aJ^3(t)/3 + b}} \geq 1. \quad (23)$$

Рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $J'(0) = J_1 > 0$, $b \geq 0$. Иначе говоря, мы требуем, чтобы выполнялись неравенства

$$J'(0) > 0, \quad (J'(0))^2 \geq \frac{2a}{3}J^3(0),$$

причем ни одно из этих неравенств не вытекает, вообще говоря, из другого, поскольку мы не налагаем ограничений на знак величины $J(0)$. Перепишем неравенство (23) в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{J(0)}^{J(t)} \frac{dJ}{\sqrt{2aJ^3/3 + b}} \geq 1.$$

Интегрируя по t , получаем

$$\int_{J(0)}^{J(t)} \frac{dJ}{\sqrt{2aJ^3/3 + b}} \geq t,$$

или

$$t \leq \int_{J(0)}^{J(t)} \frac{dJ}{\sqrt{2aJ^3/3 + b}} < \int_{J(0)}^{+\infty} \frac{dJ}{\sqrt{2aJ^3/3 + b}} \leq \int_{J(0)}^{+\infty} \frac{dJ}{\sqrt{2a/3} J^{3/2}} < +\infty.$$

Отсюда вытекает оценка $\tilde{T}_0$ времени существования решения:

$$T_0 \leq \tilde{T}_0 = \int_{J(0)}^{+\infty} \frac{dJ}{2aJ^3/3 + b}. \quad (24)$$

СЛУЧАЙ 2. Пусть $J'(0) = J_1 > 0$, но не предполагается, что $b \geq 0$. Тогда из полученной выше оценки (18) вытекает, что $J(t)$ растет по меньшей мере линейно, $J(t) \geq J(0) + J_1 t$, а следовательно, существует (если решение не разрушится раньше) такое $t_1 \in [0, T_0)$, что

$$\frac{a}{3} J^3(t) \geq |b|, \quad t \in [t_1, T_0).$$

Тогда при всех $t \in [t_1, T_0)$ из (20) имеем

$$J'(t) \geq \sqrt{\frac{1}{3} a J^3(t)}, \quad \frac{d}{dt} \sqrt{\frac{12}{a}} \frac{-1}{\sqrt{J(t)}} \geq 1,$$

откуда

$$\sqrt{\frac{12}{a}} \left(\frac{1}{\sqrt{J(t_1)}} - \frac{1}{\sqrt{J(t)}} \right) \geq t - t_1,$$

или

$$t \leq t_1 + \sqrt{\frac{12}{a J(t_1)}}.$$

Однако оптимальную оценку времени разрушения получить сложнее, и мы не будем на этом останавливаться, констатируя лишь факт разрушения.

Заметим теперь, что рассуждения в этом пункте проведены для классического решения. Но решение из класса $C^2([0, T_0], Z^2)$ является классическим. Тем самым доказано, что условие $J'(0) > 0$ гарантирует разрушение решения, которое принадлежит $C^2([0, T_0], Z^2)$, а в силу теоремы 5 отсюда вытекает разрушение решения, лежащего в $C^2([0, T_0], Z)$, и предельное соотношение $\limsup_{t \rightarrow T_0-0} \|u(t)\|_Z = +\infty$.

Следовательно, верна

ТЕОРЕМА 6. *Существует и единственно непродолжаемое решение $u(x)(t)$ задачи (4) в классе $C^2([0, T_0], Z_2)$. При условии $J'(0) > 0$ (см. определения (15)) это решение существует лишь локально по времени и имеет место предельное соотношение $\limsup_{t \rightarrow T_0-0} \|u(t)\|_Z = +\infty$. В случае $b \geq 0$ (см. определение (22)) верхняя оценка промежутка существования дается формулой (24).*

3. ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (3)

3.1. Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_{xx} - u) + u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial t} (u^2)_x, & x \in [0, l], \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= u_1(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) &= 0, & l u_x(0, t) &= u(l, t), & t > 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где $u_0(x), u_1(x) \in C^{(2)}([0, l])$ и удовлетворяют граничным условиям.

3.2. Эквивалентная переформулировка. Используя оператор $\mathbb{L}: Z_2 \rightarrow Z$, заданный в (5), уравнение (25) можно записать в виде

$$\mathbb{L}u'' + u_{xx} = \frac{d}{dt}(u^2)_x,$$

или

$$u'' + \mathbb{G}(u_{xx}) = \frac{d}{dt}\mathbb{G}((u^2)_x),$$

где по-прежнему $\mathbb{G}: Z \rightarrow Z_2$ — обратный оператор к $\mathbb{L}$. Используя равенство (7), получаем задачу Коши, эквивалентную исходной (25):

$$u'' + u = B(u(t)), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad (26)$$

где введено обозначение

$$B(u(t)) = \frac{d}{dt}\mathbb{G}((u^2)_x) - \mathbb{G}(u). \quad (27)$$

Решением задачи (25) назовем функцию $u(x)(t)$ такую, что:

- $u(x)(t) \in C^2([0, T_0], Z_2)$, причем величина T_0 может как быть конечной, так и равняться $+\infty$;

- $u(x)(t)$ удовлетворяет абстрактной задаче Коши (26) в пространстве Z^2 .

Задача Коши (26) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x, t) = u_0(x) \cos t + u_1(x) \sin t + \int_0^t \sin(t-s) B(u(s)) ds. \quad (28)$$

Рассмотрим интеграл в (28) подробнее:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin(t-s) B(u(s)) ds &= \int_0^t \sin(t-s) \left[\frac{d}{ds} \mathbb{G}((u(s)^2)_x) - \mathbb{G}(u(s)) \right] ds = \\ &= - \int_0^t \sin(t-s) \mathbb{G}(u(s)) ds + \sin(t-s) \mathbb{G}((u(s)^2)_x) \Big|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t \cos(t-s) \mathbb{G}((u(s)^2)_x) ds = \\ &= - \sin t \mathbb{G}((u_0^2)_x) + \int_0^t [\cos(t-s) \mathbb{G}((u(s)^2)_x) - \sin(t-s) \mathbb{G}(u(s))] ds. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \cos t + [u_1 - \mathbb{G}((u_0^2)_x)] \sin t + \\ &+ \int_0^t \cos(t-s) B_1(u(s)) ds + \int_0^t \sin(t-s) B_2(u(s)) ds, \end{aligned} \quad (29)$$

где введены обозначения

$$B_1(u) = \mathbb{G}((u^2)_x), \quad B_2(u) = -\mathbb{G}(u). \quad (30)$$

3.3. Результаты о разрешимости. Для каждого из операторов B_1 и B_2 (30) верны рассуждения из п. 2.3 для предыдущей задачи. Поэтому можно утверждать, что B_1 и B_2 удовлетворяют всем условиям теоремы 1 из [14]. Нетрудно проверить, что данная теорема элементарно обобщается на случай уравнения с двумя интегралами, т. е. она применима к нашему уравнению (29). Далее, проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из пп. 2.4, 2.5, получаем аналогичные теоремы для задачи (25).

ТЕОРЕМА 7. *Решение $u(x)(t)$ уравнения (29) в классе $C^2([0, T_0], Z)$ существует на некотором промежутке $[0, T_0)$ и единственно на нем. К тому же если $T_0 < \infty$, то $\limsup_{t \rightarrow T_0-0} \|u(t)\|_Z = +\infty$.*

ТЕОРЕМА 8. *Решение начально-краевой задачи (25) (или, что то же самое, интегрального уравнения (29) в классе $C^2([0, T_0], Z)$) на самом деле является решением в классе $C^2([0, T_0], Z_2)$.*

3.4. Разрушение решения. Для доказательства разрушения решения задачи (25) используем следующий прием: вместо функции u рассмотрим функцию $v := -u$. Для нее задача (25) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(v - v_{xx}) - v_{xx} &= \frac{\partial}{\partial t}(v^2)_x, & x \in [0, l], \quad t \in [0, T_0), \\ v(x, 0) &= v_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}v(x, t) = v_1(x), & x \in [0, l], \\ v(0, t) &= 0, \quad lv_x(0, t) = v(l, t), & t \in [0, T_0) \end{aligned} \quad (31)$$

(здесь сразу сделано переобозначение $v_0(x) := -u_0(x)$, $v_1(x) := -u_1(x)$).

Теперь действуем аналогично предыдущей задаче. Домножим основное уравнение (31) на пробную функцию $l - x$ и проинтегрируем по $x \in (0, l)$. С учетом граничных условий получим

$$\begin{aligned} \int_0^l (l - x)v_{xx} dx &= (l - x)v_x \Big|_0^l + \int_0^l v_x dx = 0, & \int_0^l (l - x)v''_{xx} dx &= 0, \\ \int_0^l (l - x)(v^2)'_x dx &= (l - x)(v^2)' \Big|_0^l + \int_0^l (v^2)' dx = \int_0^l (v^2)' dx. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$J(t) = \int_0^l (l - x)v(x, t) dx \equiv - \int_0^l (l - x)u(x, t) dx. \quad (32)$$

В результате имеем равенство

$$J''(t) = \int_0^l (v^2(x, t))' dx. \quad (33)$$

Проинтегрируем его по $t \in (0, t)$. Получим

$$\begin{aligned} J'(t) - J'(0) &= \int_0^t \int_0^l (v^2(x, t))' dx dt = \int_0^t \int_0^l (v^2(x, t))' dt dx = \\ &= \int_0^l [v^2(x, t) - v^2(x, 0)] dx = \int_0^l v^2(x, t) dx - \int_0^l v_0^2(x) dx. \end{aligned}$$

В последнем равенстве использовалось начальное условие (31). Заметим также, что

$$J'(0) = \int_0^l (l-x)v_1 dx \equiv - \int_0^l (l-x)u_1 dx.$$

Введем обозначение

$$c = \int_0^l (l-x)v_1 dx - \int_0^l v_0^2(x) dx \equiv - \int_0^l (l-x)u_1 dx - \int_0^l u_0^2(x) dx; \quad (34)$$

это константа, зависящая от начальных условий. Используя оценку (16), получим неравенство

$$\frac{d}{dt}J \geq c + aJ^2, \quad a = \frac{3}{l^3}. \quad (35)$$

Рассмотрим отдельно случаи $c > 0$, $c = 0$ и $c < 0$.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $c > 0$. Заметим, что $J'(t) > 0$ на всем промежутке $[0, T_0)$ существования решения. Поэтому можно разделить неравенство (35) на $c + aJ^2$ и получить

$$\frac{J'(t)}{c + aJ^2(t)} \geq 1,$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{ac}} \arctg \sqrt{\frac{a}{c}} J \right) \geq 1. \quad (36)$$

После интегрирования неравенства (36) имеем

$$\arctg \sqrt{\frac{a}{c}} J(t) - \arctg \sqrt{\frac{a}{c}} J(0) \geq t\sqrt{ac}.$$

Следовательно,

$$t\sqrt{ac} \leq \arctg \sqrt{\frac{a}{c}} J(t) - \arctg \sqrt{\frac{a}{c}} J(0) < \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{a}{c}} J(0),$$

откуда

$$t < \frac{1}{\sqrt{ac}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{a}{c}} J(0) \right).$$

В результате имеем оценку времени разрушения решения:

$$T_0 \leq \tilde{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{ac}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{a}{c}} J(0) \right). \quad (37)$$

СЛУЧАЙ 2. Пусть $c = 0$. Предположим, что $J(0) > 0$. Заметим, что $J'(t) > 0$ на всем промежутке $[0, T_0)$ существования решения. Следовательно, можно разделить неравенство (35) на J^2 и получить $J'/J^2 \geq a$, или

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{J(t)} \right) \geq a.$$

После интегрирования получаем неравенство

$$\frac{1}{J(0)} - \frac{1}{J(t)} \geq at. \quad (38)$$

Поскольку, как было отмечено выше, на всем промежутке существования решения верно неравенство $J'(t) > 0$, из (38) получаем

$$t \leq \frac{1}{a} \left(\frac{1}{J(0)} - \frac{1}{J(t)} \right) < \frac{1}{aJ(0)},$$

т. е. оценка времени разрушения решения имеет вид

$$T_0 \leq \tilde{T}_0 = \frac{1}{aJ(0)}. \quad (39)$$

СЛУЧАЙ 3. Пусть $c = -c_1 < 0$. Предположим, что $J(0) > \sqrt{c_1/a}$. Тогда нетрудно установить, что $J(t) > \sqrt{c_1/a}$ на всем промежутке $[0, T_0)$ существования решения. В самом деле, в силу непрерывности $J(t)$ неравенство $J(t) > \sqrt{c_1/a}$ верно хотя бы на некотором начальном промежутке $[0, \delta)$. Предположим, множество

$$\mathcal{T}^* = \left\{ t \in [0, T_0) \mid J(t) \leq \sqrt{\frac{c_1}{a}} \right\}$$

непусто. Положим $t^* = \inf_{t \in \mathcal{T}^*} t$. Очевидно, $t^* \in [0, T_0)$, причем $J(t^*) \leq \sqrt{c_1/a}$, поскольку прообраз замкнутого множества $[\sqrt{c_1/a}, +\infty)$ при непрерывном отображении $t \mapsto J(t)$ замкнут. Но тогда в силу теоремы Лагранжа, поскольку $J(t^*) < J(0)$, существует такое $t^{**} \in (0, t^*)$, что $J'(t^{**}) < 0$. С другой стороны, $t^{**} < \inf \mathcal{T}^*$, поэтому $J(t^{**}) > \sqrt{c_1/a}$ и (в силу неравенства (35)) $J'(t^{**}) \geq aJ^2(t^{**}) - c_1 > 0$. Получили противоречие. Следовательно, $J(t) > \sqrt{c_1/a}$ на всем промежутке $[0, T_0)$. Поэтому можно разделить неравенство (35) на $aJ^2 - c_1$ и получить $J'(t)/(aJ^2 - c_1) \geq 1$, или

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \frac{J(t) - c_1/a}{J(t) + c_1/a} \right) \geq 2\sqrt{ac_1}.$$

Интегрируя, имеем

$$\ln \frac{J(t) - c_1/a}{J(t) + c_1/a} - \ln \frac{J(0) - c_1/a}{J(0) + c_1/a} \geq 2\sqrt{ac_1}t,$$

или

$$2\sqrt{ac_1}t \leq \ln \frac{J(t) - c_1/a}{J(t) + c_1/a} - \ln \frac{J(0) - c_1/a}{J(0) + c_1/a} < \ln \frac{J(0) + c_1/a}{J(0) - c_1/a}, \quad (40)$$

где в последнем неравенстве мы учли, что

$$0 < J(t) - \sqrt{\frac{c_1}{a}} \implies \ln \frac{J(t) - c_1/a}{J(t) + c_1/a} < 0.$$

В итоге из (40) получаем оценку времени разрушения:

$$T_0 \leq \tilde{T}_0 = \frac{1}{2\sqrt{ac_1}} \ln \frac{J(0) + c_1/a}{J(0) - c_1/a}. \quad (41)$$

Отметим, что оценка (37) при $c \rightarrow +0$ и оценка (41) при $c \rightarrow -0$ переходят в оценку (39).

В итоге рассуждения, подобные сделанным в разделе 2, приводят к следующему результату.

ТЕОРЕМА 9. 1. *Существует единственное непродолжаемое решение $u(x)(t)$ задачи (25) в классе $C^2([0, T_0), Z_2)$.*

2. *По меньшей мере в следующих случаях это решение существует лишь локально по времени (обозначения см. в формулах (32) и (34)):*

- 1) *если $c > 0$, то оценка времени разрушения дается формулой (37);*
- 2) *если $c = 0$, $J(0) > 0$, то оценка времени разрушения дается формулой (39);*
- 3) *если $c < 0$, $J(0) > \sqrt{-c/a}$, то оценка времени разрушения дается формулой (41).*

Список литературы

- [1] N. Yajima, M. Oikawa, J. Satsuma, "Interaction of ion-acoustic solitons in three-dimensional space", *J. Phys. Soc. Japan*, **44**:5 (1978), 1711–1714.
- [2] F. Kako, N. Yajima, "Interaction of ion-acoustic solitons in two-dimensional space", *J. Phys. Soc. Japan*, **49**:5 (1980), 2063–2071.
- [3] Э. Инфельд, Дж. Роуландс, *Нелинейные волны, солитоны и хаос*, М., Физматлит, 2006.
- [4] Y. Chen, R. Liu, "Some new nonlinear wave solutions for two (3+1)-dimensional equations", *Appl. Math. Comput.*, **260**:1 (2015), 397–411.
- [5] A. Boruah, S. K. Sharma, H. Bailung, Y. Nakamura, "Oblique collision of dust acoustic solitons in a strongly coupled dusty plasma", *Phys. Plasmas*, **22**:9 (2015), 093706.
- [6] М. О. Корпусов, А. А. Панин, "Локальная разрешимость и разрушение решения для уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с нелокальным граничным условием", *ТМФ*, **175**:2 (2013), 159–172.
- [7] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, "Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных", Тр. МИАН, **234**, 2001, 3–383.
- [8] H. A. Levine, "Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$ ", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**:5 (1973), 371–386.
- [9] H. A. Levine, "Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ ", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.
- [10] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, "О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов", *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **69** (1977), 77–102.
- [11] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
- [12] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.
- [13] В. А. Галактионов, С. И. Похожаев, "Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:10 (2008), 1819–1846.
- [14] А. А. Панин, "О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра", *Матем. заметки*, **97**:6 (2015), 884–903.
- [15] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, Е. В. Юшков, *Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики*, Физический факультет МГУ, М., 2014.