Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Аркашов, В. А. Селезнев, О формировании соотношения нелокальностей в модели аномальной диффузии, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 1, 115–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9295>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:16:37

© 2017 г.

Н. С. Аркашов^{*†}, В. А. Селезнев[†]

О ФОРМИРОВАНИИ СООТНОШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОСТЕЙ В МОДЕЛИ АНОМАЛЬНОЙ ДИФфуЗИИ

Построена модель случайного блуждания, в которой соотношение пространственно-временных нелокальностей определяется структурой потока памяти и стохастической моделью сил. Предлагаемая модель позволяет вычислять параметры, характеризующие нелокальность воздействия среды и памяти частицы.

Ключевые слова: аномальная диффузия, поток памяти, пространственно-временная нелокальность, параметры нелокальности, лестница Кантора, дробное (фрактальное) броуновское движение, масштабная инвариантность.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9295>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СТРУКТУРА РАБОТЫ

Проведенное в ряде работ (см., например, [1]–[3]) исследование моделей процессов стохастических переносов, связанных с проявлением свойств пространственно-временных нелокальностей, позволяет считать, что показатель степени в зависимости от времени среднего квадрата перемещения частиц формируется из соотношения параметров пространственно-временной нелокальности. При этом можно выделить два известных подхода к формированию процессов аномальной диффузии: первый подход состоит в использовании так называемого дробного (фрактального) броуновского движения, а второй – в использовании модели блуждания в непрерывном времени (CTRW-модель). В первом случае при разных значениях параметра Хёрста, определяющего “сильную зависимость” приращений процесса на непересекающихся временных интервалах, может возникнуть как суб- так и супердиффузионный режим. Во втором случае используется техника устойчивых распределений, при этом суб- и супердиффузионный режим процесса определяется отношением параметров устойчивых распределений, соответствующих времени ожидания и величине

^{*}Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия.
E-mail: nicky1978@mail.ru

[†]Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
E-mail: selvad@ngs.ru

скачка частицы, участвующей в блуждании. Заметим, что второй подход приводит к уравнениям аномальной диффузии [1], [2].

Перейдем к постановке задач. Пусть средний квадрат перемещения некоторой частицы растет во времени по степенному закону. В каком соотношении находятся параметры памяти и пространственной нелокальности, формирующие степенной показатель среднего квадрата стохастического перемещения, при условии конечности моментов второго порядка этих перемещений? Следующей задачей является вычисление по выборочным данным параметров памяти и пространственной нелокальности.

В настоящей работе изменение импульса определяется действием стохастических сил, распределение которых во времени характеризуется некоторой функцией памяти (см. работы [4], [5]). Параметры, характеризующие пространственно-временную нелокальность, определяются структурой стохастических сил и видом функции памяти, при этом суб- и супердиффузионный режим блуждания задается в рамках предположения о конечности момента второго порядка. Отметим, что условие конечности момента второго порядка для всех режимов блуждания, а также использование феноменологии потока памяти отличает предлагаемую модель от моделей дробной кинетики, где используется феноменология дробного закона Фика, при этом в супердиффузионном режиме применяется техника устойчивых распределений с бесконечным вторым моментом (см., например, работы [1], [2]). Кроме того, если для некоторого блуждания установлено, что показатель степенной зависимости в изменении дисперсии находится в диапазоне $(0, 4)$, то, используя выборочные данные, можно оценить близость к представленной в настоящей работе модели блуждания со степенной памятью.

Приведем поэтапное изложение содержания работы. В п. 2.1 строится стохастическая модель блуждания частицы по выборке ее положения вдоль выделенного направления. За основу берется уравнение динамики (1), где изменение импульса частицы задается в виде суммарного результата действия дискретного потока памяти, а котором силы, действовавшие в предыдущие моменты времени, представляются в виде (3) и имеют определенную стохастическую природу. Весовые коэффициенты дискретного потока определяются как приращения монотонной функции (см. уравнение (2)), что приводит впоследствии к рассмотрению двух типов памяти. Предлагаемая модель позволяет представить текущее положение частицы в виде (4) и провести анализ действующих сил и памяти в сложной системе “частица–среда”.

В п. 2.1.1 рассматривается вопрос структурирования стохастических сил. Силы представляются через стационарные последовательности, на которые налагается условие Н (см. соотношения (6)), гарантирующее степенной рост среднего квадрата перемещения (7).

В п. 2.2 рассматриваются два типа монотонных функций, управляющих памятью частицы. Степенные функции описывают монотонное изменение информации о предыстории. Для “лестницы Кантора в целом”, полученной продолжением на всю положительную полуось с сохранением масштабной инвариантности, память формируется из разряженных импульсов с неубывающей амплитудой. Структуру разряженных импульсов устанавливает предложение 1. Такое формирование памяти и стохастических сил позволяет “расщепить” степенной показатель изменения по времени среднего квадрата перемещения частицы на два параметра, один из

которых отвечает за пространственную нелокальность действия среды на частицу, а второй – за наличие памяти (т. е. за нелокальность по времени). Это расщепление на два параметра приводится в теореме 1 и является первым основным результатом работы.

В п. 2.3.1 получен второй основной результат. На основании близости процесса (4), определяющего положение частицы, к гауссовскому процессу (см. теорему 2) построен метод вычисления параметров нелокальности. В п. 2.4 рассмотрен физический смысл параметров нелокальности. В п. 2.5 приводится доказательство основных утверждений. Раздел 3 представляет собой заключение. В этом разделе перечислены некоторые проблемы, которые остались за рамками настоящего исследования.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

2.1. Модель блуждания. Прежде всего отметим, что в ряде работ (см., например, [6], [7]) для исследования процесса блуждания выделяется основное направление, вдоль которого проявляется аномальность процесса переноса.

Рассмотрим модель случайного изменения положения частицы с массой m в пространстве. Пусть частица в начальный момент времени находится в начале координат и далее ее положение фиксируется в моменты времени, кратные шагу изменения времени τ . Будем исследовать аномальность блуждания вдоль некоторого направления. Пусть проекция на выделенное направление блуждания описывается случайной последовательностью R_n , $n \geq 1$, и $R_0 = 0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать одномерное случайное блуждание (R_n) . Вычислим разностную скорость блуждающей частицы в момент $k\tau$, $k \geq 1$:

$$v(k\tau) = \frac{R_k - R_{k-1}}{\tau}, \quad v(0) = 0,$$

и ее приращение $\Delta v(k\tau) = v(k\tau) - v((k-1)\tau)$, $k \geq 1$.

Изменение импульса частицы в момент $k\tau$ отражает влияние среды в данный и предыдущие моменты времени и в соответствии с моделью системы с памятью (см. работы [4], [5], [8]) представляется как результат действия некоторого потока:

$$m\Delta v(k\tau) = \tau \sum_{i=1}^k p(k-i)f(i\tau). \quad (1)$$

В этом представлении $(f(i\tau))_{i \geq 0}$ – случайная последовательность, имеющая размерность силы, и $(p(i))_{i \geq 1}$ – некоторая безразмерная последовательность неотрицательных чисел; будем считать, что $p(0) = 1$. Для каждого $i \geq 0$ представим значение $p(i)$ в виде $\Delta M(i) = M(i+1) - M(i)$, где M – некоторая неубывающая, заданная на неотрицательной полуоси функция, при этом для удобства положим $M(0) = 0$ и $M(1) = 1$. Соотношение (1) принимает вид

$$m \frac{\Delta v(k\tau)}{\tau} = \sum_{i=0}^{k-1} f((k-i)\tau) \Delta M(i). \quad (2)$$

Представим случайные величины $f(i\tau)$ в (2) в виде

$$f(i\tau) = \frac{m(X_i - X_{i-1})}{\tau^2}, \quad i \geq 1, \quad (3)$$

где (X_i) – случайная последовательность, имеющая размерность длины (будем считать, что $X_0 = 0$). Заметим, что в случае отсутствия “памяти”, когда имеют место равенства $p(0) = 1$ и $p(i) = 0$ при всех $i \geq 1$, представление (1) дает классический закон изменения импульса под действием силы $f(k\tau)$, где последовательность (X_i) приобретает смысл перемещений частицы. В случае системы с памятью случайные величины X_i , $i \geq 0$, не обязаны представлять перемещения в евклидовом пространстве. Структура последовательности $(X_i)_{i \geq 1}$ будет определена ниже (см. п. 2.1.1).

Из уравнений (2) и (3) находим следующее представление скорости в рассматриваемой модели с памятью:

$$v(k\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^k X_{k-i} \Delta M(i).$$

Следовательно, R_n представляется в виде

$$R_n = \tau \sum_{k=0}^n v(k\tau) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k X_{k-i} \Delta M(i), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Положения R_n частицы, построенные по функции M , будем обозначать как $R_n(M)$.

Наша цель – исследовать последовательность $(R_n(M))_{n \geq 0}$ как модель блуждания с памятью, управляемой функцией M и случайной последовательностью (X_i) .

В п. 2.2 мы поясним, почему в качестве функции M используется либо степенная функция $p_\nu(t) = t^\nu$ с $\nu \geq 0$ (считаем, что $p_0(0) = 0$), либо продолженная на всю положительную полуось лестница Кантора $C_q(t)$ с $q > 2$.

2.1.1. Нелокальность воздействия среды. Вернемся к вопросу структурирования последовательности (X_n) . Согласно представлению (3) отсутствие условия независимости случайных величин $(X_n)_{n \geq 1}$ означает, вообще говоря, что в данный момент времени $i\tau$ результирующая среды $f(i\tau)$ имеет ненулевые корреляции со своими значениями в любые другие моменты времени, таким образом, представление (4) реализует “перемешивание” памяти частицы и нелокальности воздействия среды.

Далее мы ограничимся случаем стационарной последовательности $(X_n)_{n \geq 1}$ с нулевым средним. В широких предположениях условие стационарности последовательности $(X_n)_{n \geq 1}$ эквивалентно тому, что X_n имеет следующее разложение (см., например, [9], теорема 16.7.1):

$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{n-k} a_k, \quad (5)$$

где $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ – последовательность некоррелированных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией и $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ – неслучайная суммируемая с квадратом последовательность действительных чисел.

Созим класс рассматриваемых стационарных последовательностей, наложив следующее условие на последовательности (ξ_k) и (a_k) в представлении (5).

УСЛОВИЕ Н. Последовательность (ξ_k) – это последовательность независимых одинаково распределенных случайных величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Последовательность (a_k) имеет вид

$$\begin{aligned} a_k &= \sigma L_H^{-1/2} ((k+1)^{H-1/2} - k^{H-1/2}), \quad k \geq 1, \\ a_0 &= \sigma L_H^{-1/2}, \quad a_k = 0, \quad k < 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где σ – ненулевая константа, H – некоторый параметр, $0 < H < 1$, и

$$L_H = \frac{1}{2H} + \int_0^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 ds.$$

В случае $H = 1/2$ получаем, что $a_0 = \sigma$ и $a_k = 0$ при всех $k \neq 0$, в этом случае $X_n = \sigma \xi_n$, $n \geq 1$, – обычная последовательность независимых одинаково распределенных величин.

Выбор (6) последовательности (a_k) мотивирован тем, что

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right\rangle \sim \sigma^2 n^{2H}, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Это означает, что с помощью такой последовательности мы можем моделировать весь содержательный спектр степенного изменения второго момента суммы $\sum_{i=1}^n X_i$ (см. работы [10], [11]). В работах [10], [11] приводится более широкий класс последовательностей (a_k) , удовлетворяющих условию (7), в настоящей работе для простоты изложения мы ограничимся последовательностью, приведенной в условии Н.

2.2. Формирование памяти частицы по степенной функции и лестнице Кантора. Теорема о соотношении нелокальностей. Напомним, что согласно (2) последовательность $\Delta M(i) = M(i+1) - M(i)$, $i \geq 0$, управляет памятью частицы.

Пусть $M = p_\nu$ – степенная функция с показателем ν . Начнем со случая $\nu = 0$. Тогда $\Delta p_\nu(0) = 1$ и $\Delta p_\nu(i) = 0$ при всех $i \geq 1$, и имеет место полная потеря памяти о предыстории частицы. В этом случае

$$R_n(p_0) = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \langle R_n^2(p_0) \rangle \sim \sigma^2 n^{2H} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

(см. выше соотношение (7)). Таким образом, аномальность блуждания $R_n(p_0)$ определяется нелокальностью воздействия среды на частицу.

В случае $\nu = 1$ значение $\Delta p_\nu(i) = 1$ для любого $i \geq 0$, т.е. можно говорить о полном сохранении информации о предыстории частицы.

Рассмотрим теперь случай $0 < \nu < 1$. В этом случае выполняется соотношение

$$\Delta p_\nu(i) \sim \frac{\nu}{i^{1-\nu}} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow +\infty,$$

которому можно придать смысл “старения информации” о предыстории. В дальнейшем для степенной функции p_ν мы будем рассматривать именно случай $0 \leq \nu \leq 1$, что соответствует представлению о “монотонном” уменьшении (возможно, в нестрогом смысле) информации о предыстории.

Помимо представленного случая монотонного изменения информации мы рассматриваем ситуацию, когда колебание $\Delta M(i)$ убывает импульсным образом, т. е. величина $\Delta M(i)$ отлична от нуля для определенных моментов i , при этом с ростом i колебание $\Delta M(i)$ все реже принимает ненулевые значения. В качестве такой функции M мы берем продолжение лестницы Кантора на всю положительную полуось с сохранением свойства масштабной инвариантности.

Проведем указанное продолжение лестницы Кантора. Множество Кантора K_q , $q > 2$, определяется как множество всех чисел вида $\sum_{i=-\infty}^{-1} a_i q^i$, где каждый коэффициент a_i равен либо 0, либо $q - 1$. Множество K_3 – классическое канторово множество, множество K_2 совпадает с отрезком $[0, 1]$. Размерность Хаусдорфа множества K_q равна $d_q = \ln 2 / \ln q$ (см., например, книгу [12]). В дальнейшем за буквой d_q закрепим обозначение размерности Хаусдорфа множества K_q .

Каждому множеству K_q с $2 < q < \infty$ соответствует непрерывная, неубывающая, заданная на отрезке $[0, 1]$ функция C_q , которая называется канторовой лестницей. Напомним, что для любого $z = \sum_{i=-\infty}^{-1} b_i q^i \in K_q$ (где каждый b_i равен либо 0, либо $q - 1$)

$$C_q(z) = \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i 2^i, \quad a_i = \frac{b_i}{q-1}.$$

Отметим, что в качестве поточечных пределов получаются функции C_2 и C_∞ , а именно $C_2(t) = t$ для всех $t \in [0, 1]$; $C_\infty(t) = 1/2$ при всех $t \in (0, 1)$, $C_\infty(0) = 0$ и $C_\infty(1) = 1$.

Для $C_q(t)$ с $2 \leq q < \infty$ выполняется известное свойство d_q -однородности (масштабной инвариантности), см., например, книгу [12]:

$$\frac{C_q(t)}{q^{d_q}} = C_q\left(\frac{t}{q}\right), \quad t \in [0, 1]. \quad (8)$$

Сохраняя свойство (8), продолжим функцию $C_q(t)$ на всю положительную полуось, для этого положим $C_q(t) = 2^{n+1} C_q(t/q^{n+1})$ для каждого $t \in [q^n, q^{n+1}]$, где $n \geq 0$. Продолженная таким образом функция C_q при целых n обладает свойством

$$C_q(q^n t) = q^{nd_q} C_q(t), \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Функция C_∞ также может быть продолжена на всю неотрицательную полуось, при этом дополнительно к тому, что $C_\infty(t) = 1/2$ при всех $t \in (0, 1)$, $C_\infty(0) = 0$ и $C_\infty(1) = 1$ (см. выше), выполняется равенство $C_\infty(t) = 1$ при всех $t \geq 1$. В этом случае $\Delta C_\infty(0) = 1$ и $\Delta C_\infty(i) = 0$ при всех $i \geq 1$, т. е. имеет место, как и в случае функции $p_0(t)$, полная потеря памяти о предыстории частицы.

Выполняется следующее свойство лестницы Кантора.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть q – целое число больше 2. Тогда при любом $i \geq 0$ значение $C_q(i+1) - C_q(i)$ равно 0 или 1. При этом для любого сколь угодно большого N найдутся $i, j \geq N$ такие, что $C_q(i+1) - C_q(i) = 0$ и $C_q(j+1) - C_q(j) = 1$.

Для канторовой лестницы в случае целого q , превосходящего 2, выполняется соотношение

$$\frac{C_q(q^{n+1}) - C_q(q^n)}{q^{n+1} - q^n} = \frac{2^{n+1} - 2^n}{q^{n+1} - q^n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, средняя скорость изменения функции C_q на расширяющихся и удаляющихся от начала координат временных интервалах становится исчезающе малой. Это означает, что с ростом i значение $\Delta C_q(i)$ все реже равно 1, при этом найдется сколь угодно большое i , для которого $\Delta C_q(i) = 1$ (см. предложение 1).

Подводя итог, можно сказать, что бинарная последовательность $(\Delta C_q(i))_{i \geq 0}$ моделирует *информационные потери* в предыстории частицы (часть состояний полностью исчезает; см. [5]), при этом отметим отличие от степенного случая, где речь идет не о потере информации, а о *монотонном уменьшении* информации о предыстории.

Результатом следующей теоремы является “расщепление” показателя степенной зависимости для второго момента исследуемого случайного блуждания. В дальнейшем будем писать $g(n) \asymp f(n)$, если $g(n) = O(f(n))$ и $f(n) = O(g(n))$ при $n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняется условие H и $0 \leq \nu \leq 1$, $2 < q < \infty$. Тогда при $n \rightarrow +\infty$ выполняются следующие асимптотические соотношения:

$$\langle R_n^2(p_\nu) \rangle \sim \sigma^2 s_{\nu,H}^2 n^{2\nu+2H}, \quad \langle R_{q^n}^2(C_q) \rangle \sim \sigma^2 c_{q,H}^2 n^{(2d_q+2H)}, \quad (10)$$

где

$$s_{\nu,H}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) dp_\nu(u) dp_\nu(v),$$

$$c_{q,H}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) dC_q(u) dC_q(v).$$

Кроме того, $\langle R_n^2(C_q) \rangle \asymp n^{2d_q+2H}$.

Отметим, что в теореме 1 параметр H отвечает за нелокальность воздействия среды, а параметры ν и d_q отвечают за память частицы.

2.3. Предельная теорема. Вычисление параметров нелокальности. Обозначим через $B_H(t)$ так называемое дробное броуновское движение [3], т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$R(t, s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad 0 < H < 1. \quad (11)$$

Легко видеть, что случай $H = 1/2$ соответствует стандартному винеровскому процессу, который мы будем обозначать через $W(t)$.

Отметим известное свойство H -однородности дробного броуновского движения [3]: для любого $\lambda > 0$ конечномерные распределения случайных процессов $\{B_H(\lambda t)\}$ и $\{\lambda^H B_H(t)\}$ совпадают. Кроме того, случайный процесс B_H имеет стационарные приращения. Определим гауссовский процесс

$$Z_t(M, H) = \sigma \int_0^t B_H(t-s) dM(s).$$

Процесс $Z_t(M, H)$ в случаях, когда M есть степенная функция или лестница Кантора C_q с $q < +\infty$, обладает свойством статистической масштабной инвариантности (см. замечание 1). Заметим, что $Z_t(p_0, H)$ совпадает с $\sigma B_H(t)$.

Через $[t]$ в дальнейшем обозначается целая часть числа t .

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняется условие H и $0 \leq \nu \leq 1$, $2 < q < \infty$; кроме того, пусть $\langle |\xi_1|^\alpha \rangle < \infty$ для некоторого $\alpha > \max\{2, 1/H\}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость по распределению:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq n} \frac{|R_k(p_\nu)|}{n^{H+\nu}} &\xrightarrow{d} \sup_{t \in [0,1]} |Z_t(p_\nu, H)|, \\ \sup_{t \in [0,1]} \frac{|R_{[q^n t]}(C_q)|}{q^{n(H+d_q)}} &\xrightarrow{d} \sup_{t \in [0,1]} |Z_t(C_q, H)|, \end{aligned} \quad (12)$$

где $d_q = \ln 2 / \ln q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\lambda = q^l$, где l – некоторое целое число и $2 < q < \infty$. В таком случае конечномерные распределения случайных процессов $\{Z_{\lambda t}(C_q, H)\}$ и $\{\lambda^{H+d_q} Z_t(C_q, H)\}$ совпадают. Этот факт является прямым следствием H -однородности фрактального броуновского движения, а также того, что $C_q(q^l s) = q^{ld_q} C_q(s)$ при всех $s \geq 0$ (см. формулу (9)). Отметим, что статистическая масштабная инвариантность процесса $Z_t(C_q, H)$ (как и масштабная инвариантность лестницы Кантора C_q) имеет дискретный характер, поскольку выполняется при специфическом дискретном наборе значений $\lambda = q^l$ [8]. Если вместо C_q рассматривать степенную функцию p_ν с $\nu \geq 0$, то совпадение конечномерных распределений процессов $\{Z_{\lambda t}(p_\nu, H)\}$ и $\{\lambda^{H+\nu} Z_t(p_\nu, H)\}$ имеет место для любой отличной от нуля постоянной λ , а не только для целых степеней параметра q .

На теореме 2 основывается вычисление параметров нелокальности.

2.3.1. *Вычисление параметров нелокальности.* Пусть имеются L независимых однородных экспериментов, в результате которых получены выборки $(R_1^{(j)}, \dots, R_n^{(j)})$, $j = 1, \dots, L$ (мы предполагаем, что выборки центрированы). Найдем оценки k^* и γ^* параметров k и γ степенной зависимости $\langle R_n^2 \rangle \sim k^2 n^{2\gamma}$. Вычислим выборочные вторые моменты

$$\overline{R_i^2} = \sum_{j=1}^L \frac{(R_i^{(j)})^2}{L}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что $\overline{R_i^2}$ является оценкой для $\langle R_i^2 \rangle$ (будем считать, что $L \gg 1$). Оценки k^* и γ^* можно найти методом наименьших квадратов, рассмотрев линейную регрессию: $\ln(\overline{R_i^2}) = 2 \ln k + 2\gamma \ln i + \varepsilon_i$, $2 \leq i \leq n$, где ε_i – случайные ошибки.

Используя k^* и γ^* , найдем оценки параметров ν и H . Напомним, что $\sigma = k/s_{\nu, H}$ и $\gamma = \nu + H$ (см. теорему 1). По выборке $(R_1^{(j)}, R_2^{(j)}, \dots, R_n^{(j)})$, $j = 1, \dots, L$, вычислим значение

$$r_j = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|R_i^{(j)}|}{n^{\gamma^*}}.$$

Получим выборку $(r_1, r_2, \dots, r_L)$; пусть $(r_{(1)}, r_{(2)}, \dots, r_{(L)})$ – соответствующий вариационный ряд, через Ψ_L^* обозначим выборочную функцию распределения.

Положим

$$\Psi_{\nu, H}(z) = \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} |Z_t(p_\nu, H)| < z\right).$$

ТАБЛИЦА 1

ν	0.05	0.09	0.14	0.18	0.22	0.27	0.32	0.36	0.41
H	0.40	0.36	0.31	0.27	0.23	0.18	0.13	0.09	0.04
$\rho(\nu, H)$	0.25	0.13	0.11	0.14	0.15	0.19	0.27	0.32	0.52

Отметим, что $\mathbf{P}(r_1 < z) \approx \Psi_{\nu, H}(z)$ (см. теорему 2). Вычислим значение $\Psi_{\nu, H}(z)$. Численно моделируя $N \gg 1$ траекторий гауссовского процесса $Z_t(p_\nu, H)$ (см. замечание 2), вычисляя на каждой траектории точную верхнюю грань

$$s(\nu, H) = \sup_{t \in [0, 1]} |Z_t(p_\nu, H)| \quad (13)$$

и выделяя число N_0 тех случаев, для которых $s(\nu, H) < z$, находим $\Psi_{\nu, H}(z) \approx N_0/N$.

Пара (ν_L^*, H_L^*) (где $\nu_L^* + H_L^* = \gamma^*$), на которой достигается минимум расстояния Колмогорова $\rho_L(\nu, H) = \sup_{|z| < +\infty} |\Psi_{\nu, H}(z) - \Psi_L^*(z)|$, является состоятельной оценкой неизвестных параметров (ν, H) функции распределения $\mathbf{P}(r_1 < z)$. Значение $\rho_L(\nu, H)$ вычисляется следующим образом (см., например, [13]):

$$\max \left\{ \max_{1 \leq j \leq L} \left(\frac{j}{L} - \Psi_{\nu, H}(r_{(j)}) \right), \max_{1 \leq j \leq L} \left(\Psi_{\nu, H}(r_{(j)}) - \frac{j-1}{L} \right) \right\}.$$

Значение $\rho_L(\nu_L^*, H_L^*)$ является оценкой близости реального блуждания, определяемого выборкой, к модели блуждания со степенной памятью.

Мы провели численное моделирование выборок $(R_1^{(j)}, \dots, R_n^{(j)})$, $j = 1, \dots, L$ для $L = 20$, $n = 1000$. При каждом j значение $R_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, n$ было найдено по формуле (4), в которой $M = p_\nu$, $\nu = 0.2$ и $H = 0.3$. Значение σ^2 полагалось равным 1. Случайные величины (ξ_k) в условии Н моделировались как стандартные нормальные. Используя приведенные выше вычислительные процедуры, мы получили $\gamma^* = 0.45$. В табл. 1 приведены пары (ν, H) такие, что $H + \nu = \gamma^*$. Для каждой из этих пар вычислялось расстояние Колмогорова $\rho_L(\nu, H)$. Из таблицы получаем, что $(\nu_{20}^*, H_{20}^*) = (0.14, 0.31)$ и $\rho_{20}(\nu_{20}^*, H_{20}^*) = 0.11$. Отметим близость оценок ν_{20}^* , H_{20}^* к точным значениям $\nu = 0.2$, $H = 0.3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Дробное броуновское движение $B_H(t)$ при $H \neq 1/2$ имеет интегральное представление [14]

$$\int_0^t K_H(t, s) dW(s)$$

с ядром

$$K_H(t, s) = c_H(t-s)^{H-1/2} + c_H\left(\frac{1}{2} - H\right) \int_s^t (u-s)^{H-3/2} (1-(s/u)^{1/2-H}) du,$$

где

$$c_H = \left(\frac{2H\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\Gamma(2-2H)} \right)^{1/2}$$

и Γ – гамма-функция Эйлера. Для численного моделирования процесса $Z_t(M, H)$ можно использовать дискретизации интегральных представлений $Z_t(M, H)$ и B_H .

2.4. Физический смысл параметров нелокальности. Напомним, что аномальность блуждания $R_n(p_0)$ (и $R_n(C_\infty)$) определяется нелокальностью воздействия среды на частицу (см. п. 2.2), при этом процесс блуждания $R_n(p_0)$ имеет “притяжение” к дробному броуновскому движению (см. теорему 2). Показатель H – это классический показатель Хёрста, отвечающий за геометрические свойства среды; отметим, что $H = 2 - D$, где D – размерность Хаусдорфа траекторий дробного броуновского движения (см., например, монографию [15]). Параметр $\nu \in (0, 1)$ в случае формирования памяти по степенному закону p_ν отвечает в текущий момент времени за степенную $(\Delta p_\nu(i) \sim \nu/i^{1-\nu})$ скорость убывания информации о предыдущих воздействиях, участвующих в формировании блуждания $R_n(p_\nu)$ (см. п. 2.2).

Параметр d_q в случае формирования памяти по закону, описываемому лестницей Кантора C_q , в текущий момент времени характеризует долю информации о предыдущих воздействиях, участвующих в формировании блуждания $R_n(C_q)$ [5]. Отметим крайние случаи. В случае $\nu = 0$ ($q = \infty$, $d_q = 0$) речь идет о полной потере информации о предыдущих воздействиях; если же $\nu = 1$ ($q = 2$, $d_q = 1$), то информация о предыстории полностью сохраняется. Отметим также, что параметры памяти ν и d_q определяют нестационарность скоростей процесса блуждания R_n . Действительно, если $\nu = 0$ ($d_q = 0$), то $v(k\tau) = X_k$, $k \geq 1$, есть стационарная последовательность, в противном случае стационарность скоростей нарушается.

2.5. Доказательство основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Прежде всего из соотношения (9) следует, что для вещественных аргументов вида $z = \sum_{i=-\infty}^M b_i q^i$, где каждое b_i равно либо 0, либо $q - 1$, значение $C_q(z)$ представляется в виде $\sum_{i=-\infty}^M a_i 2^i$, где $a_i = b_i/(q - 1)$.

Представим произвольное целое положительное число h в двоичной системе счисления как

$$h = \sum_{k=i}^j a_k 2^k, \quad (14)$$

где $0 \leq i \leq j$ и $a_i = a_j = 1$. Число h также допускает представление

$$h = \sum_{k=i+1}^j a_k 2^k + \sum_{k=-\infty}^{i-1} 2^k. \quad (15)$$

Положим

$$\Delta_L(h) = (q - 1) \sum_{k=i+1}^j a_k q^k + (q - 1) \sum_{k=-\infty}^{i-1} q^k, \quad \Delta_R(h) = (q - 1) \sum_{k=i}^j a_k q^k.$$

Тогда $C_q(\Delta_L(h)) = C_q(\Delta_R(h)) = h$. Следовательно,

$$C_q^{-1}(h) = [\Delta_L(h), \Delta_R(h)], \quad (16)$$

где левому концу интервала соответствует представление (15), а правому – представление (14). Преобразовав (16), получим

$$C_q^{-1}(h) = \left[(q - 1) \sum_{k=i+1}^j a_k q^k + q^i, (q - 1) \sum_{k=i+1}^j a_k q^k + (q - 1) q^i \right]. \quad (17)$$

Докажем, что

$$\Delta_L(h+1) = \Delta_R(h) + 1. \quad (18)$$

Рассмотрим несколько случаев. Пусть в (14) $i \geq 1$. Тогда $h+1 = \sum_{k=0}^j c_k 2^k$, где $c_0 = 1$, $c_k = a_k$ при всех $i \leq k \leq j$ и $c_k = 0$ при всех $1 \leq k \leq i-1$. Воспользуемся выражением (17), заменив при этом двоичное представление числа h (см. формулу (14)) на представление числа $h+1$, получим

$$\Delta_L(h+1) = (q-1) \sum_{k=1}^j c_k q^k + 1 = (q-1) \sum_{k=i}^j a_k q^k + 1.$$

Стало быть, $\Delta_L(h+1) = \Delta_R(h) + 1$ (см. (16)).

Пусть теперь в (14) $i = 0$ и $a_i = a_{i+1} = \dots = a_j = 1$. Тогда $h+1 = 2^{j+1}$. Используя соотношение (17) с точностью до замены в нем представления числа h на представление числа $h+1$, выводим, что (см. (16))

$$\Delta_L(h+1) = q^{j+1} = (q-1)(q^j + \dots + q + 1) + 1 = \Delta_R(h) + 1.$$

Перейдем к заключительному случаю. Пусть в (14) $i = 0$ и существует m такое, что $0 < m < j$ и $a_m = 0$; рассмотрим минимальное такое m . Тогда $h+1 = \sum_{k=m}^j c_k 2^k$, где $c_m = 1$ и $c_k = a_k$ при всех $k \geq m+1$. Опять же, используя (17), заменим в нем представление h на $h+1$, получим

$$\Delta_L(h+1) = (q-1) \sum_{k=m+1}^j a_k q^k + q^m = (q-1) \left(\sum_{k=m+1}^j a_k q^k + q^{m-1} + \dots + 1 \right) + 1.$$

В итоге мы снова получили равенство $\Delta_L(h+1) = \Delta_R(h) + 1$ (см. (16)). Тем самым равенство (18) доказано.

Заметим, что $C_q^{-1}(0) = 0$ и $C_q^{-1}(1) = [1, q-1]$. В итоге получаем, что $\bigcup_{i=0}^{\infty} C_q^{-1}(i)$ совпадает со множеством всех целых неотрицательных чисел. Следовательно, любые два последовательных целых числа i и $i+1$ попадут либо в один интервал $C_q^{-1}(k)$ при некотором k , либо в два соседних. Поэтому для любых $i \geq 0$ выполняется одно из равенств $C_q(i+1) - C_q(i) = 0$ или $C_q(i+1) - C_q(i) = 1$.

Далее, если N – произвольное сколь угодно большое число, то найдется i такое, что любое число из объединения $C_q^{-1}(i) \cup C_q^{-1}(i+1) \cup \dots$ превосходит N , откуда следует утверждение второй части предложения.

Основой для доказательства теорем 1, 2 является следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть M – некоторая неубывающая, заданная на положительной полуоси функция такая, что $M(0) = 0$. Если $\langle |\xi_1|^\alpha \rangle < \infty$ для некоторого $\alpha > 2$, то процессы $R_{[t]}(M)$ и $Z_t(M, H)$ можно задать на одном вероятностном пространстве так, что при $t \rightarrow \infty$ выполняется соотношение¹⁾

$$R_{[t]}(M) - Z_t(M, H) = o(M(t)t^{H'-1/2+1/\alpha}) \quad \text{п. н.},$$

где $H' = \max\{H, 1/2\}$.

¹⁾ Аббревиатура “п. н.” здесь и далее означает “почти наверное”.

Доказательство предложения 2 мы получим из следующих лемм 1–6. Введем обозначение $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ при $n \geq 1$ и положим $S_0 = 0$. В качестве леммы 1 приведем утверждение из работы [10] (см. следствие 1). Поскольку для последовательности (a_k) выполняется условие Н, в этом утверждении необходимо взять $g \equiv 1$ и $\max\{\beta, \gamma\} < H' - 1/2 + 1/\alpha$.

ЛЕММА 1. Пусть выполнено условие предложения 2, тогда случайное блуждание $S_{[t]}$ и процесс $B_H(t)$, можно задать на одном вероятностном пространстве так, что при $t \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$S_{[t]} - \sigma B_H(t) = o(t^{H'-1/2+1/\alpha}) \quad \text{н. н.},$$

где $H' = \max\{H, 1/2\}$.

ЛЕММА 2. Пусть выполняется условие предложения 2, тогда при $n \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$R_n(M) - \sigma \int_0^n B_H(n - [s]) dM(s) = o(M(n)n^{H'-1/2+1/\alpha}) \quad \text{н. н.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Меняя порядок суммирования в (4), представим $R_n(M)$ в виде $\sum_{i=0}^n S_{n-i} \Delta M(i)$, откуда получаем представление $R_n(M)$ в виде интеграла:

$$R_n(M) = \int_0^n S_{n-[s]} dM(s).$$

Воспользовавшись этим представлением, выводим неравенство

$$\left| R_n(M) - \sigma \int_0^n B_H(n - [s]) dM(s) \right| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |S_k - \sigma B_H(k)| M(n).$$

Далее, используя лемму 1, получаем утверждение леммы.

Приведем следующее утверждение из работы [16], которое потребуется для доказательства леммы 4.

ЛЕММА 3. Пусть $\{\xi(t); 0 \leq t \leq 1\}$ – центрированный гауссовский процесс, причем $\xi(0) = 0$ и $\langle (\xi(t) - \xi(s))^2 \rangle \leq C|t - s|^\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$. Тогда для всех $y \geq 0$

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]} |\xi(t)| > y \right) \leq 4 \exp(-C_\alpha y^2 C^{-1}),$$

где C_α – положительная константа, зависящая только от α .

ЛЕММА 4. При $n \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$\sup_{\substack{|t-s| \leq 1, \\ t, s \in [0, n]}} |B_H(t) - B_H(s)| = O(\sqrt{\ln n}) \quad \text{н. н.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что s и t лежат в интервалах вида $[i, i+1]$, $0 \leq i < n$, при этом если $|s - t| \leq 1$, то эти интервалы либо совпадают, либо примыкают друг к другу. Поэтому для событий

$$A_t = \left\{ \sup_{t \leq s \leq t+1} |B_H(s) - B_H(t)| > \frac{y}{3} \right\},$$

где y – произвольное положительное действительное число, выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\left(\sup_{|t-s|\leq 1} |B_H(t) - B_H(s)| > y\right) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{i < n} A_i\right). \quad (19)$$

Используя стационарность приращений процесса B_H , получаем, что

$$\mathbf{P}(A_t) = \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |B_H(s)| > \frac{y}{3}\right).$$

Следовательно, из (19) вытекает неравенство

$$\mathbf{P}\left(\sup_{|t-s|\leq 1} |B_H(t) - B_H(s)| > y\right) \leq n\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |B_H(s)| > \frac{y}{3}\right). \quad (20)$$

Далее, заметим, что $\langle (B_H(t) - B_H(s))^2 \rangle = \langle B_H^2(t-s) \rangle = |t-s|^{2H}$. Применив к правой части неравенства (20) лемму 3 с учетом того, что $\alpha = 2H$ и $C = 1$, а также положив $y = 3\sqrt{3 \ln n / C_{2H}}$, получим

$$n\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |B_H(s)| > \sqrt{\frac{3 \ln n}{C_{2H}}}\right) \leq \frac{4}{n^2}. \quad (21)$$

Используя известную лемму Бореля–Кантелли, получаем, что с вероятностью единица происходит лишь конечное число событий из набора событий

$$\left(\sup_{\substack{|t-s|\leq 1, \\ t,s \in [0,n]}} |B_H(t) - B_H(s)| > 3\sqrt{\frac{\ln n}{C_{2H}}}\right)_{n \geq 1}.$$

Отсюда получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 5. *При $n \rightarrow \infty$ имеет место соотношение*

$$\int_0^n B_H(n-s) dM(s) - \int_0^n B_H(n-s) dM(s) = O(M(n)\sqrt{\ln n}) \quad n.н.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\sup_{0 \leq s \leq n} \left| \int_0^n B_H(n-s) dM(s) - \int_0^n B_H(n-s) dM(s) \right| \leq \sup_{\substack{|t-s|\leq 1, \\ t,s \in [0,n]}} |B_H(t) - B_H(s)| M(n).$$

Далее, применяя лемму 4, получаем утверждение леммы 5.

ЛЕММА 6. *При $t \rightarrow \infty$ выполняется равенство*

$$\left| \int_0^t B_H(t-s) dM(s) - \int_0^{[t]} B_H([t]-s) dM(s) \right| = O(M(t)\sqrt{\ln t}) \quad n.н.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^t B_H(t-s) dM(s) - \int_0^{[t]} B_H([t]-s) dM(s) \right| \leq \\
 & \leq \int_0^{[t]} |B_H(t-s) - B_H([t]-s)| dM(s) + \int_{[t]}^t |B_H(t-s)| dM(s) \leq \\
 & \leq 2 \sup_{\substack{|u-v| \leq 1, \\ u, v \in [0, t]}} |B_H(u) - B_H(v)| M(t). \tag{22}
 \end{aligned}$$

Применяя лемму 4, получаем утверждение леммы 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Выполняется следующее очевидное неравенство:

$$\begin{aligned}
 |R_{[t]}(M) - Z_t(M, H)| & \leq \left| R_{[t]}(M) - \sigma \int_0^{[t]} B_H([t]-[s]) dM(s) \right| + \\
 & + \left| \sigma \int_0^{[t]} B_H([t]-[s]) dM(s) - \sigma \int_0^{[t]} B_H([t]-s) dM(s) \right| + \\
 & + \left| \sigma \int_0^{[t]} B_H([t]-s) dM(s) - \sigma \int_0^t B_H(t-s) M(s) \right|. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Применяя леммы 2, 5 и 6 соответственно к первому, второму и третьему слагаемому в правой части (23), получаем утверждение предложения.

ЛЕММА 7. Для любого $t \geq 0$ выполняется равенство

$$\langle Z_t^2(p_\nu, H) \rangle = \sigma^2 s_{\nu, H}^2 t^{2\nu+2H},$$

где

$$s_{\nu, H}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) dp_\nu(u) dp_\nu(v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для начала $\nu > 0$. Выполняется следующее равенство:

$$\langle Z_t^2(p_\nu, H) \rangle = \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \langle B_H(t-r) B_H(t-s) \rangle dr^\nu ds^\nu. \tag{24}$$

Из (11) и (24) следует, что

$$\langle Z_t^2(p_\nu, H) \rangle = \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \frac{(t-r)^{2H} + (t-s)^{2H} - |r-s|^{2H}}{2} dr^\nu ds^\nu. \tag{25}$$

Сделав в (25) замену $r = tu$ и $s = tv$, мы сразу получим утверждение леммы.

Пусть теперь $\nu = 0$. Очевидно, что процесс $Z_t(p_0, H)$ совпадает с $\sigma B_H(t)$. Учитывая, что $s_{0, H}^2 = 1$ и $\langle B_H^2(t) \rangle = t^{2H}$, получаем утверждение леммы и в этом случае.

Отметим, что функция C_q с $2 \leq q < \infty$ имеет степенные огибающие.

ЛЕММА 8. Для каждого $2 \leq q < \infty$ имеют место неравенства

$$\frac{t^{d_q}}{(q-1)^{d_q}} \leq C_q(t) \leq t^{d_q}, \quad t \geq 0, \tag{26}$$

где $d_q = \ln 2 / \ln q$.

Заметим, что в лемме 8 оба неравенства точные. Левое неравенство достигается при значениях t , имеющих вид $(q-1)q^m$, а правое – при q^m , где m – целое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [17] неравенство (26) доказано для всех $t \in [0, 1]$. Рассмотрим некоторое $t > 1$. Тогда существует целое $m > 1$ такое, что $t \in [q^m, q^{m+1}]$. Из определения продолжения функции C_q на всю положительную полуось следует, что $C_q(t) = 2^{m+1}C_q(t/q^{m+1})$. Поскольку $t/q^{m+1} \in [0, 1]$, для $C_q(t/q^{m+1})$ выполняется неравенство (26), а именно

$$\frac{t^{d_q}}{2^{m+1}(q-1)^{d_q}} \leq C_q\left(\frac{t}{q^{m+1}}\right) \leq \frac{t^{d_q}}{2^{m+1}}.$$

Откуда сразу получаем, что $C_q(t)$ действительно удовлетворяет неравенству (26).

ЛЕММА 9. Пусть $2 \leq q < \infty$. Тогда для любого целого n

$$\langle Z_{q^n}^2(C_q, H) \rangle = \sigma^2 c_{q,H}^2 q^{n(2d_q+2H)},$$

где

$$c_{q,H}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) dC_q(u) dC_q(v).$$

Кроме того, при $t \rightarrow \infty$

$$\langle Z_t^2(C_q, H) \rangle \asymp t^{2d_q+2H}. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место следующее равенство:

$$\langle Z_t^2(C_q, H) \rangle = \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \langle B_H(t-r)B_H(t-s) \rangle dC_q(r) dC_q(s). \quad (28)$$

Из (11) и (28) следует, что

$$\langle Z_t^2(C_q, H) \rangle = \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \frac{(t-r)^{2H} + (t-s)^{2H} - |r-s|^{2H}}{2} dC_q(r) dC_q(s). \quad (29)$$

Положив в этом выражении $t = q^n$ и сделав замену $r = q^n u$ и $s = q^n v$, с учетом равенств $C_q(r) = q^{nd_q} C_q(u)$ и $C_q(s) = q^{nd_q} C_q(v)$ мы получаем утверждение первой части леммы.

Из (29) вытекает неравенство

$$\langle Z_t^2(C_q, H) \rangle \geq \sigma^2 \int_0^t \int_0^s \frac{(t-r)^{2H} + (t-s)^{2H} - (s-r)^{2H}}{2} dC_q(r) dC_q(s). \quad (30)$$

Уменьшая его правую часть, получаем

$$\langle Z_t^2(C_q, H) \rangle \geq \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{2H} dC_q(r) dC_q(s). \quad (31)$$

Преобразовав правую часть (31), а также проинтегрировав по частям, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{2H} dC_q(r) dC_q(s) &= \frac{\sigma^2}{4} \int_0^t (t-s)^{2H} dC_q^2(s) = \\ &= \frac{H\sigma^2}{2} \int_0^t C_q^2(s)(t-s)^{2H-1} ds. \end{aligned} \quad (32)$$

Далее, применяя лемму 8 к правой части последнего равенства в (32), получаем оценку снизу:

$$\langle Z_t^2(C_q, H) \rangle \geq ct^{2H+2d_q}, \quad c = \frac{H\sigma^2}{2(q-1)^{2d_q}} \int_0^1 u^{2d_q}(1-u)^{2H-1} du. \quad (33)$$

Получим теперь оценку сверху. Применяя неравенство Гёльдера к правой части равенства (28), выводим

$$\sigma^2 \int_0^t \int_0^t \langle B_H(t-r)B_H(t-s) \rangle dC_q(r) dC_q(s) \leq \sigma^2 \left(\int_0^t (t-s)^H dC_q(s) \right)^2. \quad (34)$$

Интегрируя по частям в правой части этого неравенства, получаем

$$\left(\int_0^t (t-s)^H dC_q(s) \right)^2 = H^2 \left(\int_0^t (t-s)^{H-1} C_q(s) ds \right)^2. \quad (35)$$

Наконец, применяя лемму 8 к правой части данного равенства, получаем оценку сверху:

$$\langle Z_t^2(C_q, H) \rangle \leq Ct^{2H+2d_q}, \quad C = H^2\sigma^2 \left(\int_0^1 u^{d_q}(1-u)^{H-1} du \right)^2. \quad (36)$$

Из оценок (33) и (36) выводим соотношение (27).

ЛЕММА 10. Пусть (R_n) и (Z_n) – заданные на одном вероятностном пространстве последовательности нормальных случайных величин такие, что при $n \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$R_n - Z_n = o(\sqrt{\langle Z_n^2 \rangle}) \quad \text{п. н.}$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ выполняется эквивалентность $\langle R_n^2 \rangle \sim \langle Z_n^2 \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует, что, во-первых, при $n \rightarrow \infty$ распределения случайных величин $R_n/\sqrt{\langle Z_n^2 \rangle}$ слабо сходятся к стандартному нормальному закону, а во-вторых, случайная величина $R_n/\sqrt{\langle R_n^2 \rangle}$ при всех n имеет стандартное нормальное распределение, откуда и вытекает утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Прежде всего можно изначально считать, что случайные величины (ξ_k) , по которым строится последовательность $R_n(M)$, являются стандартными нормальными, поскольку это не влияет на величину $\langle R_n^2(M) \rangle$ (напомним, что функция M является либо степенной функцией p_ν , либо лестницей Кантора C_q). Нормальные величины имеют все абсолютные моменты положительного порядка, поэтому в предложении 2 мы можем считать, что $\alpha > 2 + 1/H$. Далее, из предложения 2 и леммы 7 следует, что при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение $R_n(M) - Z_n(M, H) = o(\sqrt{\langle Z_n^2(M, H) \rangle})$ п. н. Из леммы 10 следует, что $\langle R_n^2(M) \rangle \sim \langle Z_n^2(M, H) \rangle$. Применяя лемму 7 к правой части полученного асимптотического соотношения, получаем первую часть утверждения теоремы. Аналогично доказывается вторая часть теоремы, для этого достаточно вместо леммы 7 применить лемму 9 и заменить n на q^n и p_ν на C_q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из предложения 2 следует, что существует вероятностное пространство, на котором при $t \rightarrow \infty$

$$R_{[t]}(p_\nu) - Z_t(p_\nu, H) = o(t^{H'-1/2+\nu+1/\alpha}) \quad \text{п. н.} \quad (37)$$

Следовательно, из (37) получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{t \in [0,1]} |R_{[nt]}(p_\nu) - Z_{nt}(p_\nu, H)| = o(n^{H'-1/2+\nu+1/\alpha}) \quad \text{п. н.} \quad (38)$$

Отсюда вытекает, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{R_{[nt]}(p_\nu)}{n^{\nu+H}} - \frac{Z_{nt}(p_\nu, H)}{n^{\nu+H}} \right| = o(1) \quad \text{п. н.} \quad (39)$$

Далее, заметим, что

$$\frac{Z_{nt}(p_\nu, H)}{n^{\nu+H}} \stackrel{d}{=} Z_t(p_\nu, H),$$

где совпадение распределений подразумевается в пространстве $C[0, 1]$ с равномерной метрикой (см. замечание 1). Поскольку функция $h(x) = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$ является непрерывной на $C[0, 1]$, мы имеем

$$\sup_{t \in [0,1]} \frac{|Z_{nt}(p_\nu, H)|}{n^{\nu+H}} \stackrel{d}{=} \sup_{t \in [0,1]} |Z_t(p_\nu, H)|. \quad (40)$$

Используя соотношения (39) и (40) и применяя теорему 4.1 из монографии [18], получаем

$$\sup_{t \in [0,1]} \frac{|R_{[nt]}(p_\nu)|}{n^{\nu+H}} \stackrel{d}{\rightarrow} \sup_{t \in [0,1]} |Z_t(p_\nu, H)|.$$

Аналогично, с точностью до замены n на q^n и p_ν на C_q , доказывается вторая часть теоремы.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках феноменологии потока памяти [4], [5] построена одномерная модель случайного блуждания, для которой при условии конечности момента второго порядка возможен как суб- так и супердиффузионный режим; при этом, вообще говоря, различается случай формирования памяти по закону, описываемому степенной функцией и лестницей Кантора. Показатель степенного изменения дисперсии построенного процесса блуждания есть сумма удвоенного параметра нелокальности воздействия среды и удвоенного параметра памяти частицы. Заметим, что в случае формирования памяти по закону, описываемому лестницей Кантора, установлена бинарная структура информации о предыстории частицы (см. предложение 1).

Если для некоторого блуждания установлено, что показатель степенного изменения дисперсии находится в диапазоне $(0, 4)$, то, используя соответствующие выборочные данные, можно вычислить параметры нелокальности и оценить близость к модели блуждания со степенной памятью (заметим, что за рамками настоящей работы осталось вычисление параметров нелокальности для модели блуждания с канторовой памятью). Далее вычисленные параметры нелокальности можно использовать для прямого стохастического моделирования процесса блуждания с соответствующими параметрами нелокальности и законом изменения дисперсии (см. соотношения (4), (5) и условие Н).

Отметим, что построенная модель блуждания (см. соотношение (4)) естественным образом обобщается на трехмерный случай; основной проблемой на этом пути является получение предельной теоремы, аналогичной теореме 2, которая необходима для вычисления параметров нелокальности и проверки адекватности модели блуждания экспериментальным данным.

Список литературы

- [1] R. Metzler, J. Klafter, “The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach”, *Phys. Rep.*, **339**:1 (2000), 1–77.
- [2] В. В. Учайкин, “Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы”, *УФН*, **173**:8 (2003), 847–876.
- [3] B. B. Mandelbrot, J. W. Van Ness, “Fractional Brownian motions, fractional noises and applications”, *SIAM Rev.*, **10**:4 (1968), 422–437.
- [4] А. И. Олемской, А. Я. Флат, “Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды”, *УФН*, **163**:12 (1993), 1–50.
- [5] Р. Р. Нигматуллин, “Дробный интеграл и его физическая интерпретация”, *ТМФ*, **90**:3 (1992), 354–368.
- [6] В. П. Будаев, С. П. Савин, Л. М. Зеленый, “Наблюдения перемежаемости и обобщённого самоподобия в турбулентных пограничных слоях лабораторной и магнитосферной плазмы: на пути к определению количественных характеристик переноса”, *УФН*, **189**:9 (2011), 905–952.
- [7] В. П. Будаев, Л. Н. Химченко, “О фрактальной структуре осажденных пленок в токамаке”, *ЖЭТФ*, **131**:4 (2007), 711–728.
- [8] А. А. Хамзин, Р. Р. Нигматуллин, И. И. Попов, “Микроскопическая модель недебаевской диэлектрической релаксации. Закон Коула–Коула и его обобщение”, *ТМФ*, **173**:2 (2012), 314–332.
- [9] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М., 1965.
- [10] Н. С. Аркашов, И. С. Борисов, “Гауссовская аппроксимация процессов частных сумм скользящих средних”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:6 (2004), 1221–1255.
- [11] T. Konstantopoulos, A. Sakhanenko, “Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **1** (2004), 47–63.
- [12] G. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer, New York, 2008.
- [13] Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов, *Таблицы математической статистики*, Наука, М., 1983.
- [14] E. Alós, O. Mazet, D. Nualart, “Stochastic calculus with respect to Gaussian processes”, *Ann. Probab.*, **29**:2 (2001), 766–801.
- [15] Е. Федер, *Фракталы*, Мир, М., 1991.
- [16] М. Лидбеттер, Г. Линдгрэн, Х. Ротсен, *Экстремумы случайных последовательностей и процессов*, Мир, М., 1989.
- [17] Е. А. Горин, Б. Н. Кукушкин, “Интегралы, связанные с канторовой лестницей”, *Алгебра и анализ*, **15**:3 (2003), 188–220.
- [18] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977.

Поступила в редакцию 30.10.2016,
после доработки 9.01.2017