Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Р. Караханян, Р. Киршнер, Квадратичное разрешение ортогональных и симплектических янгианов, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 2, 250–258

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9296>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:45:29

© 2017 г.

Д. Р. Караханян*, Р. Киршнер†

КВАДРАТИЧНОЕ РАЗРЕШЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ЯНГИАНОВ

Ортогональные и симплектические янгианы определяются посредством соотношения Янга–Бакстера типа RLL , включающего фундаментальную R -матрицу, соответствующую $so(n)$ - или $sp(2m)$ -симметрии. Мы исследовали условия разрешимости второго порядка, при которых разложение $L(u)$ по u^{-1} обрывается после квадратичного члена, и вывели соотношения, соответствующие двум нетривиальным членам разложения $L(u)$.

Ключевые слова: интегрируемые системы, соотношение Янга–Бакстера, ортогональные и симплектические алгебры Ли, усеченные янгианы.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9296>

Посвящается памяти П. П. Кулиша

1. ЯНГИАНЫ С ОРТОГОНАЛЬНОЙ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Пусть матрица R_{12} действует в тензорном произведении двух n -мерных линейных пространств V , ее матричные элементы обозначим как $R_{b_1 b_2}^{a_1 a_2}$. Фундаментальное уравнение Янга–Бакстера имеет вид

$$\begin{aligned} R_{b_1 b_2}^{a_1 a_2}(u) R_{c_1 c_3}^{b_1 a_3}(u+v) R_{c_2 c_3}^{b_2 b_3}(v) &= R_{b_2 b_3}^{a_2 a_3}(v) R_{b_1 c_3}^{a_1 b_3}(u+v) R_{c_1 c_2}^{b_1 b_2}(u) \implies \\ R_{12}(u) R_{13}(u+v) R_{23}(v) &= R_{23}(v) R_{13}(u+v) R_{12}(u). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Это соотношение широко используется в качестве основы для исследования квантовых интегрируемых систем и рассматривается как аналог тождеств Якоби в формулировке соответствующих алгебр [1]–[7]. Оно имеет решение [7]–[10]

$$R_{b_1 b_2}^{a_1 a_2}(u) = u(u + \beta) I_{b_1 b_2}^{a_1 a_2} + (u + \beta) P_{b_1 b_2}^{a_1 a_2} - \epsilon u K_{b_1 b_2}^{a_1 a_2}, \quad (1.2)$$

Работа Р. Киршнера финансировалась программой ОИЯИ (Дубна, Россия) “Тейзенберг–Ландау”. Исследования Д. Р. Караханяна поддержаны программой ОИЯИ “Сморodinский–Тер-Антонян”, а также частично поддержаны Armenian State Committee of Science (грант № SCS 15RF-039).

*Ереванский физический институт, Ереван, Армения. E-mail: karakhan@yerphi.am

†Institut für Theoretische Physik, Universität Leipzig, Leipzig, Germany.
E-mail: Roland.Kirschner@itp.uni-leipzig.de

где

$$I_{b_1 b_2}^{a_1 a_2} = \delta_{b_1}^{a_1} \delta_{b_2}^{a_2}, \quad P_{b_1 b_2}^{a_1 a_2} = \delta_{b_2}^{a_1} \delta_{b_1}^{a_2}, \quad K_{b_1 b_2}^{a_1 a_2} = \varepsilon^{a_1 a_2} \varepsilon_{b_1 b_2}, \quad \beta = \frac{n}{2} - \epsilon. \quad (1.3)$$

Здесь ε_{ab} есть невырожденная инвариантная метрика в пространстве V :

$$\varepsilon_{ab} = \epsilon \varepsilon_{ba}, \quad \varepsilon_{ab} \varepsilon^{bd} = \delta_a^d. \quad (1.4)$$

R -матрица (1.2) инвариантна относительно присоединенного действия любой вещественной формы (связанной с метрикой ε^{ab}) комплексных групп $SO(n, \mathbb{C})$ и $Sp(n, \mathbb{C})$. Значения $\epsilon = +1$ и $\epsilon = -1$ относятся к группам $SO(n)$ и $Sp(n)$ соответственно. Обозначим ε^{bd} (с помощью верхних индексов) элементы обратной матрицы ε^{-1} .

Существование инвариантного тензора ε_{ab} приводит к появлению третьего члена в соответствующем выражении для R -матриц и к квадратичной зависимости от спектрального параметра u .

Пусть $\mathcal{G}$ – алгебра Ли $so(n)$ или $sp(2m)$ ($2m = n$). Тогда отвечающей ей янгиан $Y(\mathcal{G})$ определяется [5], [6] как ассоциативная алгебра с бесконечным числом генераторов $(L^{(k)})_b^a$, для которых верно условие $(L^{(0)})_b^a = I \delta_b^a$, где I – единичный элемент в $Y(\mathcal{G})$, и $L^{(k)}_b^a$ при $k > 0$ удовлетворяют определяющим соотношениям. Генераторы $L^{(k)}_b^a \in Y(\mathcal{G})$ можно считать коэффициентами в разложении оператора L

$$L_b^a(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L^{(k)})_b^a}{u^k}, \quad L^{(0)} = I, \quad (1.5)$$

для которого выполняются соотношения Янга–Бакстера типа RLL :

$$\begin{aligned} R_{b_1 b_2}^{a_1 a_2}(u-v) L_{c_1}^{b_1}(u) L_{c_2}^{b_2}(v) &= L_{b_2}^{a_2}(v) L_{b_1}^{a_1}(u) R_{c_1 c_2}^{b_1 b_2}(u-v) \iff \\ R_{12}(u-v) L_1(u) L_2(v) &= L_2(v) L_1(u) R_{12}(u-v), \end{aligned} \quad (1.6)$$

эквивалентные соотношениям, определяющим янгиан $Y(\mathcal{G})$.

Здесь $R_{b_1 b_2}^{a_1 a_2}(u-v)$ есть R -матрица Янга–Бакстера (1.2), а во второй строке формулы (1.6) мы использовали стандартные матричные обозначения, принятые в статье [11].

Янгиан $Y(\mathcal{G})$ с бесконечным числом генераторов можно представить с использованием оценок конечного порядка, причем образ генераторов таков, что $(L^{(k)})_b^a = 0$ при $k > k_0$. В случае общей линейной симметрии уравнение Янга–Бакстера типа RLL , включающее фундаментальную R -матрицу и оператор L , решается с помощью линейного выражения $L_{ab}(u) = u \delta_{ab} + M_{ab}$ без наложения каких-либо ограничений на представления алгебры Ли, порожденные M_{ab} , т. е. в универсальной обертывающей алгебре существует решение первого порядка. Ситуация меняется, если рассматривать ортогональные и симплектические симметрии, как в настоящей статье. Ограничение, налагаемое на разложение $L(u)$ по u , приводит к условиям связи, которые не могут выполняться одновременно во всех представлениях алгебры Ли. Хорошо известный пример спинорного представления был рассмотрен в статье [12]. Этот и другие примеры были отмечены в работах [9], [13]. Операторы L с простой структурой представляют интерес для приложений, поскольку они являются “строительными блоками” при формулировке квантовых интегрируемых систем. Операторы L , соответствующие решениям первого и второго порядков, недавно были рассмотрены в статьях [14], [15]. В настоящей работе мы продолжаем эти исследования, проводя анализ общего решения множества условий разрешимости второго порядка.

2. УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим квадратичный анзац общего вида (отвечающий случаю $k_0 = 2$)

$$L(u) = u^2 + uG + H. \quad (2.1)$$

Тогда определяющие соотношения (1.6) записываются как

$$\begin{aligned} & [u(u + \beta)I_{12} + (u + \beta)P_{12} - \epsilon uK_{12}]((u + v)^2 + (u + v)G_1 + H_1)(v^2 + vG_2 + H_2) - \\ & - (v^2 - vG_2 + H_2)((u + v)^2 - (u + v)G_1 + H_1) \times \\ & \times [u(u + \beta)I_{12} + (u + \beta)P_{12} - \epsilon uK_{12}] = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Это равенство должно выполняться при произвольных значениях спектральных параметров u и v , для этого коэффициенты при независимых мономах $u^k v^r$ ($k + r \leq 4$) должны быть равны нулю. Левую часть (2.2) можно переписать как сумму следующих восьми комбинаций:

$$uv^2(u + v)\mathfrak{C}^{(2,1)} = \epsilon uv^2(u + v)[K_{12}, G_1 + G_2], \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & (u + \beta)uv(u + v)\mathfrak{C}^{(2,2)} = \\ & = (u + \beta)uv(u + v)([G_1, G_2] + (G_1 - G_2)P_{12} - \epsilon[K_{12}, G_2]), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & -uv(u + v)\mathfrak{C}^{(2,3)} = \\ & = -\epsilon uv(u + v) \times \\ & \times (K_{12}(H_1 + H_2 + (G_1 - \beta)G_2) - (H_1 + H_2 + G_2(G_1 - \beta))K_{12}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & -(u + \beta)u(u + v)\mathfrak{C}^{(2,4)} = \\ & = -(u + \beta)u(u + v)([G_1, H_2] + (H_1 - H_2)P_{12} - \epsilon[K_{12}, H_2]), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & -(u + \beta)v(u + v)\mathfrak{C}^{(2,5)} = \\ & = -(u + \beta)v(u + v)([H_1, G_2] + (H_1 - H_2)P_{12} + \epsilon[K_{12}, H_1]), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & uv\mathfrak{C}^{(2,6)} = \\ & = -\epsilon uv(u + v)\epsilon uv \times \\ & \times (K_{12}(H_1(G_2 + \beta) + (G_1 - \beta)H_2) - (H_2(G_1 - \beta) + (G_2 + \beta)H_1)K_{12}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & -u(u + \beta)\mathfrak{C}^{(2,7)} = \\ & = -u(u + \beta)([H_1, H_2] + (G_2H_1 - H_2G_1)P_{12} - \epsilon K_{12}(G_1 - \beta)H_2 + \\ & + \epsilon H_2(G_1 - \beta)K_{12}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$-u\mathfrak{C}^{(2,8)} = -\epsilon u(K_{12}(H_1 - \beta G_1 + \beta^2)H_2 - H_2(H_1 - \beta G_1 + \beta^2))K_{12}). \quad (2.10)$$

Данные равенства получены в результате следующих рассуждений: только два члена в (2.2) пропорциональны uv^3 , и после выделения комбинации (2.3) оставшийся пропорциональный u^3v член дается формулой (2.4). Отметим, что после выделения (2.3) и (2.4) в соотношении (2.2) остается лишь кубическая зависимость от спектральных параметров; более того, член с u^3 содержится только в комбинации (2.6), а uv^2 содержится только в комбинации (2.7). Отделяя эти комбинации, мы можем

переписать формулу (2.2) в квадратичном по спектральному параметру u виде, который дается суммой комбинаций (2.8), (2.9) и (2.10).

Другими словами, зависимость фундаментальной R -матрицы и квадратичных операторов L от спектральных параметров можно преобразовать в указанные выше восемь алгебраических условий (2.3)–(2.10) для операторнозначных матриц G и H .

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СВЯЗИ

Решим теперь упомянутые в предыдущем разделе связи типа RLL , используя тождества

$$P_{12}K_{12} = \epsilon K_{12} = K_{12}P_{12}, \quad K_{12}^2 = n\epsilon K_{12}. \quad (3.1)$$

3.1. Соотношения для случая алгебры Ли. Умножая первое условие (2.3) на $n\epsilon - K_{12}$ слева и справа, получаем, что

$$\epsilon K_{12}(G_1 + G_2)K_{12} = nK_{12}(G_1 + G_2) = n(G_1 + G_2)K_{12} = 2 \operatorname{tr} GK_{12},$$

поскольку $K_{12}G_1K_{12} = K_{12}G_2K_{12} = \epsilon \operatorname{tr} G$. Из этого мы можем сделать вывод, что справедливо равенство $G = g + \bar{G}$:

$$K_{12}(\bar{G}_1 + \bar{G}_2) = 0 = (\bar{G}_1 + \bar{G}_2)K_{12} \implies \operatorname{tr} \bar{G} \cdot K_{12} = 0. \quad (3.2)$$

Таким образом, матрица G состоит из бесследовой ε -антисимметричной части $\bar{G}$ и части, имеющей ненулевой след, пропорциональной метрическому тензору. В записи с использованием индексов это означает следующее:

$$\bar{G}^a_a = 0 = \bar{G}_a^a, \quad \bar{G}_{c_1c_2} + \epsilon \bar{G}_{c_2c_1} = 0 = \bar{G}^{a_1a_2} + \epsilon \bar{G}^{a_2a_1}.$$

Таким образом, мы окончательно приходим к выводу, что первое условие связи для $\mathfrak{C}^{(2,1)}$ в терминах бесследовой матрицы $\bar{G}$ сводится к двум соотношениям

$$\mathfrak{C}_L^{(2,1)} = K_{12}(\bar{G}_1 + \bar{G}_2) = 0, \quad \mathfrak{C}_R^{(2,1)} = (\bar{G}_1 + \bar{G}_2)K_{12} = 0. \quad (3.3)$$

Вторая связь

$$\mathfrak{C}^{(2,2)} = [G_1 + P_{12} - \epsilon K_{12}, G_2] = [G_1, G_2 + P_{12} - \epsilon K_{12}] \quad (3.4)$$

отражает симметрию матрицы G относительно одновременных поворотов во вспомогательных (первом или втором) и квантовом пространствах. Ее также можно переписать как $\bar{\mathfrak{C}}^{(2,2)}$, используя лишь $\bar{G}$.

Умножая $\bar{\mathfrak{C}}^{(2,2)}$ на K_{12} слева и справа и используя тождества (3.1), получаем равенства

$$\bar{\mathfrak{C}}_L^{(2,2)} = K_{12}([\bar{G}_1, \bar{G}_2] - 2\beta \bar{G}_2), \quad \bar{\mathfrak{C}}_R^{(2,2)} = ([\bar{G}_1, \bar{G}_2] + 2\beta \bar{G}_2)K_{12}. \quad (3.5)$$

Эти выражения также можно рассматривать как условия интегрируемости для третьей связи, поскольку их можно получить, умножая (2.5) на $1 - \epsilon P_{12}$ слева и справа соответственно.

Все полученные до сих пор соотношения касались матрицы G со значениями в алгебре. Она раскладывается на сумму матрицы g с ненулевым следом и градуированной антисимметричной матрицы $\bar{G}$. В этих соотношениях предполагается, что элементы последней являются генераторами алгебры Ли, а g – центральный элемент обертывающей алгебры. Данное предположение верно также и в общем случае, когда разложение не обрывается или обрывается после членов других порядков, отличных от $k_0 = 2$.

Остальные условия связывают второй член H с генераторами G и приводят к ограничениям на множество возможных представлений алгебры Ли.

Рассмотрим более простой пример решения первого порядка [14]. Условия для обрывания разложения следуют из условий, приведенных выше, в которые мы подставляем $H = 0$. Первые два выражения не меняются, и единственное новое условие следует из третьего выражения:

$$\mathfrak{C}^{(2,3)} \longrightarrow \mathfrak{C}^{(1,3)} = K_{12}(G_1 - \beta)G_2 - G_2(G_1 - \beta)K_{12} = 0.$$

Оно означает, что бесследовая ϵ -симметричная часть матрицы $\bar{G}^2$ исчезает:

$$\bar{G}^2 + \beta\bar{G} - \frac{m_2}{n} = 0, \quad m_2 = \text{tr}(\bar{G}^2).$$

Данное равенство справедливо лишь для некоторых представлений алгебры Ли.

3.2. Часть матрицы H , обладающая ϵ -симметрией. Умножая третье выражение (2.5) на $1 + \epsilon P_{12}$ слева и справа, мы переписываем его в виде коммутатора

$$\left[K_{12}, H_1 - \frac{1}{2}G_1^2 + H_2 - \frac{1}{2}G_2^2 \right] = 0 \quad (3.6)$$

и, как в случае выражения (2.3), приходим к соотношениям

$$H = h + \frac{1}{2}\bar{G}^2 + \bar{H}, \quad K_{12}(\bar{H}_1 + \bar{H}_2) = 0 = (\bar{H}_1 + \bar{H}_2)K_{12} \iff \bar{H}_{ab} = -\epsilon\bar{H}_{ba}. \quad (3.7)$$

Таким образом, ϵ -симметричная часть матрицы H выражается через ϵ -симметричную часть матрицы $\bar{G}^2$:

$$H_{ab} + \epsilon H_{ba} = \bar{G}_{ab}^2 + \beta\bar{G}_{ab} + 2h\epsilon_{ab}.$$

3.3. Симметрия матрицы H . Следующие два соотношения:

$$\mathfrak{C}^{(2,4)} = [G_1 + P_{12} - \epsilon K_{12}, H_2] = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathfrak{C}^{(2,5)} = -P_{12}\mathfrak{C}^{(2,4)}P_{12} = [H_1, G_2 + P_{12} - \epsilon K_{12}] = 0, \quad (3.9)$$

отражают симметрию матрицы H или $\bar{H}$. Алгебра Ли действует на эти соотношения в присоединенном представлении. Мы можем переписать их в терминах лишь $\bar{G}$ и $\bar{H}$:

$$\bar{\mathfrak{C}}^{(2,4)} = [\bar{G}_1 + P_{12} - \epsilon K_{12}, \bar{H}_2] = 0, \quad (3.10)$$

$$\bar{\mathfrak{C}}^{(2,5)} = -P_{12}\bar{\mathfrak{C}}^{(2,4)}P_{12} = [\bar{H}_1, \bar{G}_2 + P_{12} - \epsilon K_{12}] = 0, \quad (3.11)$$

поскольку ϵ -симметричные части исчезают в силу предыдущих связей. По аналогии с равенствами (3.5) получаем, что

$$\bar{\mathfrak{C}}_L^{(2,4)} = K_{12}([\bar{G}_1, \bar{H}_2] - 2\beta\bar{H}_2), \quad \bar{\mathfrak{C}}_R^{(2,4)} = ([\bar{G}_1, \bar{H}_2] + 2\beta\bar{H}_2)K_{12}, \quad (3.12)$$

$$\bar{\mathfrak{C}}_L^{(2,5)} = K_{12}([\bar{H}_1, \bar{G}_2] + 2\beta\bar{H}_1), \quad \bar{\mathfrak{C}}_R^{(2,5)} = ([\bar{H}_1, \bar{G}_2] - 2\beta\bar{H}_1)K_{12}. \quad (3.13)$$

3.4. Антискмутатор, ϵ -антисимметричная часть матрицы H . Условие интегрируемости шестой связи можно получить посредством умножения (2.8) на $1 - \epsilon P_{12}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^{(2,6)}(1 - \epsilon P_{12}) &= \epsilon K_{12}([H_1, G_2] + [G_1, H_2] + 2\beta(H_1 - H_2)) = \\ &= \epsilon K_{12}(2(H_2 - H_1)P_{12} + 2\beta(H_1 - H_2) + \epsilon[K_{12}, H_2 - H_1]) = \\ &= \epsilon K_{12}(2\beta(H_2 - H_1) + 2\beta(H_1 - H_2) - \epsilon(H_2 - H_1)K_{12}) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Последнее слагаемое тождественно равно нулю, в то время как первые два взаимно уничтожаются. Таким образом, шестая связь интегрируема. Далее,

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon P_{12})\mathfrak{C}^{(2,6)}(1 + \epsilon P_{12}) - 2[K_{12}, \bar{H}_1\bar{G}_2 + \bar{H}_2\bar{G}_1 + \bar{G}_1\bar{H}_2 + \bar{G}_2\bar{H}_1 + g(\bar{G}_1^2 + \bar{G}_2^2)] &= \\ = K_{12}(2\bar{G}_1\bar{G}_2^2 + 2\bar{G}_1^2\bar{G}_2 - [\bar{G}_1^2, \bar{G}_2] - [\bar{G}_1, \bar{G}_2^2]) - \\ - (2\bar{G}_2\bar{G}_1^2 + 2\bar{G}_2^2\bar{G}_1 + [\bar{G}_1, \bar{G}_2^2] + [\bar{G}_1^2, \bar{G}_2])K_{12} &= \\ = K_{12}[\bar{G}_1, \bar{G}_2](2\bar{G}_2 - \bar{G}_2 - \bar{G}_1) - (\bar{G}_1 + \bar{G}_2 - 2\bar{G}_2)[\bar{G}_1, \bar{G}_2]K_{12} &= \\ = 2\beta(K_{12}(\bar{G}_2(\bar{G}_2 - \bar{G}_1) + (\bar{G}_1 - \bar{G}_2)\bar{G}_2)K_{12}) = 2\beta[K_{12}, \bar{G}_1^2 + \bar{G}_2^2]. \end{aligned}$$

Отметим, что в силу упомянутой выше интегрируемости $\mathfrak{C}^{(2,6)}$ данное соотношение не налагает дополнительных ограничений.

Итак, в силу шестого условия связи (2.8)

$$-2\bar{\mathfrak{C}}^{(2,6)} = [K_{12}, \bar{H}_1\bar{G}_1 + \bar{H}_2\bar{G}_2 + \bar{G}_1\bar{H}_1 + \bar{G}_2\bar{H}_2 - (\beta + g)(\bar{G}_1^2 + \bar{G}_2^2)] = 0. \quad (3.15)$$

Обозначим $F = \bar{H}\bar{G} + \bar{G}\bar{H}$, тогда из формулы (3.15) естественным образом вытекает, что

$$F = f + (g + \beta)\bar{G}^2 + \bar{F}, \quad K_{12}(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = 0 = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2)K_{12}. \quad (3.16)$$

С другой стороны, объединяя формулы (3.12), (3.13) и используя (3.2), (3.7), записываем равенства

$$\bar{\mathfrak{C}}_L^{(2,4)} + \bar{\mathfrak{C}}_L^{(2,5)} = K_{12}(\bar{H}_1\bar{G}_1 - \bar{H}_2\bar{G}_2 + \bar{G}_1\bar{H}_1 - \bar{G}_2\bar{H}_2 - 2\beta(\bar{H}_1 - \bar{H}_2)) = 0 \quad (3.17)$$

и аналогичные равенства для $\bar{\mathfrak{C}}_R^{(2,4)} + \bar{\mathfrak{C}}_R^{(2,5)}$. Они означают, что разность $F - 2\beta\bar{H}$ является ϵ -симметричной и $\bar{F} - 2\beta\bar{H} = \beta(g + \beta)\bar{G}$. Окончательно для шестой связи получаем, что

$$F - 2\beta\bar{H} = \bar{H}\bar{G} + \bar{G}\bar{H} - 2\beta\bar{H} = f + (g + \beta)(\bar{G}^2 + \beta\bar{G}). \quad (3.18)$$

Таким образом, бесследовая ϵ -симметричная часть антискмутатора матрицы $\bar{H}$ с $\bar{G}$ пропорциональна бесследовой ϵ -симметричной части $\bar{G}^2$, и $2\beta\bar{H}$ – ее ϵ -антисимметричная часть.

3.5. Коммутатор, ϵ -антисимметричная часть матрицы H . Рассмотрим теперь седьмую связь $\mathfrak{C}^{(2,7)}$:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{C}^{(2,7)} &= [H_1, H_2] + (\bar{G}_2 H_1 - H_2 \bar{G}_1) P_{12} - \epsilon K_{12} (\bar{G}_1 - \beta) H_2 + \epsilon H_2 (\bar{G}_1 - \beta) K_{12} + \\
 &+ g[P_{12} - \epsilon K_{12}, H_2] = [\bar{H}_1, \bar{H}_2] + \frac{1}{2}[\bar{H}_1, \bar{G}_2^2] + \frac{1}{2}[\bar{G}_1^2, \bar{H}_2] + \\
 &+ (\bar{G}_2 \bar{H}_1 - \bar{H}_2 \bar{G}_1) P_{12} + \frac{1}{2}(\bar{G}_2 \bar{G}_1^2 - \bar{G}_2^2 \bar{G}_1) P_{12} - \epsilon K_{12} (\bar{G}_1 - \beta) \left(\bar{H}_2 + \frac{1}{2} \bar{G}_2^2 \right) + \\
 &+ \epsilon \left(\bar{H}_2 + \frac{1}{2} \bar{G}_2^2 \right) (\bar{G}_1 - \beta) K_{12} + g \left[P_{12} - \epsilon K_{12}, \left(\bar{H}_2 + \frac{1}{2} \bar{G}_2^2 \right) \right] + \\
 &+ \frac{1}{2}[\bar{G}_1^2, \bar{G}_2^2] - h[P_{12} - \epsilon K_{12}, \bar{G}_2] = \\
 &= [\bar{H}_1, \bar{H}_2] - \frac{1}{4}[P_{12} - \epsilon K_{12}, \bar{G}_2^3 + 2\{\bar{H}_2, \bar{G}_2\} - 4g\bar{H}_2 - 2g\bar{G}_2^2 + 4h\bar{G}_2] + \\
 &+ \frac{1}{4}(\bar{G}_2 \bar{G}_1^2 - \bar{G}_2^2 \bar{G}_1) P_{12} + \frac{\epsilon}{4}(\bar{G}_2^2 K_{12} \bar{G}_2 - \bar{G}_2 \bar{K}_{12} \bar{G}_2^2). \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство (3.18), мы видим, что $\bar{H}$ входит только в первые два слагаемых.

Рассмотрим теперь тензор (фигурные скобки обозначают антикоммутатор)

$$\begin{aligned}
 W^{a_2}_{dc_1c_2} &= (\bar{G}^{a_2}_d + \epsilon \delta_d^{a_2}) \bar{G}_{c_1c_2} + (\bar{G}^{a_2}_{c_2} + \epsilon \delta_{c_2}^{a_2}) \bar{G}_{dc_1} + (\bar{G}^{a_2}_{c_1} + \epsilon \delta_{c_1}^{a_2}) \bar{G}_{c_2d} = \\
 &= \frac{1}{2}(\{\bar{G}^{a_2}_d, \bar{G}_{c_1c_2}\} + \{\bar{G}^{a_2}_{c_2}, \bar{G}_{dc_1}\} + \{\bar{G}^{a_2}_{c_1}, \bar{G}_{c_2d}\}). \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Слагаемые в первой строке формулы (3.20) с использованием абстрактной записи для $W^{a_2 a_1}_{c_1 c_2} = W^{a_2}_{dc_1c_2} \epsilon^{da_1}$ имеют следующий вид:

$$W_{12} = -\bar{G}_2(P_{12} - \epsilon K_{12})\bar{G}_2 - \epsilon(P_{12} - \epsilon K_{12})\bar{G}_2 + (\epsilon \bar{G}_2 + 1)\bar{G}_1. \tag{3.21}$$

Оператор W_{12} уничтожается матрицей K_{12} :

$$W_{12}K_{12} = 0 = K_{12}W_{12}; \tag{3.22}$$

в матричной записи это означает, что свертка $W^{a_2 a_1}_{c_1 c_2}$ по любой паре индексов равна нулю. Аналогично, оператор W_{12} уничтожается матрицей $P_{12} + \epsilon$:

$$W_{12}P_{12} = P_{12}W_{12} = -\epsilon W_{12}. \tag{3.23}$$

Рассмотрим коммутатор

$$[\bar{G}_2, W_{12}] = (\bar{G}_2 \bar{G}_1^2 - \bar{G}_2^2 \bar{G}_1) P_{12} + \epsilon(\bar{G}_2^2 K_{12} \bar{G}_2 - \bar{G}_2 K_{12} \bar{G}_2^2) + [P_{12} - \epsilon K_{12}, \epsilon \bar{G}_2^2 + \bar{G}_2]. \tag{3.24}$$

Сравнивая его с (3.19), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{C}^{(2,7)} &= [\bar{H}_1, \bar{H}_2] + g[P_{12} - \epsilon K_{12}, \bar{H}_2] - \frac{1}{4}(\bar{G}_2 W_{12} - W_{12} \bar{G}_2) - \\
 &- \frac{1}{4}[P_{12} - \epsilon K_{12}, \bar{G}_2^3 + (2\beta + \epsilon)\bar{G}_2^2 + (4h + 1)\bar{G}_2]. \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Вычислим теперь свертку

$$\begin{aligned} K_{12}\bar{G}_2W_{12} &= K_{12}\bar{G}_2(-\bar{G}_2(P_{12} - \epsilon K_{12})\bar{G}_2 - \epsilon(P_{12} - \epsilon K_{12})\bar{G}_2 + (\epsilon\bar{G}_2 + 1)\bar{G}_1) = \\ &= K_{12}(\epsilon(-[\bar{G}_1, \bar{G}_2^2] + \bar{G}_1\bar{G}_2^2 - \bar{G}_1\bar{G}_2^2 - [\bar{G}_1, \bar{G}_2]\bar{G}_2) + m_2\bar{G}_2 - [\bar{G}_1, \bar{G}_2]) = \\ &= -2\epsilon K_{12}\left(\bar{G}_2^3 + (2\beta + \epsilon)\bar{G}_2^2 + \epsilon\left(2\beta - \frac{m_2}{2}\right)\bar{G}_2 - \frac{m_2}{2}\right) \equiv -2\epsilon K_{12}\chi_2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Применяя рассуждения, аналогичные проведенным выше, получаем равенство

$$W_{12}\bar{G}_2K_{12} = -2\epsilon\chi_2K_{12}, \quad (3.27)$$

где χ – уже встречавшийся бесследовый полином третьего порядка по $\bar{G}$:

$$\chi = \bar{G}^3 + (2\beta + \epsilon)\bar{G}^2 + \epsilon\left(2\beta - \frac{m_2}{2}\right)\bar{G} - \frac{m_2}{2} = \frac{1}{2}(\bar{G}^3 - \epsilon\bar{G}^{3t}) - \left(2\beta^2 - \epsilon\beta + \frac{m_2}{2}\right)\bar{G}.$$

Его можно переписать в терминах ϵ -антисимметричной части матрицы $\bar{G}^3$. В результате получаем, что седьмая связь (2.9) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^{(2,7)} &= [\bar{H}_1 + g(P_{12} - \epsilon K_{12}), \bar{H}_2] - \frac{1}{4}[G_2, W_{12}] - \frac{1}{4}[P_{12} - \epsilon K_{12}, \chi_2 + \alpha\bar{G}_2] = \\ &= [\bar{H}_1 + g(P_{12} - \epsilon K_{12}), \bar{H}_2] - \frac{1}{4}[\bar{G}_2, W_{12}] + \frac{\alpha}{4}[\bar{G}_1, \bar{G}_2] - \\ &\quad - \frac{1}{8}K_{12}[\bar{G}_2, W_{12}] - \frac{1}{8}[\bar{G}_2, W_{12}]K_{12} - \frac{1}{4}[P_{12}, \chi_2]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Наконец, последняя восьмая связь (2.10) сводится к линейной комбинации предыдущих выражений:

$$\mathfrak{C}^{(2,8)}(1 - \epsilon P_{12}) = \epsilon K_{12}\mathfrak{C}^{(2,7)} + \frac{1}{2}\mathfrak{C}^{(2,6)}(K_{12} - \epsilon n). \quad (3.29)$$

Таким образом, шестая и седьмая связи приводят к следующим условиям для ϵ -антисимметричной части H : антикоммутатор H с $\bar{G}$ и коммутаторы их элементов соответствуют выражениям, записанным в терминах G . В этих выражениях присутствует кубический полином по $\bar{G}$. Сравнивая с решением первого порядка, когда бесследовая ϵ -симметричная часть матрицы $\bar{G}^2$ обращается в ноль, здесь мы видим, что именно данный член определяет ϵ -симметричную часть матрицы H и антикоммутатор ϵ -антисимметричной части матрицы H . Более того, коммутаторы элементов матрицы $\bar{H}$ приводят к ограничениям на ϵ -антисимметричную часть матрицы $\bar{G}^3$.

Благодарности. Авторы признательны А. П. Исаеву за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи. I”, *ТМФ*, **40:2** (1979), 194–220.
- [2] В. О. Тарасов, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Локальные гамильтонианы для интегрируемых квантовых моделей на решетке”, *ТМФ*, **57:2** (1983), 163–181.

- [3] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform method. Recent developments”, *Integrable Quantum Field Theories* (Tvärminne, Finland, 23–27 March, 1981), Lecture Notes in Physics, **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, Springer, Berlin, Heidelberg, 1982, 61–119.
- [4] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Quantum Symmetries/Symétries Quantiques*, Lectures given at the Les Houches Summer School on Theoretical Physics, Session LXIV (Les Houches, France, 1 August – 8 September, 1995), eds. A. Connes, K. Kawedzki, J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–211, arXiv: hep-th/9605187.
- [5] В. Г. Дринфельд, “Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера”, *Докл. АН СССР. Сер. физ.*, **283**:5 (1985), 1060–1064.
- [6] В. Г. Дринфельд, “Квантовые группы”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*. VIII, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **155**, Наука, Л., 1986, 18–49.
- [7] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, “Factorized S -Matrices in two-dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field models”, *Ann. Phys.*, **120**:2 (1979), 253–291; Ал. Б. Замоладчиков, *Факторизованное рассеяние в асимптотически-свободных двумерных моделях квантовой теории поля*, Дис. . . . доктора физ.-матем. наук, ОИЯИ, Дубна, 1979.
- [8] B. Berg, M. Karowski, P. Weisz, V. Kurak, “Factorized $U(n)$ symmetric S matrices in two-dimensions”, *Nucl. Phys. B*, **134**:1 (1978), 125–132.
- [9] Н. Ю. Решетихин, “Интегрируемые модели квантовых одномерных магнетиков с $O(n)$ - и $Sp(2k)$ -симметрией”, *ТМФ*, **63**:3 (1985), 347–366.
- [10] A. P. Isaev, *Quantum groups and Yang–Baxter equations*, preprint 2004-132, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 2004, http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/serien/e/mpi_mathematik/2004/132.pdf.
- [11] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантование групп Ли и алгебр Ли”, *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178–206.
- [12] R. Shankar, E. Witten, “The S matrix of the kinks of the $(g\psi)^2$ model”, *Nucl. Phys. B*, **141**:4 (1978), 349–363; Erratum, **148**:3–4 (1979), 538–539.
- [13] D. Chicherin, S. Derkachov, A. P. Isaev, “Conformal group: R -matrix and star-triangle relation”, *JHEP*, **04** (2013), 020, 49 pp., arXiv:1206.4150; “The spinorial R -matrix”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:48 (2013), 485201, 21 pp., arXiv:1303.4929.
- [14] A. P. Isaev, D. Karakhanyan, R. Kirschner, “Orthogonal and symplectic Yangians and Yang–Baxter R operators”, *Nucl. Phys. B*, **904** (2016), 124–147, arXiv:1511.06152.
- [15] D. Karakhanyan, R. Kirschner, “Yang–Baxter relations with orthogonal or symplectic symmetry”, *J. Phys. Conf. Ser.*, **670**:1 (2016), 012029, 7 pp.