Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Такаги, Новая обобщенная теорема Вика в конформной теории поля, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 2, 335–347

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:19:43

© 2017 г.

Т. Такаги*

НОВАЯ ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ВИКА В КОНФОРМНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Излагается новая обобщенная теорема Вика для взаимодействующих полей в двумерной конформной теории поля. Кратко обсуждается ее связь с тождеством Борхердса и ее вывод аналитическим методом. Также представлены вычисления операторных разложений путем использования обобщенной теоремы Вика, содержащей фермионные поля.

Ключевые слова: операторное разложение, вертексная алгебра, тождество Борхердса, фермионные поля.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9297>

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известная обобщенная теорема Вика для взаимодействующих полей в двумерной конформной теории поля (КТП) была впервые сформулирована в 1988 г. в работе [1], более точное ее описание можно найти в стандартном учебнике по КТП [2]. Эта теорема формулируется следующим образом:

$$\overline{A(z)(BC)(w)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{x-w} \{ \overline{A(z)B(x)C(w)} + B(x)\overline{A(z)C(w)} \}. \quad (1)$$

Здесь A , B и т. д. суть операторы киральных конформных полей,

$$(BC)(w) = :B(w)C(w):$$

означает нормально упорядоченное произведение, $\overline{A(z)B(x)}$ – спаривание, т. е. сингулярная часть операторного разложения и C_w – окружающий точку w контур исчезающе малого радиуса.

Данная работа была поддержана Japan Society for the Promotion of Science (грант KAKENHI JP25400122).

*Department of Applied Physics, National Defense Academy, Kanagawa, Japan.
E-mail: takagi@nda.ac.jp

Возникает естественный вопрос, существует ли аналогичное выражение для спаривания $\overline{(AB)(z)C(w)}$, в котором нормально упорядоченное произведение операторов стоит слева, а взятый отдельно оператор – справа. Насколько известно автору, пока никто не дал корректного ответа на этот вопрос. Мы попытались найти этот ответ и получили следующее выражение [3]:

$$\overline{(AB)(z)C(w)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \{ : A(x) \overline{B(x)C(w)} : + B(x) \overline{A(x)C(w)} \}. \quad (2)$$

Здесь нормальное упорядочение в первом слагаемом под интегралом нужно для того, чтобы отбросить сингулярные члены, которые возникают в операторном разложении оператора $A(x)$ с коэффициентами спаривания, стоящими справа от него. Заметим, что даже в (1) можно заменить второе слагаемое на $: B(x) \overline{A(z)C(w)} :$, отчего две формулы становятся более очевидно схожими, но этого обычно не делают, потому что сингулярные члены автоматически отбрасываются в результате интегрирования в (1). Весьма примечательно, что эта действительно простая формула до сих пор не найдена, хотя прошло уже более чем 25 лет после формулировки теоремы (1).

В разделе 2 мы кратко описываем доказательство обобщенной теоремы Вика (2), которое основано на тождестве Борчердса. Также мы приводим набросок ее доказательства аналитическим методом. В разделе 3 мы приводим примеры вычисления операторных разложений путем использования обобщенной теоремы Вика, содержащей фермионные поля. В целях упрощения изложения почти все строгие математические рассуждения опущены, интересующийся читатель может найти их в работе [3].

2. ТЕОРЕМА ВИКА КАК ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ ТОЖДЕСТВА БОРЧЕРДСА

2.1. Обозначения. Чтобы математически описать двумерные киральные квантовые поля, воспользуемся формулировкой Мацуо и Нагамото [4]. Запишем оператор $A(y)$ как формальный степенной ряд и выделим в нем положительную и отрицательную части:

$$A(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n y^{-n-1} = \left(\sum_{n \geq 0} + \sum_{n < 0} \right) A_n y^{-n-1} = A(y)_+ + A(y)_-. \quad (3)$$

Здесь коэффициенты A_n представляют собой линейные преобразования в некотором векторном пространстве M . Нормально упорядоченное произведение операторов $A(y)$ и $B(z)$ определяется как

$$: A(y)B(z) : = A(y)_- B(z) + B(z) A(y)_+. \quad (4)$$

Далее окажется, что оно регулярно при $y = z$ в некотором смысле.

Теперь мы хотим сделать важное замечание, касающееся так называемого n -го произведения. Оно задается следующей формулой для неотрицательного n :

$$A(z)_{(n)} B(z) = \operatorname{Res}_{y=0} [A(y), B(z)] (y-z)^n. \quad (5)$$

При этом спаривание может быть определено как

$$\overline{A(y)}B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(z)_{(n)}B(z)}{(y-z)^{n+1}}. \quad (6)$$

Мы имеем следующее операторное разложение в области $|y| > |z|$:

$$A(y)B(z) = \overline{A(y)}B(z) + :A(y)B(z):. \quad (7)$$

Слегка модифицируя выражение (5), мы можем также задать n -е произведения для отрицательных n , в частности мы нередко будем пользоваться тем, что (-1) -е произведение равно нормально упорядоченному произведению:

$$A(z)_{(-1)}B(z) = :A(z)B(z):.$$

Заметим, что мы часто будем использовать определение (5) даже для отрицательных n , понимая его просто как сокращенное обозначение.

2.2. Тождество Борчердса. Запишем сначала обычное тождество Якоби:

$$[[A, B], C] = [A, [B, C]] - [B, [A, C]]. \quad (8)$$

Из него Мацуо и Нагамото вывели тождество

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (A_{(r+i)}B)_{(p+q-i)}C = \\ = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} (A_{(p+r-i)}(B_{(q+i)}C) - (-1)^r B_{(q+r-i)}(A_{(p+i)}C)). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь мы опустили аргументы операторов, которые в дальнейшем полагаем равными w . Маленькие скобки в нижних индексах означают, что мы берем произведение дважды. Это так называемое тождество Борчердса, известное как одна из аксиом вертексной алгебры [5]. Мацуо и Нагамото доказали, что оно верно для всех целых p, q, r , если сделать предположение о том, что квантовые поля обладают неким свойством, названным локальностью.

2.3. Некоммутативная формула Вика, полученная Кацем. Рассмотрим частный случай тождества при $r = 0$ и $q = -1$ для неотрицательных p :

$$A_{(p)}(B_{(-1)}C) = (A_{(p)}B)_{(-1)}C + B_{(-1)}(A_{(p)}C) + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} (A_{(i)}B)_{(p-i-1)}C. \quad (10)$$

В своей знаменитой книге [6] Кац получил это тождество своим методом и назвал его “некоммутативная формула Вика”. Как указал Кац, для свободных полей последнее слагаемое исчезает и формула сводится к обычной теореме Вика для свободных полей. Также он отметил ее эквивалентность обобщенной формуле Вика (1). Доказательство этой эквивалентности можно найти в работе [3].

2.4. Алгебраическое доказательство новой обобщенной теоремы Вика.

Покажем, что наша новая обобщенная теорема Вика (2) эквивалентна еще одному частному случаю тождества Борчердса. Начнем с некоторых формул. Нетрудно доказать, что для любого целого n

$$\partial A(w)_{(n)} B(w) = -n A(w)_{(n-1)} B(w).$$

Заменяя n на $-n$ и используя данное соотношение, мы получаем

$$n! A_{(-n-1)} B = (n-1)! \partial A_{(-n)} B = (n-2)! \partial^2 A_{(-n+1)} B = \cdots = \partial^n A_{(-1)} B,$$

следовательно, для любого неотрицательного целого n

$$: \partial^{(n)} AB : = A_{(-n-1)} B. \quad (11)$$

Здесь $\partial^{(n)} = \partial^n / n!$. Теперь первое слагаемое $: A(x) \overline{B(x)} C(w) :$ под интегралом в нашей формуле (2) может быть записано как

$$: A(x) \overline{B(x)} C(w) : = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A(x) (B(w)_{(i)} C(w))}{(x-w)^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{(-j-1)} (B_{(i)} C)}{(x-w)^{i-j+1}}. \quad (12)$$

Здесь мы заменили оператор $A(x)$ его разложением Тейлора в окрестности точки w и затем использовали формулу (11). После умножения на $(z-x)^{-1}$ и интегрирования в окрестности точки w по x выживают только сингулярные члены. Затем мы заменяем все x на z . Положив $i = q + j$, в итоге получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \{ : A(x) \overline{B(x)} C(w) : \} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \frac{A_{(-j-1)} (B_{(i)} C)}{(z-w)^{i-j+1}} = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{(-j-1)} (B_{(q+j)} C)}{(z-w)^{q+1}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим второе слагаемое в подынтегральном выражении в нашей формуле (2). Выделим в нем сингулярную и регулярную части:

$$B(x) \overline{A(x)} C(w) = \underbrace{B(x) \overline{A(x)} C(w)}_{\text{сингулярная}} + : B(x) \overline{A(x)} C(w) :. \quad (14)$$

В силу тех же аргументов, что и выше, после взятия интеграла мы получаем для этого слагаемого выражение

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{(j)} (A_{(i)} C)}{(z-w)^{i+j+2}} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \frac{B_{(-j-1)} (A_{(i)} C)}{(z-w)^{i-j+1}}. \quad (15)$$

Мы можем объединить эти две суммы в одну, заменяя индекс суммирования j в первой сумме на $-j-1$. Положив затем $j = q - i - 1$, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \{ B(x) \overline{A(x)} C(w) \} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i-1}^{\infty} \frac{B_{(j)} (A_{(i)} C)}{(z-w)^{i+j+2}} = \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_{(q-i-1)} (A_{(i)} C)}{(z-w)^{q+1}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из полученных результатов мы находим, что наша новая обобщенная теорема Вика (2) эквивалентна следующему утверждению:

$$(A_{(-1)}B)_{(q)}C = \sum_{i=0}^{\infty} (A_{(-i-1)}(B_{(q+i)}C) + B_{(q-i-1)}(A_{(i)}C)). \quad (17)$$

Как можно видеть, это соотношение есть не что иное, как частный случай тождества Борчердса при $p = 0$, $r = -1$.

2.5. Аналитическое доказательство новой обобщенной теоремы Вика.

Как показано выше, получив выражение для нашей новой обобщенной теоремы Вика, можно проверить ее справедливость путем простого вычисления интегралов и последующего сравнения с тождеством Борчердса. Однако возникает естественный вопрос: каким образом можно прийти к данному выражению? В оставшейся части данного раздела мы намерены дать ответ на этот вопрос. Мы приводим набросок доказательства нашей новой формулы с помощью аналитического метода.

По определению вложенное произведение $(A_{(-1)}B)_{(p)}C$ задается как дважды взятый вычет вложенного коммутатора. Перепишем это выражение, используя контурный интеграл:

$$\begin{aligned} (A_{(-1)}B)_{(p)}C &= \operatorname{Res}_{x=0} \operatorname{Res}_{y=0} [[A(y), B(x)], C(w)](y-x)^{-1}(x-w)^p = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \left\{ \oint_{C_3} dx \oint_{C_4} dy - \oint_{C_4} dx \oint_{C_3} dy - \oint_{C_1} dx \oint_{C_2} dy + \oint_{C_2} dx \oint_{C_1} dy \right\} A(y)B(x)C(w) \times \\ &\quad \times \frac{(x-w)^p}{y-x}. \end{aligned}$$

Здесь четыре слагаемых возникают из разложения вложенного коммутатора. Контуры $C_{1,2,3,4}$ суть окружности с центром в начале координат и возрастающими радиусами, причем точка w лежит между C_2 и C_3 .

Пусть контуры C_3 и C_4 стягиваются к C_1 и C_2 соответственно, так что они взаимно уничтожают друг друга. Но, конечно, при такой деформации они захватывают сингулярность в точке w . В результате мы имеем следующее выражение:

$$(A_{(-1)}B)_{(p)}C = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \left\{ \oint_{C_w^>} dy \oint_{C_w^<} dx - \oint_{C_w^>} dx \oint_{C_w^<} dy \right\} A(y)B(x)C(w) \frac{(x-w)^p}{y-x};$$

контуры $C_w^>$ and $C_w^<$ показаны на рис 1. Умножая на $(z-w)^{-p-1}$ и суммируя по p от нуля до бесконечности, мы получаем

$$\begin{aligned} \overline{(AB)}(z)C(w) &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \left\{ \oint_{C_w^>} dy \oint_{C_w^<} dx - \oint_{C_w^>} dx \oint_{C_w^<} dy \right\} A(y)B(x)C(w) \times \\ &\quad \times \frac{1}{(y-x)(z-x)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала второе слагаемое. С учетом общего знака минус внутренний интеграл задается выражением

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w^<} \frac{dy}{x-y} A(y)B(x)C(w) = B(x) \overline{A(x)}C(w).$$

Рис. 1. Деформация контуров.

Так как этот интеграл берется по переменной y вокруг точки w , он захватывает сингулярную часть операторного разложения произведения $A(y)C(w)$ и затем заменяет y на x . В итоге получается результат, приведенный выше. После взятия внешнего интеграла по x мы получаем второе слагаемое в нашей обобщенной теореме Вика.

Теперь рассмотрим первое слагаемое. Запишем множитель $(y-x)^{-1}(z-x)^{-1}$ в виде разности:

$$\frac{1}{(y-x)(z-x)} = \frac{1}{z-y} \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{z-x} \right).$$

Тогда внутренний интеграл по x принимает вид

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\oint_{C_w^<} \frac{dx}{y-x} - \oint_{C_w^>} \frac{dx}{z-x} \right) A(y)B(x)C(w) = A(y)\overline{B(y)C(w)} - A(y)\overline{B(z)C(w)}.$$

В точности так же, как при предыдущих расчетах, получаем результат интегрирования, аналогичный выписанному выше. Рассмотрим внешний интеграл по y :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dy}{z-y} (A(y)\overline{B(y)C(w)} - A(y)\overline{B(z)C(w)}) &= \\ = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dy}{z-y} : A(y)\overline{B(y)C(w)} : . \end{aligned}$$

Регулярная часть второго слагаемого исчезает, поскольку она не имеет сингулярности при $y = w$. Сингулярные части первого и второго слагаемых после интегрирования взаимно сокращаются. Таким образом, остается только регулярная часть первого слагаемого, как и выше. Заменяя y на x , мы получаем первое слагаемое в нашей обобщенной теореме Вика (2).

2.6. Пример 1: свободные бозоны. Пусть $J(z)$ – ток свободных бозонных полей, удовлетворяющий уравнению

$$J(z)J(w) = \frac{1}{(z-w)^2} + :J(z)J(w):.$$

Определим тензор энергии-импульса как

$$T(z) = \frac{1}{2} :J(z)J(z): = \frac{1}{2} (JJ)(z).$$

Тогда, используя тождество (1), мы имеем

$$\begin{aligned}\overline{J(z)T}(w) &= \frac{1}{2} \overline{J(z)(JJ)}(w) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{x-w} \left\{ \frac{1}{(z-x)^2} J(w) + J(x) \frac{1}{(z-w)^2} \right\} = \frac{J(w)}{(z-w)^2}.\end{aligned}$$

С учетом тождества (2) получаем

$$\begin{aligned}\overline{T(z)T}(w) &= \frac{1}{2} (\overline{JJ})(z) \overline{T}(w) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ J(x) \frac{J(w)}{(x-w)^2} + J(x) \frac{J(w)}{(x-w)^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ \frac{1}{(x-w)^4} + \frac{2:J(x)J(w):}{(x-w)^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2(JJ)(w)}{(z-w)^2} + \frac{2:\partial J(w)J(w):}{z-w} \right\} = \\ &= \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}.\end{aligned}$$

Это операторное разложение КТП с центральным зарядом $c = 1$. В ходе преобразований мы использовали соотношение

$$:\partial J(w)J(w): = :J(w)\partial J(w):,$$

справедливое в силу следующей формулы кососимметричности [4]:

$$B(z)_{(m)}A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{m+i+1} \partial^{(i)}(A(z)_{(m+i)}B(z)). \quad (18)$$

3. ПРИМЕНЕНИЯ К ОПЕРАТОРНОМУ РАЗЛОЖЕНИЮ ДЛЯ ФЕРМИОННЫХ ПОЛЕЙ

3.1. Расширение обобщенной теоремы Вика на случай присутствия фермионных полей. Пусть $p(A)$ – четность произвольного поля A , т.е. $p(A) = 0$ ($p(A) = 1$), если A – бозонное (соответственно фермионное) поле [6]. При включении фермионных полей обобщенную теорему Вика следует расширить до

$$\overline{A(z)(BC)}(w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{x-w} \{ \overline{A(z)B}(x)C(w) + (-1)^{p(A)p(B)} B(x)\overline{A(z)C}(w) \}, \quad (19)$$

$$(\overline{AB})(z)C(w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \{ :A(x)\overline{B(x)C}(w): + (-1)^{p(A)p(B)} B(x)\overline{A(x)C}(w) \}. \quad (20)$$

Далее мы приведем два наиболее простых, но нетривиальных примера, чтобы проиллюстрировать справедливость этих соотношений.

3.2. Пример 2: свободные фермионы. Пусть $\psi(z)$ – поле свободных фермионов, удовлетворяющее уравнению

$$\psi(z)\psi(w) = \frac{1}{z-w} + : \psi(z)\psi(w) : . \quad (21)$$

Определим тензор энергии-импульса $T(z)$ как

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \psi(z) \partial \psi(z) : . \quad (22)$$

С помощью соотношения (19) мы получаем

$$\begin{aligned} \overline{\psi(z)T(w)} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{x-w} \{ \overline{\psi(z)\psi(x)} \partial \psi(w) - \psi(x) \overline{\psi(z)} \partial \psi(w) \} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{x-w} \left\{ \frac{\partial \psi(w)}{z-x} - \frac{\psi(x)}{(z-w)^2} \right\} = \\ &= \frac{\psi(w)/2}{(z-w)^2} - \frac{\partial \psi(w)/2}{z-w} , \end{aligned} \quad (23)$$

следовательно,

$$\partial \overline{\psi(z)T(w)} = -\frac{\psi(w)}{(z-w)^3} + \frac{\partial \psi(w)/2}{(z-w)^2}. \quad (24)$$

Далее с помощью соотношения (20) мы получаем

$$\overline{T(z)T(w)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \{ : \psi(x) \partial \overline{\psi(x)T(w)} : - \partial \psi(x) \overline{\psi(x)T(w)} \}. \quad (25)$$

Два слагаемых в подынтегральном выражении можно записать как

$$: \psi(x) \partial \overline{\psi(x)T(w)} : = \frac{: \psi(w)\psi(x) :}{(x-w)^3} + \frac{1}{2} \frac{: \psi(x) \partial \psi(w) :}{(x-w)^2}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} -\partial \psi(x) \overline{\psi(x)T(w)} &= \frac{-1/2}{(x-w)^2} \partial \psi(x) \psi(w) + \frac{1/2}{x-w} \partial \psi(x) \partial \psi(w) = \\ &= \frac{-1/2}{(x-w)^4} + \frac{1}{2} \frac{: \psi(w) \partial \psi(x) :}{(x-w)^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(x) \partial \psi(w)}{x-w}. \end{aligned} \quad (27)$$

Суммируя их и разлагая числители в окрестности точки $x-w$, мы получаем

$$\begin{aligned} : \psi(x) \partial \overline{\psi(x)T(w)} : - \partial \psi(x) \overline{\psi(x)T(w)} &= \\ &= \frac{-1/2}{(x-w)^4} + \frac{2 : \psi(w) \partial \psi(w) :}{(x-w)^2} + \frac{: \psi(w) \partial^2 \psi(w) :}{x-w} + \dots , \end{aligned} \quad (28)$$

где многоточием обозначены члены, регулярные при $x=w$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{T(z)T(w)} &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{-1/2}{(z-w)^4} + \frac{2 : \psi(w) \partial \psi(w) :}{(z-w)^2} + \frac{: \psi(w) \partial^2 \psi(w) :}{z-w} \right\} = \\ &= \frac{1/4}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}. \end{aligned} \quad (29)$$

Это операторное разложение КТП с центральным зарядом $c = 1/2$.

Можно также использовать соотношение (20), чтобы вычислить

$$\begin{aligned} \overline{T(z)}\psi(w) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ : \psi(x) \partial \overline{\psi(x)} \psi(w) : - \partial \psi(x) \overline{\psi(x)} \psi(w) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial \psi(w)}{z-w}, \end{aligned} \quad (30)$$

где подразумевается, что $\psi(w)$ – примарное поле с конформной размерностью $1/2$. Данная формула верна, поскольку разность в подынтегральном выражении можно записать как

$$\begin{aligned} : \psi(x) \partial \overline{\psi(x)} \psi(w) : - \partial \psi(x) \overline{\psi(x)} \psi(w) &= -\frac{\psi(x)}{(x-w)^2} - \frac{\partial \psi(x)}{x-w} = \\ &= -\frac{\psi(w)}{(x-w)^2} - \frac{2 \partial \psi(w)}{x-w} + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

3.3. Пример 3: система духов. В этом пункте мы применяем обобщенные теоремы Вика (19), (20) к так называемой системе духов (b, c) [2], [7]–[9].

Пусть b, c – пара фермионных полей, удовлетворяющих уравнениям

$$\overline{b(z)}b(w) = 0, \quad \overline{c(z)}c(w) = 0, \quad \overline{b(z)}c(w) = \frac{1}{z-w}. \quad (32)$$

Введем обозначения

$$J(z) = : b(z)c(z) :, \quad A(z) = : b'(z)c(z) :, \quad B(z) = - : b(z)c'(z) :. \quad (33)$$

С учетом соотношения (19) имеем

$$\overline{b(z)}J(w) = -\frac{b(w)}{z-w}, \quad \overline{c(z)}J(w) = \frac{c(w)}{z-w}, \quad (34)$$

кроме того,

$$\begin{aligned} \overline{b(z)}A(w) &= -\frac{b'(w)}{z-w}, & \overline{b(z)}B(w) &= \frac{b(w)}{(z-w)^2}, \\ \overline{c(z)}A(w) &= \frac{c(w)}{(z-w)^2}, & \overline{c(z)}B(w) &= -\frac{c'(w)}{z-w}. \end{aligned} \quad (35)$$

Отсюда с помощью соотношений (20) и (34) получаем

$$\begin{aligned} \overline{J(z)}J(w) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ : b(x) \overline{c(x)} J(w) : - c(x) \overline{b(x)} J(w) \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ \frac{b(x)c(w)}{x-w} + \frac{c(x)b(w)}{x-w} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ \frac{1}{(x-w)^2} + \frac{b(x)c(w) + c(x)b(w)}{x-w} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ \frac{1}{(x-w)^2} + \frac{b(w)c(w) + c(w)b(w)}{x-w} + \dots \right\} = \\ &= \frac{1}{(z-w)^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, $J(z)$ – бозонный ток.

Также, используя (20), имеем

$$\begin{aligned}\overline{A(z)b(w)} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ :b'(x)\overline{c(x)b(w)}: - c(x)\overline{b'(x)b(w)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \frac{b'(x)}{x-w} = \frac{b'(w)}{z-w},\end{aligned}\quad (37)$$

$$\begin{aligned}\overline{B(z)b(w)} &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ :b(x)\overline{c'(x)b(w)}: - c'(x)\overline{b(x)b(w)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \frac{b(x)}{(x-w)^2} = \frac{b(w)}{(z-w)^2} + \frac{b'(w)}{z-w},\end{aligned}\quad (38)$$

$$\begin{aligned}\overline{A(z)c(w)} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ :b'(x)\overline{c(x)c(w)}: - c(x)\overline{b'(x)c(w)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \frac{c(x)}{(x-w)^2} = \frac{c(w)}{(z-w)^2} + \frac{c'(w)}{z-w},\end{aligned}\quad (39)$$

$$\begin{aligned}\overline{B(z)c(w)} &= \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ :b(x)\overline{c'(x)c(w)}: - c'(x)\overline{b(x)c(w)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \frac{c'(x)}{x-w} = \frac{c'(w)}{z-w}.\end{aligned}\quad (40)$$

Тем же способом получаем, что

$$\begin{aligned}\overline{A(z)J(w)} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ :b'(x)\overline{c(x)J(w)}: - c(x)\overline{b'(x)J(w)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ :b'(x)c(w): - \frac{c(x)b(w)}{(x-w)^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ :b'(x)c(w): - \frac{1}{(x-w)^3} + \frac{:b(w)c(x):}{(x-w)^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ -\frac{1}{(x-w)^3} + \frac{:b(w)c(w):}{(x-w)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{:b'(w)c(w): + :b(w)c'(w):}{x-w} + \dots \right\} = \\ &= \frac{-1}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{J'(w)}{z-w},\end{aligned}\quad (41)$$

$$\begin{aligned}\overline{B(z)J(w)} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ -:b(x)\overline{c'(x)J(w)}: + c'(x)\overline{b(x)J(w)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ :b(x)c(w): - \frac{c'(x)b(w)}{x-w} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ :b(x)c(w): + \frac{1}{(x-w)^3} - \frac{:c'(x)b(w):}{x-w} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ \frac{1}{(x-w)^3} + \frac{:b(w)c(w):}{(x-w)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{:b'(w)c(w): + :b(w)c'(w):}{x-w} + \dots \right\} = \\ &= \frac{1}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{J'(w)}{z-w}.\end{aligned}\quad (42)$$

Положим для любого $\lambda \in \mathbb{C}$

$$T(z) = (1 - \lambda)A(z) + \lambda B(z) = (1 - \lambda) : b'(z)c(z) : - \lambda : b(z)c'(z) : . \quad (43)$$

Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned} \overline{T(z)b(w)} &= \frac{\lambda}{(z-w)^2} b(w) + \frac{1}{z-w} b'(w), \\ \overline{T(z)c(w)} &= \frac{(1-\lambda)}{(z-w)^2} c(w) + \frac{1}{z-w} c'(w), \end{aligned} \quad (44)$$

а также равенство

$$\overline{T(z)J(w)} = \frac{2\lambda - 1}{(z-w)^3} + \frac{1}{(z-w)^2} J(w) + \frac{1}{z-w} J'(w). \quad (45)$$

Следовательно, по отношению к введенному выше тензору энергии-импульса $T(z)$ поля b и c ведут себя как примарные поля с конформными размерностями λ и $1 - \lambda$ соответственно. Ток J имеет конформную размерность 1, но не является примарным полем, за исключением случая $\lambda = 1/2$ [9].

Теперь, используя (20) и (35), мы получаем

$$\begin{aligned} \overline{A(z)A(w)} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ : b'(x) \overline{c(x)A(w)} : - c(x) \overline{b'(x)A(w)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ : b'(x)c(w) : - \frac{c(x)b'(w)}{(x-w)^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ -\frac{1}{(x-w)^4} + \frac{: b'(x)c(w) : + : b'(w)c(x) :}{(x-w)^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ -\frac{1}{(x-w)^4} + \frac{2 : b'(w)c(w) :}{(x-w)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{: b''(w)c(w) : + : b'(w)c'(w) :}{x-w} + \dots \right\} = \\ &= -\frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2A(w)}{(z-w)^2} + \frac{A'(w)}{z-w}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \overline{A(z)B(w)} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ : b'(x) \overline{c(x)B(w)} : - c(x) \overline{b'(x)B(w)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ -\frac{: b'(x)c'(w) :}{x-w} + \frac{2c(x)b(w)}{(x-w)^3} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ \frac{2}{(x-w)^4} - \frac{2 : b(w)c(x) :}{(x-w)^3} - \frac{: b'(x)c'(w) :}{x-w} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ \frac{2}{(x-w)^4} - \frac{2 : b(w)c(w) :}{(x-w)^3} - \frac{2 : b(w)c'(w) :}{(x-w)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{: b'(w)c'(w) : + : b(w)c''(w) :}{x-w} + \dots \right\} = \\ &= \frac{2}{(z-w)^4} - \frac{2J(w)}{(z-w)^3} + \frac{2B(w)}{(z-w)^2} + \frac{B'(w)}{z-w}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
\overline{B(z)A(w)} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ -:b(x)c'(x)A(w): + c'(x)\overline{b(x)A(w)} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ \frac{2:b(x)c(w):}{(x-w)^3} - \frac{c'(x)b'(w)}{x-w} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ \frac{2}{(x-w)^4} + \frac{2:b(x)c(w):}{(x-w)^3} + \frac{:b'(w)c'(x):}{x-w} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ \frac{2}{(x-w)^4} + \frac{2:b(w)c(w):}{(x-w)^3} + \frac{2:b'(w)c(w):}{(x-w)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{:b''(w)c(w): + :b'(w)c'(w):}{x-w} + \dots \right\} = \\
&= \frac{2}{(z-w)^4} + \frac{2J(w)}{(z-w)^3} + \frac{2A(w)}{(z-w)^2} + \frac{A'(w)}{z-w}, \tag{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{B(z)B(w)} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ -:b(x)c'(x)B(w): + c'(x)\overline{b(x)B(w)} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ -\frac{:b(x)c'(w):}{(x-w)^2} + \frac{c'(x)b(w)}{(x-w)^2} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ -\frac{1}{(x-w)^4} - \frac{:b(x)c'(w): + :b(w)c'(x):}{(x-w)^2} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ -\frac{1}{(x-w)^4} - \frac{2:b(w)c'(w):}{(x-w)^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{:b'(w)c'(w): + :b(w)c''(w):}{x-w} + \dots \right\} = \\
&= -\frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2B(w)}{(z-w)^2} + \frac{B'(w)}{z-w}. \tag{49}
\end{aligned}$$

Следовательно, тензор энергии-импульса (43) удовлетворяет уравнению

$$\overline{T(z)T(w)} = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{50}$$

с центральным зарядом $c = -2(6\lambda^2 - 6\lambda + 1)$ [9].

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В представленной работе мы описали некоторые детали нашей новой обобщенной теоремы Вика (2) для взаимодействующих полей в двумерной КТП и представили ее обобщение (20) на модели, включающие фермионные поля. Хотя результаты, полученные в примерах 1–3, можно вывести, используя только теорему Вика для свободных (невзаимодействующих) полей, мы привели эти примеры, чтобы проиллюстрировать справедливость обобщенных теорем Вика; это может оказаться полезным для читателей, которые захотят активно пользоваться нашими формулами. Эти соотношения настолько просты, что, очевидно, найдут самые многочисленные применения в различных нетривиальных задачах двумерной КТП.

Список литературы

- [1] F. A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge, K. Schoutens, “Extensions of the Virasoro algebra constructed from Kac–Moody algebras using higher order Casimir invariants”, *Nucl. Phys. B*, **304**:2 (1988), 348–370.
- [2] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer, New York, 1997.
- [3] T. Takagi, T. Yoshikawa, *Generalized Wick theorems in conformal field theory and the Borchers identity*, arXiv: 1604.04032.
- [4] A. Matsuo, K. Nagatomo, *Axioms for a Vertex Algebra and the Locality of Quantum Fields*, Mathematical Society of Japan Memoirs, **4**, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1999, arXiv: hep-th/9706118.
- [5] R. E. Borcherds, “Vertex algebras, Kac–Moody algebras and the Monster”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **83**:10 (1986), 3068–3071.
- [6] В. Г. Кац, *Вертексные алгебры для начинающих*, МЦНМО, М., 2005.
- [7] К. Беккер, М. Беккер, Дж. Шварц, *Теория струн и М-теория. Современное введение*, РХД, Ижевск, 2015.
- [8] R. Blumenhagen, E. Plauschinn, *Introduction to Conformal Field Theory. With Applications to String Theory*, Lecture Notes in Physics, **779**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [9] Y. Yamada, *Conformal Field Theory*, Baifukan, Tokyo, 2006 (in Japanese).