Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Мудров, Регуляризация генераторов Микельсона
для неисключительных квантовых групп, *ТМФ*, 2017,
том 192, номер 2, 307–321

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:11:39

© 2017 г.

А. И. Мудров*

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ГЕНЕРАТОРОВ МИКЕЛЬСОНА ДЛЯ НЕИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ ГРУПП

Пусть $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ – пара алгебр Ли симплектических или ортогональных инфинитезимальных эндоморфизмов комплексных векторных пространств $\mathbb{C}^{N-2} \subset \mathbb{C}^N$, а $U_q(\mathfrak{g}') \subset U_q(\mathfrak{g})$ – пара квантовых групп с треугольным разложением $U_q(\mathfrak{g}) = U_q(\mathfrak{g}_-)U_q(\mathfrak{g}_+)U_q(\mathfrak{h})$. Пусть $Z_q(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ – соответствующая редукционная алгебра, генераторами которой, как мы считаем, являются рациональные тригонометрические функции $\mathfrak{h}^* \rightarrow U_q(\mathfrak{g}_\pm)$. Рассмотрена такая их регуляризация, что итоговые генераторы не обращаются в нуль при любом выборе веса.

Ключевые слова: алгебры Микельсона, квантовые группы, регуляризация.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9299>

Посвящается памяти П. П. Кулиша

1. ВВЕДЕНИЕ

Содержание данной статьи имеет технический вид, она посвящена регуляризации генераторов алгебр Микельсона, которые рассматриваются как мероморфные функции на пространстве весов. С общей теорией алгебр Микельсона читатель может ознакомиться в работах [1]–[3] (классические универсальные обертывающие алгебры) и [4], [5] (квантовые группы). Здесь нас интересует частный случай, соответствующий паре $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ алгебр Ли ортогональных или симплектических инфинитезимальных преобразований фиксированной пары векторных пространств $\mathbb{C}^{N-2} \subset \mathbb{C}^N$.

Пусть $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'_- \oplus \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{g}'_+$ – треугольное разложение, совместное с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+$, т. е. $\mathfrak{g}'_\pm \subset \mathfrak{g}_\pm$, где $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ – подалгебры Картана. Пусть $N(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ означает нормализатор левого идеала $U_q(\mathfrak{g})\mathfrak{g}'_+$, т. е. максимальную подалгебру в $U_q(\mathfrak{g})$, в которой $U_q(\mathfrak{g})\mathfrak{g}'_+$ является двусторонним идеалом. Тогда фактор $N(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')/U_q(\mathfrak{g})\mathfrak{g}'_+$ называется редукционной алгеброй, или алгеброй Микельсона и обозначается как $Z_q(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$. Ее важность вытекает из того факта, что она сохраняет подпространство $\mathfrak{g}'$ -сингулярных векторов в $\mathfrak{g}$ -модулях (напомним, что вектор называется сингулярным, если он порождает тривиальное представление алгебры $U_q(\mathfrak{g}'_+)$).

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 15-01-03148).

*Mathematics Department, University of Leicester, United Kingdom. E-mail: am405@le.ac.uk

Алгебра Микельсона снабжена двухсторонним $U_q(\mathfrak{h})$ -действием и порождается элементами $z_0, z_{\pm\alpha}$ с весами 0 и соответственно $\pm\alpha$, где $\alpha \in R_{\mathfrak{g}}^+ - R_{\mathfrak{g}'}^+$ (множеству положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$ за исключением положительных корней алгебры $\mathfrak{g}'$). Элемент z_0 можно взять из $q^{\mathfrak{h} \ominus \mathfrak{h}'}$, а $z_{\pm\alpha}$ имеет представителей в подалгебре Бореля $U_q(\mathfrak{b}_{\pm})$. Генераторы $z_{\pm\alpha}$ можно выразить через экстремальные проекторы [6]–[8] или, иначе, как элементы редуцированной обратной матрицы Шаповалова [9], [10] (классическая версия приведена в работах [11]–[13]). В обоих случаях требуется рациональное расширение $\hat{U}_q(\mathfrak{g})$ группы $U_q(\mathfrak{g})$ над кольцом частных $\hat{U}_q(\mathfrak{h})$ группы $U_q(\mathfrak{h})$ по отношению к некоторой мультипликативной системе.

Что касается $\hat{U}_q(\mathfrak{g})$ как свободного правого $\hat{U}_q(\mathfrak{h})$ -модуля, то можно считать $z_{\pm\alpha}$ рациональными тригонометрическими $U_q(\mathfrak{g}_{\pm})$ -значными функциями (повышающими и понижающими операторами) на $\mathfrak{h}^*$. Конечно, их можно превратить в полиномы посредством умножения на общий знаменатель картановских коэффициентов. Мы будем называть этот процесс естественной регуляризацией и обозначим регуляризованные генераторы через $\check{z}_{\pm\alpha}$. Возникает вопрос обращения в ноль элементов $\check{z}_{\pm\alpha}(\lambda) = 0$ при некотором λ . Ответ на этот вопрос дается в настоящей работе. Для специального случая общих линейных и симплектических алгебр $\mathfrak{g}$ мы доказываем, что $\check{z}_{\pm\alpha}(\lambda) \neq 0$ при всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Для ортогональной алгебры $\mathfrak{g}$ существуют такие элементы $\delta_{\pm\alpha} \in U_q(\mathfrak{h})$, что $\check{z}_{\pm\alpha}$ делятся на $\delta_{\pm\alpha}$ справа, а фактор $\check{z}_{\pm\alpha}\delta_{\pm\alpha}^{-1}$ не обращается в ноль для всех весов.

Задача регуляризации отрицательных генераторов Микельсона близка к задаче регуляризации сингулярных векторов группы $V \otimes M_{\lambda}$, где V – “естественное” представление группы $U_q(\mathfrak{g})$, а M_{λ} – модуль Верма старшего веса λ : сингулярные векторы являются рациональными тригонометрическими функциями веса λ . Задача в такой постановке является частью более общей проблемы, в которой V – произвольный конечномерный $U_q(\mathfrak{g})$ -модуль. Аналогичная проблема рассматривалась для классических универсальных обертывающих алгебр в работе [14] и полностью решена для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3)$. Здесь мы изучаем частный случай $V = \mathbb{C}^N$ в силу его важности для редуцированных алгебр. Заметим, что квантовые группы приводят к новым эффектам, которые отсутствуют в классической версии: факторы $\delta_{\pm\alpha}$ обращаются в единицу для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$ в пределе $q \rightarrow 1$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ КВАНТОВЫХ ГРУПП

Далее в работе символ $\mathfrak{g}$ означает комплексную простую алгебру Ли типа B , C или D . Ввиду естественного вложения $U_q(\mathfrak{gl}(n)) \subset U_q(\mathfrak{g})$ мы не уделяем особого внимания этому случаю (который также рассмотрен в следствии 9.2 статьи [15], но с другой точки зрения). Зафиксируем подалгебру Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ с невырожденным симметричным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{h}^*$. Обозначим R систему корней алгебры $\mathfrak{g}$ с фиксированной подсистемой положительных корней $R^+ \subset R$ и базисом простых корней $\Pi^+ \subset R^+$. Для каждого веса $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ определим его образ h_{λ} при действии изоморфизма $\mathfrak{h}^* \simeq \mathfrak{h}$, т. е. $(\lambda, \beta) = \beta(h_{\lambda})$ для всех $\beta \in \mathfrak{h}^*$. Обозначим ρ вектор Вейля $(\sum_{\alpha \in R^+} \alpha)/2$.

Предположим, что $q \in \mathbb{C}$ не является корнем из единицы. Обозначим $U_q(\mathfrak{g}_{\pm})$ $\mathbb{C}$ -алгебру, порожденную элементами $\{e_{\pm\alpha}\}_{\alpha \in \Pi^+}$, которые удовлетворяют q -соотношениям Серра

$$\sum_{k=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{\alpha\beta} \\ k \end{bmatrix}_{q_{\alpha}} e_{\pm\alpha}^{1-a_{\alpha\beta}-k} e_{\pm\beta} e_{\pm\alpha}^k = 0, \quad (2.1)$$

где $a_{\alpha\beta} = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ – матрица Картана, $q_{\alpha} = q^{(\alpha, \alpha)/2}$ и

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q!}{[k]_q! [m-k]_q!}, \quad [m]_q! = [1]_q [2]_q \dots [m]_q.$$

Здесь и далее $[z]_q = (q^z - q^{-z})/(q - q^{-1})$ всегда, когда величина $q^{\pm z}$ имеет смысл.

Обозначим $U_q(\mathfrak{h})$ коммутативную $\mathbb{C}$ -алгебру с генераторами $q^{\pm h_{\alpha}}$, $\alpha \in \Pi^+$. Квантовая группа $U_q(\mathfrak{g})$ является $\mathbb{C}$ -алгеброй, порожденной подалгебрами $U_q(\mathfrak{g}_{\pm})$ и $U_q(\mathfrak{h})$ с соотношениями [16]

$$q^{h_{\alpha}} e_{\pm\beta} q^{-h_{\alpha}} = q^{\pm(\alpha, \beta)} e_{\pm\beta}, \quad [e_{\alpha}, e_{-\beta}] = \delta_{\alpha\beta} \frac{q^{h_{\alpha}} - q^{-h_{\alpha}}}{q_{\alpha} - q_{\alpha}^{-1}}. \quad (2.2)$$

Хотя $\mathfrak{h}$ не содержится в $U_q(\mathfrak{g})$, все же удобно сохранить ссылку на $\mathfrak{h}$.

Зафиксируем коумножение в $U_q(\mathfrak{g})$, как это сделано в работе [17]:

$$\begin{aligned} \Delta(e_{\alpha}) &= e_{\alpha} \otimes q^{h_{\alpha}} + 1 \otimes e_{\alpha}, & \Delta(e_{-\alpha}) &= e_{-\alpha} \otimes 1 + q^{-h_{\alpha}} \otimes e_{-\alpha}, \\ \Delta(q^{\pm h_{\alpha}}) &= q^{\pm h_{\alpha}} \otimes q^{\pm h_{\alpha}} \end{aligned}$$

для всех $\alpha \in \Pi^+$.

Подалгебры $U_q(\mathfrak{b}_{\pm}) \subset U_q(\mathfrak{g})$, порожденные алгеброй $U_q(\mathfrak{g}_{\pm})$ над $U_q(\mathfrak{h})$, являются квантованными универсальными обертывающими алгебрами подалгебр Бореля $\mathfrak{b}_{\pm} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{\pm} \subset \mathfrak{g}$. Отображение умножения осуществляет изоморфизм $U_q(\mathfrak{g}_{-}) \otimes U_q(\mathfrak{g}_{+}) \otimes U_q(\mathfrak{h}) \rightarrow U_q(\mathfrak{g})$ векторных пространств, который также переходит в разложение $U_q(\mathfrak{b}_{\pm}) = U_q(\mathfrak{g}_{\pm})U_q(\mathfrak{h})$.

Символ n мы резервируем для обозначения ранга алгебры $\mathfrak{g}$. Пронумеруем элементы базиса Π^+ так, чтобы $\mathfrak{gl}(n)$ являлась подалгеброй Ли в $\mathfrak{g}$ с простыми корнями $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n-1}$, а $U_q(\mathfrak{gl}(n))$ – соответствующей квантовой подгруппой в $U_q(\mathfrak{g})$. Пусть $\mathfrak{gl}(s) \subset \mathfrak{gl}(n)$ – максимальная подалгебра, устойчивая по отношению к автоморфизмам диаграммы Дынкина алгебры $\mathfrak{g}$. Имеем $s = n$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$ и $s = n-1$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$.

Мы используем обозначения $e_i = e_{\alpha_i}$ и $f_i = e_{-\alpha_i}$ для $\alpha_i \in \Pi^+$ во всех случаях, кроме $i = n$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$, для которого положим $f_n = [1/2]_q e_{-\alpha_n}$. Это преобразует соотношение (2.2) к виду

$$[e_n, f_n] = \frac{q^{h_{\alpha_n}} - q^{-h_{\alpha_n}}}{q - q^{-1}}.$$

Все остальные соотношения остаются неизменными.

2.1. Естественное представление. В этом разделе мы напоминаем естественное представление алгебры $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве $\mathbb{C}^N$. Пусть $\{w_i\}_{i=1}^N$ – стандартный базис в пространстве $\mathbb{C}^N$. Используем обозначение $i' = N+1-i$ для

всех целых чисел $i \in I = [1, N]$, соответствующих отражению целочисленного интервала I относительно центра $(N+1)/2$. Для улучшения читаемости формул мы используем специальное обозначение $*$ $= (N+1)/2$.

Естественное представление строится следующим образом. Зададим матрицы

$$\begin{aligned}\pi(e_i) &= E_{i,i+1} + E_{i'-1,i'}, & \pi(f_i) &= E_{i+1,i} + E_{i',i'-1}, \\ \pi(h_{\alpha_i}) &= E_{ii} - E_{i+1,i+1} + E_{i'-1,i'-1} - E_{i'i'}\end{aligned}$$

при $i = 1, \dots, n-1$. Эти формулы определяют прямую сумму двух представлений подалгебры $U_q(\mathfrak{gl}(n))$. Распишем его до представления группы $U_q(\mathfrak{g})$:

$$\begin{aligned}\pi(e_n) &= E_{n,*} + E_{n'-1,n'}, & \pi(f_n) &= E_{*,n} + E_{n',*}, & \pi(h_{\alpha_n}) &= E_{nn} - E_{n'n'}, \\ \pi(e_n) &= E_{nn'}, & \pi(f_n) &= E_{n'n}, & \pi(h_{\alpha_n}) &= 2E_{nn} - 2E_{n'n'}, \\ \pi(e_n) &= E_{n-1,n'} + E_{n,n'+1}, & \pi(f_n) &= E_{n',n-1} + E_{n'+1,n}, \\ \pi(h_{\alpha_n}) &= E_{n-1,n-1} + E_{nn} - E_{n'n'} - E_{n'+1,n'+1}\end{aligned}$$

соответственно для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$. Подалгебра Картана представлена диагональными матрицами, а базисные элементы w_i несут веса $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$, причем $\varepsilon_{i'} = -\varepsilon_i$. Набор весов $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ образует ортонормированный базис $\mathfrak{h}^*$.

Введем частичное упорядочение в целочисленном интервале $[1, N]$, полагая $i \preccurlyeq j$ тогда и только тогда, когда $w_j \in U_q(\mathfrak{g}_-)w_i$. Имеем $i \prec j \Rightarrow i < j$.

Определим матрицу $F \in \text{End}(V) \otimes U_q(\mathfrak{g}_-)$ по формуле

$$F = (\pi \otimes \text{id})(q^{-\sum_{i=1}^n h_{\varepsilon_i} \otimes h_{\varepsilon_i}} \mathcal{R}).$$

Ее элементы f_{ij} , как показано ниже, выражаются через модифицированные коммутаторы $[x, y]_a = xy - ayx$, $a \in \mathbb{C}$. Для всех $\mathfrak{g}$ и $i < j \leq *$ положим

$$f_{ij} = [f_{j-1}, \dots, [f_{i+1}, f_i]_{\bar{q}}, \dots]_{\bar{q}}, \quad f_{j'i'} = [\dots, [f_i, f_{i+1}]_{\bar{q}}, \dots, f_{j-1}]_{\bar{q}}, \quad (2.3)$$

где подразумевается, что $f_{i,i+1} = f_i = f_{i'-1,i}$. Здесь и далее черта сверху означает обратную величину, например $\bar{q} = q^{-1}$. Кроме того,

- для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$ справедливы соотношения $f_{nn'} = (q-1)f_n^2$ и

$$f_{ij'} = q^{\delta_{ij}} [f_{*,j'}, f_{i,*}]_{\bar{q}^{\delta_{ij}}}, \quad i, j < n; \quad (2.4)$$

- для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ справедливы соотношения $f_{nn'} = [2]_q f_n$ и

$$f_{in'} = [f_n, f_{in}]_{\bar{q}^2}, \quad f_{ni'} = [f_{n'i'}, f_n]_{\bar{q}^2}, \quad i < n, \quad (2.5)$$

$$f_{ij'} = q^{\delta_{ij}} [f_{nj'}, f_{in}]_{\bar{q}^{1+\delta_{ij}}}, \quad i, j < n; \quad (2.6)$$

- для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$ справедливы соотношения $f_{nn'} = 0$ и

$$f_{in'} = [f_n, f_{i,n-1}]_{\bar{q}}, \quad f_{ni'} = [f_{n'+1,i'}, f_n]_{\bar{q}}, \quad i < n-2, \quad (2.7)$$

$$f_{ji'} = q^{\delta_{ij}} [f_{ni'}, f_{j,n}]_{\bar{q}^{1+\delta_{ij}}}, \quad i, j < n. \quad (2.8)$$

Наконец, $f_{ii} = 1$ для всех i и $f_{ij} = 0$ при $i > j$.

Матрица F участвует в построении редуцированной обратной формы Шаповалова $\hat{F} = \sum_{i,j=1}^N E_{ij} \otimes \hat{f}_{ij}$, которая получена ниже [9]. Удобно использовать язык диаграмм Хассе для $\prec$ -частично упорядоченного множества I , стрелки которого (направленные к верхним узлам) помечены отрицательными генераторами Шевалле. Назовем любую возрастающую последовательность узлов $(m_i)_{i=1}^k \subset I$ путем от m_1 к m_k . Максимальный путь, т. е. тот, у которого соседние узлы соединены стрелками, называется траекторией. Если $i \prec m_1$ и $m_k \prec j$ для некоторых i, j , то будем писать $i \prec \vec{m} \prec j$.

Для всех $i, j \in I$ определим $\eta_{ij} \in \mathfrak{h} + \mathbb{C}$ по формуле

$$\eta_{ij} = h_{\varepsilon_i} - h_{\varepsilon_j} + \rho_i - \rho_j - \frac{1}{2} \|\varepsilon_i - \varepsilon_j\|^2,$$

где $\rho_i = (\rho, \varepsilon_i)$, а $\|\beta\|^2$ – евклидова норма элемента $\beta \in \mathfrak{h}^*$. Будем считать η_{ij} аффинной функцией $\mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto (\lambda + \rho, \varepsilon_i - \varepsilon_j) - \|\varepsilon_i - \varepsilon_j\|^2/2$. Элементы $\hat{f}_{ij}$ строятся следующим образом. При $i > j$ положим $\hat{f}_{ii} = 1$ и $\hat{f}_{ij} = 0$. При $i < j$ определим $A_i^j = (q - q^{-1})/(q^{-2\eta_{ij}} - 1)$. Для пути $\vec{m}$ введем обозначения $f_{\vec{m}} = f_{m_1, m_2} \dots f_{m_{k-1}, m_k}$ и $A_{\vec{m}}^j = A_{m_1}^j \dots A_{m_k}^j$. Тогда

$$\hat{f}_{ij} = \sum_{i \prec \vec{m} \prec j} f_{i, \vec{m}, j} A_{i, \vec{m}}^j,$$

где символ $\emptyset$ здесь и далее означает, что учитывается пустой путь $\vec{m} = \emptyset$. Элементы $\hat{f}_{1j}$, где j изменяется в интервале от двух до N для алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(N)$ и до $N - 1$ для алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(N)$, образуют набор отрицательных генераторов группы $Z_q(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$, где $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ – простая подалгебра Ли с корневым базисом $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

Пусть M_λ – модуль Верма со старшим весом $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и с каноническим генератором v_λ . Матрица $\hat{F}$ рассматривается как отображение $\mathfrak{h}^* \mapsto \text{End}(V) \otimes U_q(\mathfrak{g}_-)$ такое, что $\hat{f}_{ij}(\lambda)v_\lambda = \hat{f}_{ij}v_\lambda$. Тензоры $\hat{F}_j = \hat{F}(w_j \otimes v_\lambda) = \sum_{i=1}^j w_i \otimes \hat{f}_{ij}v_\lambda$ являются сингулярными векторами, т. е. аннигилируются всеми e_α , $\alpha \in \Pi^+$. Они хорошо определены для λ в общем положении и порождают подмодули $M_j \simeq M_{\lambda + \varepsilon_j} \subset V \otimes M_\lambda$. При некоторых весах $\hat{F}_j$ имеют нули и полюсы и поэтому нуждаются в регуляризации, поскольку сингулярные векторы определены с точностью до скалярного множителя. В частности, существует естественная регуляризация $\check{f}_{ij} = \hat{f}_{ij} \prod_{l \prec j} \bar{A}_l \in U_q(\mathfrak{b}_-)$. Оказывается, что она чрезмерна в определенных случаях, таких как наличие нулей при некоторых λ . Мы изучаем этот вопрос для наиболее важных пар (i, j) , связанных с генераторами группы $Z_q(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$.

3. СТАНДАРТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В $V \otimes M_\lambda$

Изучение матрицы $\hat{F}$ основано на анализе тензорного произведения $V \otimes M_\lambda$. Его модульная структура в большой степени описывается $U_q(\mathfrak{g})$ -инвариантным оператором $\mathcal{Q} = (\pi \otimes \text{id})(\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}) \in \text{End}(V) \otimes M_\lambda$, который является скаляром на подмодулях и фактормодулях старшего веса. Обозначая через x_j его собственное значение на подмодуле M_j , имеем $x_i x_j^{-1} = q^{2\xi_{ij}}|_\lambda$, где

$$\xi_{ij} = h_{\varepsilon_i} - h_{\varepsilon_j} + \rho_i - \rho_j + \frac{1}{2} (\|\varepsilon_i\|^2 - \|\varepsilon_j\|^2).$$

Для λ в общем положении числа x_j попарно различны и разделяют подмодули M_j .

Другим средством анализа тензорного произведения $V \otimes M_\lambda$ является последовательность подмодулей $(V_j)_{j=1}^N$, порожденная генераторами $v_{\lambda,l} = w_l \otimes v_\lambda$, $l = 1, \dots, j$. Она формирует возрастающую фильтрацию произведения $V \otimes M_\lambda$, чей градуированный модуль изоморфен прямой сумме $\bigoplus_{j=1}^N V_j/V_{j-1}$ модулей Верма. Отсюда следует, что все V_j являются $\mathcal{Q}$ -инвариантными (см. статью [18]). В настоящем разделе изучается проекция $\wp_j: M_j \rightarrow V_j/V_{j-1}$, которая может либо быть нулевой либо являться изоморфизмом. Из весовых соображений следует, что $M_j \subset V_j$, а сингулярный вектор $\hat{F}_j$ отображается на линию, порожденную $v_{\lambda,j} \bmod V_{j-1}$, старшим вектором фактора V_j/V_{j-1} . Введем $\hat{C}_i$ по формуле $\wp_j(\hat{F}_j) = \hat{C}_j v_{\lambda,j}$. Нашей ближайшей целью является вычисление $\hat{C}_j$, $j = 1, \dots, N$. Ясно, что $\hat{C}_1 = 1$. Для $j > 1$ ответ дается в рассмотренном далее предложении 3.2.

Для всех $j \in I$ введем коммутативную алгебру $\mathcal{A}_j$ следующим образом. Если $j \leq *$, то положим $\mathcal{A}_j = \mathbb{C}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_{j-1}^{\pm 1}]$. В противном случае $\mathcal{A}_j$ является фактором алгебры $\mathbb{C}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_{j-1}^{\pm 1}]$ по модулю соотношений $y_l y_{l'} = y_{j'}$, $l = j' + 1, \dots, j - 1$, а для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$ дополним ее элементом $y_{j'}^{1/2}$ с соотношением $q y_* = y_{j'}^{1/2}$. Во всех случаях $\mathcal{A}_j$ является локализацией полиномиальной алгебры. Алгебру $\mathcal{A}_j$ можно реализовать как подалгебру в $\hat{U}_q(\mathfrak{h})$, положив в ней $y_l = q^{-2m_j}$, $l \prec j$, благодаря следующему факту.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для всех $m = 2, \dots, n$ имеем $\eta_{m1'} + \eta_{m'1'} = \eta_{11'}$. Также для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$ имеем $2\eta_{*,m'} - 1 = \eta_{m,m'}$, $m = 1, \dots, n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Будем считать $\hat{f}_{ij}$ элементом свободного $\mathcal{A}_j$ -модуля, порожденного подалгеброй $U_q(\mathfrak{g}_-)$. Рассмотрим $\hat{C}_j$ как полином по $B_i = -A_i$, $i = 1, \dots, j-1$, в котором $A_i = (q - \bar{q})/(y_i - 1)$. Пусть $|i - j|$ означает число стрелок на диаграмме Хассе, расположенных на траектории от i до j .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Коэффициенты $\hat{C}_j$, $j = 2, \dots, N$, допускают следующую факторизацию:*

$$\hat{C}_j = \begin{cases} (1 - [2]_q q^2 A_j) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq j'}}^{j-1} (1 - q A_i), & \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(N), \\ \frac{y_* - q}{y_* - \bar{q}} \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq j', *}}^{j-1} (1 - q A_i), & \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1), \\ \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq j'}}^{j-1} (1 - q A_i), & \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n), \end{cases}$$

где множитель $(y_* - q)(y_* - \bar{q})$ присутствует только при $* < j$.

Доказательство основано на понятии главного монома, который связан с каждой парой $i \prec j$. Каждая траектория от i к j порождает единственный элемент $\psi_{ji} \in U_q(\mathfrak{g}_-)$ такой, что $w_j = \psi_{ji} w_i$. Обозначим ψ^{ij} элемент, полученный из ψ_{ji} обращением порядка простых множителей, и назовем его главным мономом пары (i, j) .

ЛЕММА 3.1 (см. статью [18]). *Предположим, что $i \prec j$ и $\psi \in U_q(\mathfrak{g}_-)$ является мономом Шевалле веса $\varepsilon_j - \varepsilon_i$, отличным от ψ^{ij} . Тогда $\wp_j(\psi) = 0$. Кроме того, $\wp_j(w_i \otimes \psi^{ij} v_\lambda) = (-1)^{|i-j|} q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_j} v_{\lambda, j}$, где $\tilde{\rho}_i = \rho_i + \|\varepsilon_i\|^2/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения доказана в работе [18] (см. лемму 3.4). Аналогичное утверждение для другой версии коумножения доказано там же. Здесь мы даем доказательство для используемой версии квантовой группы. Предположим, что $\alpha \in \Pi^+$ и $\varepsilon_i - \varepsilon_k = \alpha$. Согласно лемме 3.4 статьи [18] узел $w_i \otimes \psi^{kj} v_\lambda$ лежит в V_{j-1} . Применяя $\Delta f_\alpha = f_\alpha \otimes 1 + q^{-h_\alpha} \otimes f_\alpha$ к $w_i \otimes \psi^{kj} v_\lambda$, получаем, что для всех $k \prec j$

$$w_i \otimes \psi^{ij} v_\lambda = -q^{(\alpha, \varepsilon_i)} w_k \otimes \psi^{kj} v_\lambda = -q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_k} w_k \otimes \psi^{kj} v_\lambda \pmod{V_{j-1}}. \quad (3.1)$$

Здесь использованы соотношения $f_\alpha w_i = w_k$ и $f_\alpha \psi^{kj} = \psi^{ij}$ для всех $k \prec j$. Продолжая процедуру вдоль траектории от i к j , завершаем доказательство.

Благодаря лемме 3.1 только главные мономы $\hat{f}_{ij}$ вносят вклад в $\wp_j(w_i \otimes v_\lambda)$. Положим $\sigma = 1$ для симплектической алгебры $\mathfrak{g}$ и $\sigma = -1$ для ортогональной $\mathfrak{g}$.

ЛЕММА 3.2. *Для элемента f_{ij} (i, j)-главный моном равен $(-1)^{|i-j|-1} c_{ij} \psi^{ij}$, где*

$$c_{ij} = \begin{cases} \bar{q}^{\eta_{ij}(0)}, & i \neq j', \\ \bar{q} \bar{q}^{\eta_{ij}(0)} + \sigma q, & i = j'. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Для данного пути $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ положим $c_{\vec{m}} = c_{m_1, m_2} \dots c_{m_{k-1}, m_k}$. Введем числа $\hat{c}_{ij} \in \mathbb{C}$ с помощью равенства $\wp_j(w_i \otimes \hat{f}_{ij} v_\lambda) = \hat{c}_{ij} v_{\lambda, j}$, так что $\hat{C}_j = \sum_{i=1}^j \hat{c}_{ij}$. Легко проверить, что $\hat{c}_{ij} = \sum_{i \prec \vec{m} \prec j} c_{i, \vec{m}, j} B_{i, \vec{m}} q^{\rho_i - \tilde{\rho}_j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.2 для $j = N$. Докажем этот частный случай индукцией по N . Базис для индукции получаем сразу: $\hat{C}_2 = 1$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$. Менее очевидно, хотя и непосредственно доказывается, что для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ $\hat{C}_3 = (y_* - q)/(y_* - \bar{q})$ и для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2)$ $\hat{C}_2 = 1 - [2]_q q^2 A_1$. Итак, положим далее $\varepsilon_2 \neq 0$ для вышних N . Наша стратегия заключается в выделении $\phi_i = B_i + q^{-1}$ при $i = 2', 2$. Это облегчит индукционный переход.

Учитывая условие $1 + \hat{c}_{2', 1'} = 1 + B_{2'} q^{\tilde{\rho}_{2'} - \tilde{\rho}_{1'}} = q \phi_{2'}$, вычислим далее $\sum_{i=3}^{2'} \hat{c}_{i1'}$. Заметим, что для всех $3 \prec \vec{m} \prec 2'$ справедливо равенство $c_{i, \vec{m}, 1'} = q^{-1} c_{i, \vec{m}, 2', 1'} = q^{-1} c_{i, \vec{m}, 2'}$. Кроме того, сделаем следующую замену для всех i : $q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{1'}} = q q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{2'}}$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=3}^{2'} \hat{c}_{i1'} &= q \phi_{2'} + \sum_{i=3}^{3'} \sum_{i \prec \vec{m} \prec 2'}^{\emptyset} c_{i, \vec{m}, 2', 1'} B_{i, \vec{m}} B_{2'} q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{1'}} + \sum_{i=3}^{3'} \sum_{i \prec \vec{m} \prec 2'}^{\emptyset} c_{i, \vec{m}, 1'} B_{i, \vec{m}} q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{1'}} = \\ &= q \phi_{2'} \left(1 + \sum_{i=3}^{3'} \sum_{i \prec \vec{m} \prec 2'}^{\emptyset} c_{i, \vec{m}, 2'} B_{i, \vec{m}} q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{2'}} \right). \end{aligned}$$

Теперь сумма $\sum_{i=1}^2 \hat{c}_{i1'}$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \hat{c}_{i1'} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{i \prec \vec{m} \prec 1'}^{\emptyset} c_{i,\vec{m},1'} B_{i,\vec{m}} q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{1'}} = \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{i \prec \vec{m} \prec 2'}^{\emptyset} (c_{i,\vec{m},2',1'} B_{i,\vec{m},2'} q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{1'}} + c_{i,\vec{m},1'} B_{i,\vec{m}} q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{1'}}) = \\ &= \phi_{2'} \sum_{i=1}^2 \sum_{i \prec \vec{m} \prec 2'}^{\emptyset} c_{i,\vec{m},2'} B_{i,\vec{m}} q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{1'}} + \sum_{i=1}^2 \sum_{i \prec \vec{m} \prec 2'}^{\emptyset} (c_{i,\vec{m},1'} - q^{-1} c_{i,\vec{m},2'}) B_{i,\vec{m}} q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{1'}}. \end{aligned}$$

В последней сумме ненулевыми являются только те разности, которые соответствуют $i = 1$, $\vec{m} = \emptyset$, $\vec{m} = (2)$ и $i = 2$, $\vec{m} = \emptyset$. Они соответственно равны

$$c_{1,1'} - q^{-1} c_{1,2'} = q^{-\theta_{1,1'} - 1} + \sigma q - q^{-1} q^{-\theta_{1,2'}} = \sigma q$$

и

$$c_{1,2,1'} - q^{-1} c_{1,2,2'} = c_{2,1'} - q^{-1} c_{2,2'} = q^{-\theta_{2,1'}} - \sigma - q^{-1} q^{-\theta_{2,2'} - 1} = -\sigma.$$

Отсюда получаем последний член

$$\sigma q (q B_1 - B_{1,2} - B_2 q^{\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1}) q^{\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_{2'}} = \sigma q \phi_{2'} (B_1 - B_2) q^{\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_{2'}},$$

поскольку $\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1 = \rho_2 - \rho_1 = -1$. Таким образом, мы вынесли за скобки множитель $q \phi_{2'}$ в выражении для $\hat{C}_{1'}$:

$$\frac{\hat{C}_{1'}}{q \phi_{2'}} = 1 + \sum_{i=1}^{3'} \sum_{i \prec \vec{m} \prec 2'}^{\emptyset} c_{i,\vec{m},2'} B_{i,\vec{m}} q^{\tilde{\rho}_i - \tilde{\rho}_{2'}} + \sigma (B_1 - B_2) q^{\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_{2'}}. \quad (3.2)$$

Отдельно рассмотрим суммы по $i = 1, 2$ и $3 \leq i \leq 3'$. Сначала, используя равенство

$$c_{12'} - q^{-1} c_{22'} = q^{-\theta_{1,2'}} - \sigma - q^{-\theta_{2,2'} - 2} = -\sigma,$$

вычислим внутреннюю сумму при $i = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{2 \prec \vec{m} \prec 2'}^{\emptyset} (c_{1,2,\vec{m},2'} B_{1,\vec{m}} B_2 + c_{1,\vec{m},2'} B_{1,\vec{m}}) p^{\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_{2'}} &= \\ &= q \phi_2 \sum_{2 \prec \vec{m} \prec 2'}^{\emptyset} c_{2,\vec{m},2'} B_{1,\vec{m}} q^{\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_{2'}} - \sigma B_1 q^{\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_{2'}}, \end{aligned}$$

где использована подстановка $q^{\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_{2'}} = q q^{\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_{2'}}$.

Теперь заметим, что для $3 \leq k \leq 3'$ и $l = 1, 2$ справедливы соотношения

$$c_{lk} = q^{-\theta_{lk}} = q^{-\rho_l + \rho_k + \|\varepsilon_l - \varepsilon_k\|^2 / 2} = q^{-\tilde{\rho}_l + \tilde{\rho}_k + \|\varepsilon_l - \varepsilon_k\|^2 / 2 + (\|\varepsilon_l\|^2 - \|\varepsilon_k\|^2) / 2} = q^{-\tilde{\rho}_l + \tilde{\rho}_k + 1},$$

поскольку по нашему предположению $\varepsilon_2 \neq 0$. Перепишем внутреннюю сумму для $i = 2$ в формуле (3.2) следующим образом:

$$c_{22'} B_2 q^{\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_{2'}} + \sum_{k=3}^{3'} \sum_{k \prec \vec{m} \prec 2'}^{\emptyset} c_{k,\vec{m},2'} B_{k,\vec{m}} B_2 q^{\tilde{\rho}_k - \tilde{\rho}_{2'} + 1}.$$

Вместе с суммированием по $3 \leq i \leq 3'$ в (3.2) это приводит к выражению

$$-c_{22'}q^{\tilde{\rho}_2-\tilde{\rho}_{2'}} + \phi_2 c_{22'}q^{\tilde{\rho}_2-\tilde{\rho}_{2'}} + \phi_2 \sum_{i=3}^{3'} \sum_{i \prec \tilde{m} \prec 2'}^{\emptyset} c_{i,\tilde{m},2'} B_{i,\tilde{m}} q^{\tilde{\rho}_i-\tilde{\rho}_{2'}+1}.$$

После таких преобразований формула (3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\hat{C}_{1'}}{q\phi_{2'}} &= 1 - c_{22'}q^{\tilde{\rho}_2-\tilde{\rho}_{2'}-1} - \sigma(\phi_2 - q^{-1})q^{\tilde{\rho}_1-\tilde{\rho}_{2'}} + \phi_2 c_{22'}q^{\tilde{\rho}_2-\tilde{\rho}_{2'}} + \\ &+ q\phi_2 \sum_{i=3}^{3'} \sum_{i \prec \tilde{m} \prec 2'}^{\emptyset} c_{i,\tilde{m},2'} B_{i,\tilde{m}} q^{\tilde{\rho}_i-\tilde{\rho}_{2'}} + q\phi_2 \sum_{2 \prec \tilde{m} \prec 2'}^{\emptyset} c_{2,\tilde{m},2'} B_{1,\tilde{m}} q^{\tilde{\rho}_2-\tilde{\rho}_{2'}}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$-\sigma q^{\tilde{\rho}_1-\tilde{\rho}_{2'}} + c_{22'}q^{\tilde{\rho}_2-\tilde{\rho}_{2'}} = -\sigma q^{\tilde{\rho}_1-\tilde{\rho}_{2'}} + (q^{-\theta_{22'}-1} + \sigma q)q^{\tilde{\rho}_2-\tilde{\rho}_{2'}} = q^{-\theta_{22'}-1}q^{\tilde{\rho}_2-\tilde{\rho}_{2'}} = q,$$

первая строка равна $q\phi_2$. В конечном итоге мы приходим к равенству

$$\frac{\hat{C}_{1'}}{\phi_2\phi_{2'}q^2} = 1 + \sum_{i=2}^{3'} \sum_{i \prec \tilde{m} \prec 2'}^{\emptyset} c_{i,\tilde{m},2'} B_{i,\tilde{m}} q^{\tilde{\rho}_i-\tilde{\rho}_{2'}}.$$

Правая сторона равна в точности $\hat{C}_{2'}(y_1, y_3, \dots, y_{3'})$ при $\dim V = N - 2$. Отсюда получаем $\hat{C}_{1'}$ методом индукции по N . Предложение доказано для $j = N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.2 для j ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ. Теперь предположим, что $1 < j' \leq j$. Пусть k равно $j+1$, тогда $k' = j' - 1$. Используя формулу $c_{1i} = q^{\tilde{\rho}_i-\tilde{\rho}_1+1}$ при $1 < i < j' - 1$, представим $\hat{c}_{1j} = \sum_{1 \prec \tilde{m} \prec j}^{\emptyset} c_{1,\tilde{m}} B_{1,\tilde{m}} q^{\tilde{\rho}_1-\tilde{\rho}_j}$ как

$$c_{1j}q^{\tilde{\rho}_1-\tilde{\rho}_j} + B_1 \sum_{i=2}^{j-1} \sum_{i \prec \tilde{m} \prec j}^{\emptyset} c_{1i} c_{i,\tilde{m}} B_{i,\tilde{m}} q^{\tilde{\rho}_1-\tilde{\rho}_j} = qB_1 \left(1 + \sum_{i=2}^{j-1} \sum_{i \prec \tilde{m} \prec j'}^{\emptyset} c_{i,\tilde{m}} B_{i,\tilde{m}} q^{\tilde{\rho}_i-\tilde{\rho}_j} \right).$$

Это выражение равно $qB_1(1 + \sum_{i=2}^{j-1} \hat{c}_{ij})$, но также и

$$\hat{C}_j = 1 + \sum_{i=2}^{j-1} \hat{c}_{ij} + \hat{c}_{1j} = qB_1 \left(1 + \sum_{i=2}^{j-1} \hat{c}_{ij} \right).$$

По индукции получаем, что $\hat{C}_j = qB_1 \dots qB_{j'-1} (1 + \sum_{i=j}^{j-1} \hat{c}_{ij})$. Выражение в скобках есть не что иное, как $\hat{C}_j(y_{j'}, y_{j'+1}, \dots, y_{j-1})$ при $\dim V = j$. Его факторизация уже доказана. Предложение доказано для j общего положения.

Применим предложение 3.2 к анализу элементов матрицы $\check{f}_{ij}$ для ортогональной алгебры $\mathfrak{g}$. Введем $\delta_j^- \in \mathcal{A}_j$ следующим образом. Положим $\delta_j^- = 1$ для $j < s'$, а для $j \geq s'$ положим $\delta_j^- = (y_{j'} - 1)/(q - \bar{q}) = \bar{A}_{j'}$, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$, и $\delta_j^- = (y_{j'}^{1/2} + 1)/(q + 1)$, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n + 1)$. В случае симплектической $\mathfrak{g}$ положим $\delta_j^- = 1$ для всех j .

ЛЕММА 3.3. Предположим, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(N)$. Для всех i, j , удовлетворяющих условию $i \leq j'$, элемент $\check{f}_{ij}$ делится на δ_j^- .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется рассмотреть только случай $i \leq s, s' \leq j$. Без ограничения общности положим $i = 1$. Вспомним базисное разложение

$$\hat{F}_j = \sum_{l=1}^j w_l \otimes \hat{f}_{lj} v_l$$

и рассмотрим сингулярный вектор

$$\hat{F}_j^\# = \frac{y_{j'} - 1}{q - \bar{q}} \hat{F}_j.$$

Для специального выбора $q^{-2\eta_{11'}}|_\lambda = y_l, l < j$, имеем $\hat{f}_{1j}(\lambda) = \hat{f}_{1j}^\#(q - \bar{q})/(y_{j'} - 1)$. Заметим, что $y_{j'} - 1$ делится на δ_j^- , а $A_{j'} = (q - \bar{q})/(y_{j'} - 1)$ является единственным множителем в $\hat{f}_{1j}$, имеющим полюс в точке $\delta_j^- = 0$, поэтому $\hat{F}_j^\#$ регулярна в точке $\delta_j^- = 0$. Поскольку $\hat{C}_j$ является регулярной в λ общего положения при условии $\delta_j^- = 0$, имеем равенство $\wp_j(\hat{F}_j^\#) = 0$. Это возможно только в том случае, если $\hat{F}_j^\# = 0$ или $\hat{F}_j^\# \in V_{j-1}$. Из всех $\mathcal{Q}$ -собственных чисел только $x_j, x_{j'}$ для четных N и $x_j, x_*, x_{j'}$ для нечетных N становятся постоянными при $\delta_j^- = 0$, а остальные можно сделать отличными от x_j . Поскольку $x_j x_{j'}^{-1} = q^{-4} y_{j'} \neq 1$ и $x_j x_*^{-1} = q^{-1} y_{j'}^{1/2} \neq 1$, спектр оператора $\mathcal{Q}$, ограниченного на V_{j-1} , не содержит x_j — свое собственное значение на M_j . Поэтому $\hat{F}_j^\#$ обращается в ноль вместе со своим коэффициентом $\hat{f}_{1j}^\#$ при условии $\delta_j^- = 0$. Следовательно, $\hat{f}_{1j}$ делится на δ_j^- . Лемма доказана.

4. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В данном разделе мы описываем регуляризацию элемента $\hat{f}_{ij}$. Рассмотрим редукцию $\hat{f}_{ij}$ вдоль двусторонних идеалов в $\mathcal{B} = U_q(\mathfrak{g}_-)$ из следующего семейства. Обозначим $\mathfrak{S}$ объединение целых интервалов $[1, s] \cup [s', 1']$ и $\mathfrak{S}_{ij} =]i, j[\cap \mathfrak{S}$ для всех пар $i < j$. Зафиксируем $k \in \mathfrak{S}$, пусть также l, r — ближайшие узлы к узлу k , такие что $l < k < r$. Предположим, что f_α и f_β , соответствующие $\alpha = \varepsilon_k - \varepsilon_l$ и $\beta = \varepsilon_r - \varepsilon_k$, не коммутируют. Определим двусторонний идеал $J_k \subset \mathcal{B}$, порожденный всеми такими f_{lr} (в точности один, если только не выполняются условия $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$ и $k = s, s'$). Как следует из соотношений (2.1), $\mathcal{B}/J_k$ изоморфно $U_q(\mathfrak{g}_1^+) \otimes U_q(\mathfrak{g}_2^+)$ как векторное пространство, где $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}$ — некоторые подалгебры Ли. Справедливо равенство $f_\beta f_\alpha = \bar{q} f_\alpha f_\beta$ во всех случаях, кроме $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ и $k = n, n'$; тогда $f_\beta f_\alpha = \bar{q}^2 f_\alpha f_\beta$. Кроме того, верны следующие утверждения.

ЛЕММА 4.1. Для всех $i < j$ и $k \in \mathfrak{S}_{ij}$ справедливы равенства $f_{ij} = 0$ по модулю J_k и $f_{ij} = (q - \bar{q}) f_{ik} f_{kj}$ по модулю $J_{k'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из формул (2.3)–(2.8).

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Предположим, что $i < j$. Тогда

- 1) для всех $k \in \mathfrak{S}_{ij}$ $\hat{f}_{ij} = \hat{f}_{ik} \hat{f}_{kj} \pmod{J_k}$ и $\hat{f}_{ij} = \hat{f}_{ik} \hat{f}_{kj} y_k \pmod{J_{k'}}$;
- 2) если $k, k' \in \mathfrak{S}_{ij}$ и $k < k'$, тогда $\hat{f}_{ij} = \hat{f}_{ik} \hat{f}_{kk'} \hat{f}_{k'j} y_{k'} \pmod{J_k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала первое утверждение. Зафиксируем $k \in \mathfrak{S}_{ij}$ и запишем выражение

$$\hat{f}_{ij} = \sum_{i < \bar{m} < k < \bar{l} < j}^{\emptyset} (f_{i, \bar{m}, k} A_{i, \bar{m}} f_{k, \bar{l}, j} A_{\bar{l}, k} + f_{i, \bar{m}, \bar{l}, j} A_{i, \bar{m}} A_{\bar{l}}).$$

Вторая сумма обращается в ноль по модулю J_k , а это влечет существование первой факторизации. Элемент $f_{i,\vec{m},\vec{l},j}$ факторизуется как $(q - q^{-1})f_{i,\vec{m},k}f_{k,\vec{l},j}$ по модулю $J_{k'}$ согласно лемме 4.1. Учитывая, что $(A_k + q - \bar{q})\bar{A}_k = y_k$, получаем факторизацию по модулю $J_{k'}$. Наконец, заметим, что второе утверждение следует из первого. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Элементы $\check{f}_{ij}(\lambda)$ при $i \prec j < s'$ или $s < i \prec j$ не обращаются в ноль при всех λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, проецируя $\check{f}_{ij}$ вдоль $\sum_{k \in \mathfrak{S}_{ij}} J_k$, получаем $f_{\vec{m}}$, где $\vec{m}$ – (единственная) траектория из i в j . Все множители в произведении являются генераторами Шевалле, поэтому $f_{\vec{m}}$ и, следовательно, $\check{f}_{ij}$ не обращаются в ноль. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 4.1. Предположим, что $i \prec j$ и $i \leq j'$. Тогда $\check{f}_{ij}(\lambda)/\delta_j^-(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ имеем $s = n$ и $\delta_j^- = 1$. В силу леммы 4.2 достаточно проверить случай $i \leq n$, $n' \leq j$. Вычисляя проекцию по модулю J_s , получаем факторизацию $\check{f}_{ij} = \check{f}_{in}\check{f}_{nn'}\check{f}_{n'j}y_{n'}$. Она отлична от нуля, поскольку левый и правый множители в произведении не равны нулю в силу следствия 4.2 и соотношения $f_{nn'} = [2]_q f_n \neq 0$. Заметим, что ограничение $i \leq j'$ можно ослабить для симплектической алгебры $\mathfrak{g}$.

Случай ортогональной алгебры $\mathfrak{g}$ при $j < s'$ рассмотрен в следствии 4.2, поскольку в этой ситуации $\delta_j^- = 1$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{g}$ ортогональна и $s' \leq j$ (подразумевая $i \leq s$). Проекция по модулю J_s дает равенство $\hat{f}_{ij}/\delta_j^- = \hat{f}_{in}(\hat{f}_{ss'}/\delta_j^-)\hat{f}_{n'j}$. Она отлична от нуля при условии $\hat{f}_{ss'}/\delta_j^- \neq 0$. Таким образом, мы нашли, что она равна f_n^2 для нечетных N и $f_{n-1}f_n$ для четных N . Теорема доказана.

Доказанная теорема описывает регуляризацию $\hat{z}_{-\alpha_j} = \hat{f}_{1j}$ отрицательных генераторов Микельсона для $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_j \in R^+$.

ПРИМЕР 4.1. Проиллюстрируем теорему 4.1 на примере $\check{f}_{15}$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(6)$. Алгебра $\mathcal{A}_5$ порождается набором $y_1, \dots, y_4$ при условии $y_3y_4 = y_2$. Тогда

$$d_5^- = \bar{A}_2 = \frac{y_2 - 1}{q - \bar{q}}.$$

При $f_{34} = 0$ для $\hat{f}_{15}$ можно написать формулу

$$\hat{f}_{15} = f_{15}A_1 + f_{13}f_{35}A_{1,3} + f_{14}f_{45}A_{1,4} + f_{12}f_{25}A_{1,2} + f_{12}f_{23}f_{35}A_{1,2,3} + f_{12}f_{24}f_{45}A_{1,2,4}.$$

Элементы $f_1f_2f_3$, $f_{13}f_3$, $f_{14}f_2$ и f_{15} образуют базис в подпространстве веса $\varepsilon_5 - \varepsilon_1$ в подалгебре $U_q(\mathfrak{g}_-)$. При $f_{12} = f_1$, $f_{23} = f_{45} = f_2$, $f_{24} = f_{35} = f_3$ перепишем соотношение $\hat{f}_{15} = \hat{f}_{15}\bar{A}_1 \dots \bar{A}_4$ в виде

$$\check{f}_{15} = f_{15}\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4 + f_{13}f_3\bar{A}_4\bar{A}_2 + f_{14}f_2\bar{A}_3\bar{A}_2 + f_1f_2f_3(q - \bar{q} + A_3 + A_4)\bar{A}_3\bar{A}_4.$$

Учитывая, что

$$(q - \bar{q} + A_3 + A_4)\bar{A}_3\bar{A}_4 = \frac{y_3y_4 - 1}{q - \bar{q}} = \bar{A}_2,$$

получаем регуляризацию

$$\check{f}_{15}/\delta_5^- = f_{15} \frac{y_3 - 1}{q - \bar{q}} \frac{y_4 - 1}{q - \bar{q}} + f_{13} f_3 \frac{y_4 - 1}{q - \bar{q}} + f_{14} f_2 \frac{y_3 - 1}{q - \bar{q}} + f_1 f_2 f_3,$$

которая никогда не обращается в нуль.

5. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ МИКЕЛЬСОНА

В этом разделе мы регуляризуем генераторы Микельсона с положительными весами. Соответствие $f_\alpha \rightarrow e_\alpha$ продолжается до изоморфизма антиалгебр $\omega: U_q(\mathfrak{g}_-) \rightarrow U_q(\mathfrak{g}_+)$. Обозначим $e_{ji} = \omega(f_{ij}) \in U_q(\mathfrak{g}_+)$.

Зафиксируем $j > 1$. Для данной пары $j \prec l \leq N$ определим

$$D_l^j = \frac{q^{\eta_{l1} - \eta_{j1}}}{[\eta_{j1} - \eta_{l1}]_q} \in \widehat{U}_q(\mathfrak{h}).$$

Положим $D_{\vec{m}}^j = D_{m_1}^j \dots D_{m_k}^j$ для пути $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ при $j \prec m$. Будем считать

$$\hat{z}_{\alpha_j} = e_{j1} + \sum_{j \prec \vec{m} \prec k \leq N}^{\emptyset} f_{j, \vec{m}, k} e_{k1} D_{\vec{m}, k}^j (-1)^{|j-k|} q^{\eta_{j1} - \eta_{k1}} \in \widehat{U}_q(\mathfrak{g}), \quad j = 2, \dots, N,$$

и $\check{z}_{\alpha_j} = \hat{z}_{\alpha_j} \prod_{j \prec l} \bar{D}_l^j \in U_q(\mathfrak{g})$. Элементы $\hat{z}_{\alpha_j}$ с $\alpha_j = \varepsilon_1 - \varepsilon_j \in \mathbb{R}^+$ образуют набор положительных генераторов Микельсона [10].

Введем автоморфизм τ антиалгебр $U_q(\mathfrak{g}_-)$, тождественный на генераторах Шевалле. Соотношения Серра подразумевают, что автоморфизм τ хорошо определен.

ЛЕММА 5.1. *Для всех i, j верно равенство $\tau(f_{ij}) = f_{j'i'}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим явные выражения (2.3)–(2.8) для f_{ij} . Доказательство немедленно получается для общих линейных и нечетных ортогональных алгебр $\mathfrak{g}$. В других случаях наиболее трудная часть доказательства сводится к проверке равенства $[f_{jn}, f_{ni}]_{\bar{q}^{1+\delta_{ij}'}} = [f_{jn'}, f_{n'i}]_{\bar{q}^{1+\delta_{ij}'}}$ для $i < n$, $n' < j$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$. Можно осуществить проверку с помощью модифицированного тождества Якоби

$$[x, [y, z]_a]_b = [[x, y]_c, z]_{ab/c} + c[y, [x, z]_b]_{a/c}$$

для соответствующих значений $a, b, c \in \mathbb{C}$. Они выбираются так, чтобы уничтожить один из внутренних коммутаторов, используя соотношения в подалгебрах типа A группы $U_q(\mathfrak{g})$. Лемма доказана.

Введем $\delta_j^- \in \mathcal{A}_j$ следующим образом. Положим $\delta_j^- = 1$ для $j < s'$, а для $j \geq s'$ будем считать $\delta_j^- = (y_{j'} - 1)(q - \bar{q}) = \bar{A}_{j'}$, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$, и $\delta_j^- = (y_{j'}^{1/2} + 1)(q + 1)$, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n + 1)$.

Обозначим

$$\delta_j^+ = \frac{q^{2\eta_{j1} - 2\eta_{j'1}} - 1}{q - \bar{q}} \quad \text{для } \mathfrak{so}(2n), \quad (5.1)$$

$$\delta_j^+ = \frac{qq^{2\eta_{j1} - 2\eta_{*1}} + 1}{q + 1} \quad \text{для } \mathfrak{so}(2n + 1), \quad (5.2)$$

предполагая $j \leq s$. Во всех других случаях, включая симплектическую алгебру $\mathfrak{g}$, положим $\delta_j^+ = 1$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Для каждого $j = 2, \dots, N$ элемент $\tilde{z}_{\alpha_j}$ делится на δ_j^+ . Фактор $\tilde{z}_{\alpha_j}(\lambda)/\delta_j^+(\lambda)$ не обращается в нуль при всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предположить, что $\mathfrak{g}$ ортогональна и $s' \leq j'$. Для всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ определим $\tilde{z}_{jk} \in U_q(\mathfrak{g}_-)$, $k = j, \dots, N$, полагая $\tilde{z}_{jj} = \prod_{j < l} \bar{D}_l^j$ и $\tilde{z}_{jk} = \sum_{j \prec \tilde{m} \prec k} f_{j, \tilde{m}, k} D_{\tilde{m}, k}^j \tilde{z}_{jj}$ для $j \prec k$. Тогда $\tilde{z}_{\alpha_j}(\lambda) = \sum_{k=j}^N (-1)^{|j-k|} q^{\eta_{j1} - \eta_{k1}} \tilde{z}_{jk}(\lambda) e_{k1}$. По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта для $U_q(\mathfrak{g})$ равенство $\tilde{z}_{\alpha_j}(\lambda) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\tilde{z}_{jk}(\lambda) = 0$ для всех k .

Специализация $y_{k'} = q^{2\eta_{j1} - \eta_{k1}}$, $j \prec k$, переводит $\delta_{j'}^-$ в δ_j^+ . Можно проверить, что алгебра, порожденная набором $\{y_l\}_{l < j'}$, изоморфна алгебре $\mathcal{A}_{j'}$. Действительно, $y_k y_{k'} = y_j$ для всех $k \neq *$ и $q^2 y_*^2 = y_j$ (при нечетных N).

Антиавтоморфизм τ переводит $\tilde{z}_{jk}$ в $\tilde{f}_{k'j'}(\prod_l \bar{A}_l)$, где произведение берется по тем $l < j'$, для которых верно неравенство $k' \not\leq l$; в него входят все $\bar{A}_l$ с $k' < l$. По лемме 3.3 $\tilde{f}_{k'j'}$ делится на $\delta_{j'}^-$, если $k' \leq j$, в противном случае $\prod_l \bar{A}_l$ содержит $\bar{A}_j$, которая делится на $\delta_{j'}^-$. Это доказывает, что $\tilde{z}_{\alpha_j}$ делится на δ_j^+ . Наконец, элемент $\tilde{f}_{1j'}/\delta_{j'}^-$ является τ -образом $\tilde{z}_{jN}/\delta_j^+$ с точностью до множителя $(-1)^{|j-k|} y_{k'} \neq 0$. Поскольку $\tilde{f}_{1j'}/\delta_{j'}^-$ не обращается в нуль для всех весов, $\tilde{z}_{\alpha_j}/\delta_j^+ \neq 0$ тоже для всех весов. Теорема доказана.

6. ПРИМЕНЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ: РАЗЛОЖЕНИЕ $V \otimes M_\lambda$

Определим возрастающую последовательность подмодулей $W_j = \sum_{i=1}^j M_i \subset V \otimes M_\lambda$ для всех $j = 1, \dots, N$. Лемма 3.1 подразумевает, что $W_j \subset V_j$. Применим регуляризационный анализ, чтобы ответить на вопрос, в каком случае $V \otimes M_\lambda$ является прямой суммой M_j . Ясно, что это утверждение справедливо, если собственные числа x_j оператора $\mathcal{Q}$ попарно различны. Однако обратное не верно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Следующие утверждения эквивалентны для всех $j \in [1, N]$:*

- 1) $V_j = W_j$,
- 2) $V_i = W_i$ для всех $i \leq j$,
- 3) проекция $\wp_i: M_i \rightarrow V_i/V_{i-1}$ является изоморфизмом для всех $i \leq j$,
- 4) $W_j = \bigoplus_{i=1}^j M_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку все M_i и V_i/V_{i-1} являются модулями Верма одинакового старшего веса, третье утверждение эквивалентно тому, что $\wp_i$ сюръективно или инъективно. То, что первое утверждение вытекает из второго, доказываем тривиально. При $W_1 = V_1$ предположим, что второе утверждение выполнено, и пусть значение $k > 1$ является наименьшим среди таких, что $W_k \neq V_k$. Тогда V_k и W_k имеют различные кратности веса $\lambda + \varepsilon_k$, поэтому первое утверждение вытекает из второго.

Допустив справедливость второго утверждения, получаем, что все $\wp_i$ сюръективны, следовательно, справедливо третье утверждение. Наоборот, третье утверждение означает, что все отображения $W_i \rightarrow V_i/V_{i-1}$ сюръективны. Поскольку $W_1 = V_1$, докажем второе утверждение методом индукции по i .

Если $\wp_i$ инъективны, то $M_i \cap W_{i-1} \subset M_i \cap V_{i-1} = \{0\}$, т.е. третье утверждение влечет четвертое. Наконец, предположим справедливость четвертого утверждения и докажем справедливость третьего по индукции: из эквивалентности третьего и второго утверждений для $i < j$ следует, что отображение $\wp_j$ инъективно и поэтому является изоморфизмом. Предложение доказано.

Пусть $u_j = \tilde{F}_j/d_j^- \in V \otimes M_\lambda$ – регуляризованный сингулярный вектор, и введем $C_j(\lambda) \in \mathbb{C}$ с помощью равенства $\wp_j(u_j) = C_j(\lambda)v_{\lambda,j}$.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Модуль $V \otimes M_\lambda$ является прямой суммой $\bigoplus_{j=1}^N M_j$ тогда и только тогда, когда $C_j(\lambda) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку u_j не обращается в нуль для всех λ , $C_j(\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда $\wp_j$ является изоморфизмом. Следствие доказано.

Обозначим $\phi_{ij} = (q^{2\xi_{ij}} - 1)(q - \bar{q})$ при $i < j$, за исключением $i = j'$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(N)$, а в этом случае положим $\phi_{j'j} = 1$ для четных N и $\varphi_{j'j} = (q^{\xi_{j'j}} - 1)(q - \bar{q})$ для нечетных N . Тогда $C_j \simeq \prod_{i=1}^{j-1} \phi_{ij}$ с точностью до числового множителя, который никогда не обращается в нуль. Вспомним, что $q^{2\xi_{ij}} = x_i x_j^{-1}$, где x_i являются собственными числами оператора $\mathcal{Q}$. Если все они различны, тогда очевидно, что $V \otimes M_\lambda = \bigoplus_{j=1}^N M_j$. Следовательно, обратное тоже верно для симплектической алгебры $\mathfrak{g}$. Для ортогональной алгебры $\mathfrak{g}$ спектр оператора $\mathcal{Q}$ не разделяет подмодули M_j со всеми весами. Например, выберем вес λ таким, что $q^{2(\lambda+\rho, \varepsilon_j)} = -1$. Тогда $x_j x_{j'}^{-1} = q^{4(\lambda+\rho, \varepsilon_j)} = 1$. Если все остальные x_l попарно различны и отличны от x_j , то разложение в прямую сумму по-прежнему остается справедливым. Это явление делает возможным квантование граничных классов сопряженности Леви в работе [10].

Список литературы

- [1] J. Mickelsson, “Step algebras of semi-simple subalgebras of Lie algebras”, *Rep. Math. Phys.*, 4:4 (1973), 307–318.
- [2] Д. П. Желобенко, “Экстремальные проекторы и обобщенные алгебры Микельсона над редуктивными алгебрами Ли”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 52:4 (1988), 758–773.
- [3] D. P. Zhelobenko, “S-algebras and Verma modules over reductive Lie algebras”, *Докл. АН СССР*, 273:4 (1983), 785–788.
- [4] P. Kekäläinen, “Step algebras of quantum algebras of type A, B and D”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29:5 (1996), 1045–1053.
- [5] S. Khoroshkin, O. Ogievetsky, “Mickelsson algebras and Zhelobenko operators”, *J. Algebra*, 319:5 (2008), 2113–2165.
- [6] Р. М. АшEROва, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой, “Проекционные операторы для простых групп Ли”, *ТМФ*, 8:2 (1971), 255–271.
- [7] Р. М. АшEROва, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой, “Проекционные операторы для простых групп Ли. II. Общая схема построения понижающих операторов. Случай групп $SU(n)$ ”, *ТМФ*, 15:1 (1973), 107–119.
- [8] V. N. Tolstoy, “Projection operator method for quantum groups”, *Special Functions 2000: Current Perspective and Future Directions*, v. 30 (Arizona State University, Tempe, AZ, May 29 – June 9, 2000), NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, eds. J. Bustoz, M. E. H. Ismail, S. K. Suslov, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 457–488.

- [9] A. Mudrov, “ R -matrix and inverse Shapovalov form”, *J. Math. Phys.*, **57**:5 (2016), 051706, 10 pp., arXiv:1412.3384.
- [10] T. Ashton, A. Mudrov, “ R -matrix and Mickelsson algebras for orthosymplectic quantum groups”, *J. Math. Phys.*, **56**:8 (2015), 081701, 8 pp.
- [11] J. G. Nagel, M. Moshinsky, “Operators that lower or raise the irreducible vector spaces of U_{n-1} contained in an irreducible vector space of U_n ”, *J. Math. Phys.*, **6**:5 (1965), 682–694.
- [12] P.-Y. Hou, “Orthonormal bases and infinitesimal operators of the irreducible representations of group U_n ”, *Sci. Sinica*, **15** (1966), 763–772.
- [13] A. I. Molev, “Gelfand–Tsetlin bases for classical Lie algebras”, *Handbook of Algebra*, **4**, ed. M. Hazewinkel, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006, 109–170.
- [14] K. Styrkas, V. Tarasov, A. Varchenko, “How to regularize singular vectors and kill the dynamical Weyl group”, *Adv. Math.*, **185**:1 (2004), 91–135.
- [15] A. Mudrov, “Orthogonal basis for the Shapovalov form on $U_q(\mathfrak{sl}(n+1))$ ”, *Rev. Math. Phys.*, **27**:2 (2015), 1550004, 23 pp.
- [16] V. Drinfel’d, “Quantum groups”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM)*, v. 1 (Berkeley, CA, August 3–11, 1986), eds. A. M. Gleason, AMS, Providence, RI, 1987, 798–820.
- [17] V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [18] T. Ashton, A. Mudrov, “Representations of quantum conjugacy classes of orthosymplectic groups”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*. 23, Зап. научн. сем. ПОМИ, **433**, ПОМИ, СПб., 2015, 20–40, arXiv:1502.02392.