Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Шаров, Возмущенные состояния вращающейся релятивистской струны,
ТМФ, 2004, том 140, номер 2, 256–268

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf93>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:46:36

© 2004 г.

Г. С. Шаров*

ВОЗМУЩЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

Исследованы произвольные малые возмущения равномерного вращения прямолинейной релятивистской струны с массивными концами. Два класса таких возмущений с различными спектрами собственных частот имеют вид стоячих волн и соответствуют колебаниям струны в плоскости вращения и в ортогональном направлении. Эти состояния представлены в виде ряда Фурье, с помощью которого проводится квантование возбуждений струны в линейной окрестности классического вращения. Данные струнные осцилляции приложимы к описанию дочерних траекторий Редже в рамках рассматриваемой модели.

Ключевые слова: релятивистская струна с массивными концами, возмущения ротационного движения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель релятивистской струны с массивными концами [1], [2] описывает преимущественно орбитально возбужденные состояния мезонов и барионов. На классическом уровне таким состояниям соответствует равномерное вращение системы, поэтому широко известное ротационное движение (равномерное вращение) прямолинейной струны используется для описания адронных состояний многими авторами [3]–[5]. Однако состояния адронов, интерпретируемые как высшие радиальные возбуждения в потенциальных моделях [6], требуют для описания в рамках струнной модели привлечения более широкого класса движений релятивистской струны с массивными концами. Точнее говоря, из всего многообразия физически допустимых классических движений системы необходимо выделить те, которые соответствуют указанной интерпретации.

Для релятивистской струны с массивными концами попытки представить такие состояния в виде малых возмущений ротационных движений предпринимались неоднократно. В частности, в работах [7], [8] для этой цели непосредственно в действии фиксировалась прямолинейная форма струны. Позже было показано [9], что искомые возмущенные движения характеризуются формой струны, отличной от прямолинейной.

Учитывая указанное обстоятельство, авторы работ [10] попытались найти малые поправки к равномерному вращению прямолинейной струны с фиксированным концом в

* Тверской государственный университет, Тверь, Россия. E-mail: german.sharov@tversu.ru

виде

$$X^0 = t, \quad X^1 + iX^2 = \sigma R(t) \exp [i(\Omega t + \phi(t) + f(\sigma))], \quad \sigma \in [0, 1]. \quad (1)$$

Здесь на мировой поверхности $X^\mu(\tau, \sigma)$ в трехмерном пространстве Минковского $R^{1,2}$ параметр эволюции τ выбран равным времени: $\tau \equiv t$. В случае $R(t) = R_0 = \text{const}$, $\phi(t) = 0$, $f(\sigma) = 0$ выражение (1) описывает ротационное движение (равномерное вращение прямолинейной струны в плоскости X^1, X^2 с угловой частотой Ω), является при этом точным решением уравнений движения релятивистской струны [2]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial \dot{X}^\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial X'^\mu} = 0 \quad (2)$$

и удовлетворяет краевым условиям

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\dot{x}_{i\mu}}{\sqrt{\dot{x}_i^2}} - \frac{(-1)^i \gamma}{m_i} \left[\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial X'^\mu} - \sigma'_i(\tau) \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial \dot{X}^\mu} \right] \Big|_{\sigma=\sigma_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь $-g = (\dot{X}, X')^2 - \dot{X}^2 X'^2$, $\dot{X}^\mu = \partial_\tau X^\mu$, $X'^\mu = \partial_\sigma X^\mu$, $(a, b) = a_\mu b^\mu$, γ — натяжение струны с массами m_i на концах, $x_i^\mu(\tau) = X^\mu(\tau, \sigma_i(\tau))$, внутренние координаты концов $\sigma_i(\tau) = \text{const}$ в случае (1). Уравнение (2) и условия (3) соответствуют действию для данной модели [2]

$$S = -\gamma \int \sqrt{-g} d\tau d\sigma + \sum_{i=1}^2 m_i \int \sqrt{\dot{x}_i^2(\tau)} d\tau, \quad (4)$$

равно как и действию [10], в котором в первом слагаемом использован лагранжиан в форме Полякова [11]

$$L = -\frac{1}{2} \gamma h^{\alpha\beta} X_{,\alpha}^\mu X_{\mu,\beta} \sqrt{-h}.$$

Авторы работ [10] для поиска близких к ротационному движений подставляли выражение (1) в уравнение (2), предполагая малость возмущений $R(t) - R_0$, $\phi(t)$, $f(\sigma)$. Однако при выводе частного решения задачи в виде (1) они не учитывали краевого условия (3) на подвижном конце струны и игнорировали возникавшую по ходу расчетов существенную зависимость функции $f(\sigma)$ от t .

В работе [12] показана неправомочность этих предположений, а также предложен метод общего решения данной задачи — описаны произвольные малые возмущения ротационного движения релятивистской струны с массивным и фиксированным концами в пространстве Минковского $R^{1,D-1}$ произвольной размерности.

В разделе 2 данной работы подход, использующий условия ортонормальности на мировой поверхности и опирающийся на результаты исследований [13], [14], распространен на случай струны с произвольными массами на концах. При этом нелинейная задача, поставленная с самого начала для уравнения с частными производными (2), без потери общности сведена к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. В разделе 3 показано, что все искомые малые возмущения вращающейся струны (называемые ниже квазиротационными состояниями) могут быть представлены в виде ряда Фурье по собственным функциям некоторых краевых задач. Слагаемые данного ряда имеют вид стоячих волн. В разделе 4 предложен подход к квантованию квазиротационных состояний струны с массивными концами и рассмотрены его возможные приложения.

2. ДИНАМИКА СТРУНЫ С МАССИВНЫМИ КОНЦАМИ

В отличие от авторов работ [10] мы предлагаем более удобный метод исследования близких к ротационным движений релятивистской струны с массивными концами, использующий выбор координат τ, σ на мировой поверхности (всегда возможный [2]), в которых выполняются условия ортонормальности

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0. \quad (5)$$

Вследствие этого уравнения движения (2) и краевые условия (3) принимают более простой вид

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0, \quad (6)$$

$$m_i \frac{d}{d\tau} U_i^\mu(\tau) + (-1)^i \gamma X'^\mu(\tau, \sigma_i) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

В краевых условиях (7) используется обозначение

$$U_i^\mu(\tau) = \frac{\dot{x}_i^\mu(\tau)}{\sqrt{\dot{x}_i^2(\tau)}} = \frac{\dot{X}^\mu(\tau, \sigma_i)}{\sqrt{\dot{X}^2(\tau, \sigma_i)}} \quad (8)$$

для единичного $R^{1,D-1}$ -вектора скорости i -го конца струны, причем внутренние координаты этих концов без потери общности [2] выбраны в виде

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \pi. \quad (9)$$

Используя общее решение уравнения (6)

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} [\Psi_+^\mu(\tau + \sigma) + \Psi_-^\mu(\tau - \sigma)] \quad (10)$$

и учитывая условия (5) или $\Psi_\pm'^2 = 0$, мы можем преобразовать краевые условия (7) к виду [13], [14]

$$\begin{aligned} U_1'^\mu(\tau) &= \gamma m_1^{-1} [\delta_\nu^\mu - U_1^\mu(\tau) U_{1\nu}(\tau)] \Psi_+'^\nu(\tau), \\ U_2'^\mu(\tau) &= \gamma m_2^{-1} [\delta_\nu^\mu - U_2^\mu(\tau) U_{2\nu}(\tau)] \Psi_-'^\nu(\tau - \pi). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь и ниже штрих означает производную по соответствующему аргументу,

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Функции $\Psi_\pm^\mu(\tau)$ и, следовательно, мировую поверхность $X^\mu(\tau, \sigma)$ можно выразить через любую из функций $U_i^\mu(\tau)$, используя формулы [14]

$$\Psi_\pm'^\mu(\tau \pm \sigma_i) = m_i \gamma^{-1} \left[\sqrt{-U_i'^2(\tau)} U_i^\mu(\tau) \mp (-1)^i U_i'^\mu(\tau) \right], \quad (12)$$

следующие из равенств (7), (10), (11). При этом всю информацию о движении системы содержит любая из четырех вектор-функций $\Psi_{\pm}^{\mu}$, U_1^{μ} или U_2^{μ} , заданная на произвольном отрезке $I = [\tau_0, \tau_0 + 2\pi]$ длиной 2π , если известны параметры m_i/γ , $U_i^{\mu}(\tau_0)$ и $U_j^{\mu}(\tau_0 + \pi)$. По этим начальным данным с учетом условия (7), записанного в виде

$$\Psi_+^{\mu}(\tau + \sigma_i) - \Psi_-^{\mu}(\tau - \sigma_i) + 2(-1)^i m_i \gamma^{-1} U_i^{\mu}(\tau) = 0,$$

уравнения (11), (12) позволяют определить функции $U_i^{\mu}(\tau)$, $\Psi_{\pm}^{\mu}$ и мировую поверхность (10) при всех значениях аргументов [13], [14].

С помощью соотношений (12) можно исключить вектор-функции $\Psi_{\pm}^{\mu}$ из уравнений (11) и свести описание динамики струны с массивными концами к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом относительно вектор-функций $U_i^{\mu}(\tau)$:

$$\begin{aligned} U_1^{\mu}(\tau) &= m_2 m_1^{-1} [\delta_{\nu}^{\mu} - U_1^{\mu}(\tau) U_{1\nu}(\tau)] \left[\sqrt{-U_2'^2(*)} U_2^{\nu}(*) - U_2^{\nu}(*) \right], \\ U_2^{\mu}(*) &= m_1 m_2^{-1} [\delta_{\nu}^{\mu} - U_2^{\mu}(*) U_{2\nu}(*)] \left[\sqrt{-U_1'^2(-)} U_1^{\nu}(-) - U_1^{\nu}(-) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где $(*) \equiv (\tau - \pi)$, $(-) \equiv (\tau - 2\pi)$.

Если заданы функция $U_i^{\mu}(\tau)$ на отрезке $I = [\tau_0, \tau_0 + 2\pi]$ и упомянутые выше параметры m_i/γ , $U_{3-i}^{\mu}(\tau_0 + \pi)$, то после интегрирования системы (13) можно определить с помощью формул (12) и (10) мировую поверхность $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ с точностью до аддитивной постоянной.

3. КВАЗИРОТАЦИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Ротационное движение релятивистской струны с массивными концами в рамках условий ортонормальности (5) зададим выражением [5]

$$X^{\mu} = X_{\text{rot}}^{\mu}(\tau, \sigma) = \Omega^{-1} [\theta \tau e_0^{\mu} + \cos(\theta \sigma + \phi_1) e^{\mu}(\tau)], \quad \sigma \in [0, \pi]. \quad (14)$$

Оно описывает равномерное вращение прямолинейной струны, является решением уравнения (6) и удовлетворяет условиям (5), (7), (9). В выражении (14) e_0^{μ} — единичный времениподобный вектор скорости центра масс струны, $e^{\mu}(\tau) = e_1^{\mu} \cos \theta \tau + e_2^{\mu} \sin \theta \tau$ — сонаправленный с прямолинейной струной вращающийся единичный ($e^2 = -1$) пространственноподобный вектор. Постоянные скорости концов струны v_i связаны с параметрами θ , ϕ_1 и с угловой частотой Ω соотношениями

$$v_1 = \cos \phi_1, \quad v_2 = -\cos(\pi \theta + \phi_1), \quad m_i \gamma^{-1} \Omega = (1 - v_i^2) v_i^{-1}. \quad (15)$$

Для ротационного движения (14) единичные векторы скорости концов струны U_i^{μ} имеют вид

$$U_i^{\mu}(\tau) = U_{i(\text{rot})}^{\mu}(\tau) = \Gamma_i [e_0^{\mu} - (-1)^i v_i e^{\mu}(\tau)], \quad \Gamma_i = (1 - v_i^2)^{-1/2}, \quad (16)$$

где $\dot{e}^\mu = \theta^{-1} de^\mu(\tau)/d\tau$. Выражения $U_{i(\text{rot})}^\mu$ удовлетворяют системе уравнений (13), если параметры v_i, m_i, θ связаны соотношениями (15).

Единичные векторы в плоскости вращения струны

$$e^\mu(\tau) = e_1^\mu \cos \theta \tau + e_2^\mu \sin \theta \tau, \quad \dot{e}^\mu(\tau) = -e_1^\mu \sin \theta \tau + e_2^\mu \cos \theta \tau$$

вместе с e_0^μ и e_3^μ образуют используемый ниже ортонормированный репер в пространстве $R^{1,3}$.

Если произвольное движение системы близко к ротационному (14), то для его описания зададим вектор-функции $U_i^\mu(\tau)$, близкие к $U_{i(\text{rot})}^\mu(\tau)$ (16), в следующем виде:

$$U_i^\mu(\tau) = U_{i(\text{rot})}^\mu(\tau) + u_i^\mu(\tau), \quad |u_i^\mu| \ll 1. \quad (17)$$

Возмущение $u^\mu(\tau)$, заданное на отрезке I длиной 2π , считаем малым, что позволяет пренебречь квадратичными по u слагаемыми и приводит к условию

$$(U_{i(\text{rot})}, u_i) \equiv U_{i(\text{rot})}^\mu(\tau) u_{i\mu}(\tau) = 0, \quad (18)$$

следующему из единичности как U_1^μ , так и $U_{i(\text{rot})}^\mu$ в (17).

Учитывая последнее равенство, подставим выражения (17), (16) в уравнения (13). Получим в линейном приближении систему из двух векторных уравнений, описывающую эволюцию возмущений u_i^μ . Введем обозначения для независимых проекций u_i^μ ,

$$u_{i0}(\tau) = (e_0, u_i), \quad u_{ie}(\tau) = (e, u_i), \quad u_{iz}(\tau) = (e_3, u_i). \quad (19)$$

Четвертая проекция u_i^μ на вектор $\dot{e}$ в силу равенства (18) выражается через u_{i0} : $(\dot{e}, u_i) = (-1)^i v_i^{-1} u_{i0}$. Проекции двух упомянутых векторных уравнений на базисные векторы $e_0, e, \dot{e}, e_3$ сводятся к следующей системе линеаризованных уравнений для компонент (19):

$$\begin{aligned} u'_{10}(\tau) + Q_1 u_{10}(\tau) - \Gamma_1 Q_1 u_{1e}(\tau) &= K[u'_{20} - Q_2 u_{20} + \Gamma_2 Q_2 u_{2e}], \\ u'_{1e}(\tau) + Q_1 u_{1e}(\tau) + \theta v_1^{-1} u_{10}(\tau) &= \tilde{K}^{-1}[N_2 u'_{20} + N_2^* u_{20} - u'_{2e} - Q_1 u_{2e}], \\ u'_{20} + Q_2 u_{20} + \Gamma_2 Q_2 u_{2e} &= K^{-1}[u'_{10}(-) - Q_1 u_{10}(-) - \Gamma_1 Q_1 u_{1e}(-)], \\ u'_{2e} + Q_2 u_{2e} - \theta v_2^{-1} u_{20} &= \tilde{K}[N_1 u'_{10}(-) + N_1^* u_{10}(-) - u'_{1e}(-) - Q_2 u_{1e}(-)], \\ u'_{1z}(\tau) + Q_1 u_{1z}(\tau) &= m_2 m_1^{-1}[-u'_{2z} + Q_2 u_{2z}], \\ u'_{2z} + Q_2 u_{2z} &= m_1 m_2^{-1}[-u'_{1z}(-) + Q_1 u_{1z}(-)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_i &= \Gamma_i \theta v_i = \frac{\theta v_i}{\sqrt{1 - v_i^2}} = \text{const}, \quad (-) \equiv (\tau - 2\pi), \\ K &= \frac{m_2 Q_1}{m_1 Q_2}, \quad \tilde{K} = \frac{m_1 \Gamma_1}{m_2 \Gamma_2}, \quad N_i = -(-1)^i \frac{Q_1 + Q_2}{Q_i \Gamma_i}, \quad N_i^* = \frac{(-1)^i Q_i}{\Gamma_i v_i^2} - Q_i N_i, \end{aligned}$$

аргумент $(\tau - \pi)$ у функций u_{20}, u_{2e}, u_{2z} опущен.

Ищем решения линеаризованной системы (20) в виде $u_i^\mu = A_i^\mu e^{-i\omega\tau}$. Для двух последних уравнений (20), образующих замкнутую подсистему, решение в виде гармоник $u_{iz}(\tau) = -A_i^3 e^{-i\omega\tau}$ существует только тогда, когда ω является корнем уравнения

$$\frac{\omega^2 - Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_2)\omega} = \operatorname{ctg} \pi\omega. \quad (21)$$

Уравнение (21) полностью совпадает с уравнением, которое описывает рассмотренный в работе [14] спектр состояний данной модели с линеаризуемыми краевыми условиями. Оно имеет счетный набор вещественных корней $\omega_n \in (n-1, n)$, причем $\omega_1 = \theta$.

Возмущение движения (14), отвечающее одной из частот ω_n , определяется с помощью уравнений (12), (10) и имеет вид

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_{\text{rot}}^\mu(\tau, \sigma) + e_3^\mu A \cos(\omega_n \sigma + \phi_n) \cos(\omega_n \tau + \varphi_0), \quad (22)$$

где

$$\phi_n = \operatorname{arctg} \frac{\omega_n}{Q_1}.$$

Амплитуда A мала по сравнению с Ω^{-1} . Выражение (22) описывает колебание вращающейся струны с частотой $\Omega_n = \Omega\omega_n/\theta$ (в направлении e_3^μ , перпендикулярном плоскости вращения) в виде стоячей волны с n узлами на интервале $0 < \sigma < \pi$. Форма данной волны $F = A \cos(\omega_n \sigma + \phi_n)$ отличается от строго синусоидальной, если в качестве аргумента функции F взять расстояние $s = \Omega^{-1} \cos(\theta\sigma + \phi_1)$ от центра вращения до текущей точки σ . Случай $n = 1$ является тривиальным, так как в силу равенства $\omega_1 = \theta$ зависимость $F(s)$ линейна, и, следовательно, движение (22) при $n = 1$ сводится к ротационному, но с небольшим наклоном плоскости вращения струны по отношению к плоскости xOy . Однако квазиротационные колебания вращающейся струны (22) с частотами ω_n гармоник при $n = 2, 3, \dots$ нетривиальны.

В работе [14] было доказано, что отвечающие частотам ω_n – корням уравнения (21) – функции

$$w_n(\sigma) = \cos(\omega_n \sigma + \phi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \omega_0 = 0, \quad (23)$$

являются собственными функциями краевой задачи

$$w''(\sigma) + \omega^2 w = 0, \quad \omega^2 w(0) + Q_1 w'(0) = 0, \quad \omega^2 w(\pi) - Q_2 w'(\pi) = 0 \quad (24)$$

и образуют полную систему функций на пространстве $C[0, \pi]$. Собственные функции (23) взаимно ортогональны в смысле скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(\sigma)g(\sigma) d\sigma + \frac{f(0)g(0)}{Q_1} + \frac{f(\pi)g(\pi)}{Q_2}. \quad (25)$$

Полную систему образуют и функции $\tilde{w}_n = -\omega_n^{-1} w'_n(\sigma)$, $n = 1, 2, \dots$ – собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$\tilde{w}'' + \omega^2 \tilde{w} = 0, \quad Q_1 \tilde{w}(0) - \tilde{w}'(0) = 0, \quad Q_2 \tilde{w}(\pi) + \tilde{w}'(\pi) = 0,$$

которая является дуальной по отношению к задаче (24). В работе [14] было показано, что система $e^{-i\omega_n \tau}$, $n \in Z$, $\omega_{-n} = -\omega_n$, составленная из линейных комбинаций w_n и $\tilde{w}_n$ (как и система, объединяющая w_n и $\tilde{w}_n$) полна на пространстве $C(I)$, где $I = [\tau_0, \tau_0 + 2\pi]$, т.е. любая заданная на отрезке I функция $u(\tau)$ разложима на нем в ряд Фурье

$$u(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{-i\omega_n \tau}, \quad \tau \in I = [\tau_0, \tau_0 + 2\pi]. \quad (26)$$

Выше было сказано, что всю информацию о любом движении струнной модели (4) содержит заданная на отрезке I функция $U_i^\mu(\tau)$, имеющая здесь вид (17). Если на отрезке I разложить в ряд (26) произвольное малое возмущение $u_{1z}(\tau)$ или $u_{2z}(\tau)$, то сумма ряда будет описывать эволюцию этого возмущения и при $\tau \in R$, так как каждое слагаемое этого ряда является решением соответствующих уравнений эволюции (20). Таким образом, произвольное малое возмущение ротационного движения (14) в направлении e_3^μ можно разложить в ряд Фурье по осцилляторным модам (22).

Это относится и к квазиротационным движениям в плоскости вращения e_1, e_2 , определяемым первыми четырьмя уравнениями системы (20). Подстановка выражений $u_{i0} = A_i e^{-i\tilde{\omega}\tau}$, $u_{ie} = B_i e^{-i\tilde{\omega}\tau}$ в эту систему приводит к следующему условию существования ее нетривиальных решений:

$$\begin{vmatrix} Q_1 - i\tilde{\omega} & -Q_1 & Q_1 + i\tilde{\omega}q_{12} & -Q_1 \\ Q_1 v_1^{-2} & Q_1 - i\tilde{\omega} & -\tilde{Q}_2 - i\tilde{\omega}q_{12} & Q_1 - i\tilde{\omega} \\ Q_1 + i\tilde{\omega} & Q_1 & (Q_1 - i\tilde{\omega}q_{12})e^{-2\pi i\tilde{\omega}} & Q_1 e^{-2\pi i\tilde{\omega}} \\ \tilde{Q}_1 + i\tilde{\omega}q_{12}^{-1} & Q_2 - i\tilde{\omega} & -Q_2 v_2^{-2} e^{-2\pi i\tilde{\omega}} & (Q_2 - i\tilde{\omega})e^{-2\pi i\tilde{\omega}} \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

Здесь $q_{12} = Q_1/Q_2$, $\tilde{Q}_j = Q_1 + Q_2 + Q_j v_j^{-2} + i\tilde{\omega}$. Среди собственных частот, определяемых уравнением (27), присутствуют частоты $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_n = n$, $n \in Z$. Однако отвечающие им функции $u_i^\mu(\tau) = B_i^\mu e^{-in\tau}$ после подстановки в выражения (17), (12) и (10) приводят к возмущениям ротационного движения (14), которые получаются из последнего заменой координат

$$\tilde{\tau} \pm \tilde{\sigma} = f(\tau \pm \tilde{\sigma}) : \quad f(\xi + 2\pi) = f(\xi) + 2\pi, \quad f'(\xi) > 0, \quad \xi \in R,$$

на той же самой мировой поверхности. Замены координат указанного вида оставляют инвариантными уравнения (6), (7) и условия (5), (9), что свидетельствует о репараметризационной инвариантности действия (4), частично сохраняющейся даже после фиксации условий (5), (9) [2], [14]. Связанные с этими заменами осцилляции физически несущественны – соответствующие степени свободы можно интерпретировать как калибровочные или репараметризационные.

Если исключить не имеющие физического значения корни $\tilde{\omega}_n = n$, то уравнение (27) можно преобразовать к виду

$$\frac{(\tilde{\omega}^2 - q_1)(\tilde{\omega}^2 - q_2) - 4Q_1 Q_2 \tilde{\omega}^2}{2\tilde{\omega}[Q_1(\tilde{\omega}^2 - q_2) + Q_2(\tilde{\omega}^2 - q_1)]} = \operatorname{ctg} \pi \tilde{\omega}, \quad (28)$$

где $q_i = \theta^2(1 + v_i^2)/(1 - v_i^2)$. Трансцендентное уравнение (28) также имеет счетный набор вещественных корней $\tilde{\omega}_n \in (n - 1, n)$, которые при $n \geq 1$ удобно занумеровать так, что $\tilde{\omega}_1 > \theta$. Безразмерная частота вращения θ (14) является корнем уравнения (28), однако корню $\theta = \tilde{\omega}_0$ отвечает тривиальное возмущение, связанное со смещением начала координат относительно центра вращения прямолинейной струны. Частоты $\tilde{\omega}_n$, $n \geq 1$, после определения $X^\mu(\tau, \sigma)$ по формулам (10), (12) и (17) приводят к нетривиальным квазиротационным осцилляциям вращающейся струны в плоскости xOy .

Как и в случае z -осцилляций (22), квазиротационные колебания в плоскости вращения струны можно разложить в ряд по данным модам. При этом следует учесть, что эти моды – собственные функции, а корни уравнения (28) $\tilde{\omega}_n$ – собственные числа краевой задачи

$$y''(\sigma) + \tilde{\omega}^2 y = 0, \quad (\tilde{\omega}^2 - q_1)y(0) + 2Q_1 y'(0) = 0, \quad (\tilde{\omega}^2 - q_2)y(\pi) - 2Q_2 y'(\pi) = 0, \quad (29)$$

подобной задаче (24). Собственные функции

$$y_n(\sigma) = \cos(\tilde{\omega}_n \sigma + \tilde{\phi}_n), \quad \tilde{\phi}_n = \arctg \frac{\tilde{\omega}_n^2 - q_1}{2Q_1 \tilde{\omega}_n}, \quad n > 0, \quad \tilde{\omega}_0 \equiv \theta,$$

задачи (29) взаимно ортогональны в смысле скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle^* = \int_0^\pi f(\sigma)g(\sigma) d\sigma + \frac{f(0)g(0)}{2Q_1} + \frac{f(\pi)g(\pi)}{2Q_2}. \quad (30)$$

Таким образом, произвольное малое возмущение движения (14) струны с массивными концами (квазиротационное состояние) в пространстве $R^{1,3}$ можно разложить в следующий ряд, включающий гармоники двух описанных выше типов:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_{\text{rot}}^\mu(\tau, \sigma) + i \sum_{n \neq 0} \{ \alpha_n \omega_n^{-1} e_3^\mu \cos(\omega_n \sigma + \phi_n) e^{-i\omega_n \tau} + \beta_n [e_0^\mu f_n^0(\sigma) + \dot{e}^\mu(\tau) f_n^\perp(\sigma) + i e^\mu(\tau) f_n^\parallel(\sigma)] e^{-i\tilde{\omega}_n \tau} \}. \quad (31)$$

Здесь слагаемое X_{rot}^μ описывает чисто ротационное движение (14),

$$\begin{aligned} f_n^0(\sigma) &= (q_1 - \tilde{\omega}_n^2)(2\tilde{\omega}_n Q_1)^{-1} \cos \tilde{\omega}_n \sigma - \sin \tilde{\omega}_n \sigma, \\ f_n^\perp(\sigma) &= \Gamma_1(\Theta_n \tilde{\omega}_n - h_n v_1) C_\theta C_\omega - v_1^{-1} C_\theta S_\omega + \Gamma_1 \theta \Theta_n S_\theta S_\omega + h_n S_\theta C_\omega, \\ f_n^\parallel(\sigma) &= \Gamma_1(\Theta_n \tilde{\omega}_n - h_n v_1) S_\theta S_\omega + v_1^{-1} S_\theta C_\omega + \Gamma_1 \theta \Theta_n C_\theta C_\omega - h_n C_\theta S_\omega, \\ \Theta_n &= \frac{2\theta}{\tilde{\omega}_n^2 - \theta^2}, \quad h_n = \frac{1}{2} \left[\frac{\theta}{\tilde{\omega}_n} \left(\frac{1}{v_1} + v_1 \right) + \frac{\tilde{\omega}_n}{\theta} \left(\frac{1}{v_1} - v_1 \right) \right], \\ C_\theta(\sigma) &= \cos \theta \sigma, \quad S_\theta(\sigma) = \sin \theta \sigma, \quad C_\omega(\sigma) = \cos \tilde{\omega}_n \sigma, \quad S_\omega(\sigma) = \sin \tilde{\omega}_n \sigma, \\ \omega_{-n} &= -\omega_n, \quad \tilde{\omega}_{-n} = -\tilde{\omega}_n, \quad \alpha_{-n} = \overline{\alpha_n}, \quad \beta_{-n} = \overline{\beta_n}. \end{aligned}$$

Ряд Фурье (31) представлен здесь для $(3+1)$ -мерного случая, в котором присутствуют две независимые компоненты возмущения с амплитудами фурье-мод α_n и β_n . Нетрудно обобщить ряд (31) для произвольной размерности пространства $R^{1,D-1}$. Достаточно в этом выражении заменить α_n на вектор α_n^μ , ортогональный тройке e_0, e_1, e_2 .

Все входящие в ряд (31) корни ω_n и $\tilde{\omega}_n$ уравнений (21), (28) являются вещественными. Из этого можно сделать вывод о том, что ротационное движение (14) для релятивистской струны с массивными концами *устойчиво в линейном приближении*.

4. КВАЗИРОТАЦИОННЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ И ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ АДРОНОВ

Анализ спектра квазиротационных состояний релятивистской струны с массивными концами важен для прогресса в квантовании этой системы. Трудности в квантовании связаны с существенной нелинейностью краевых условий (7). Попытки преодоления этих трудностей за счет ограничения класса рассматриваемых движений и сведения его к движениям прямолинейной струны [4], [8] приводят к практически полному исключению струнных степеней свободы. В работе [14] было показано, что попытка ограничить класс движений струны с массивными концами условием линеаризуемости краевых условий (7) приводит в $(3 + 1)$ -мерном случае к тому же требованию прямолинейности струны – этот класс содержит лишь ротационные движения (14) и их простейшие обобщения.

Другая ситуация возникает, если в качестве рассматриваемого класса движений струны с массивными концами выбрать пространство $\mathcal{Q}$ квазиротационных состояний, описываемых рядом (31). Это пространство содержит счетный набор степеней свободы.

Вычислим важнейшие с точки зрения спектроскопии адронов характеристики струнных состояний (31) – энергию E и угловой момент J . Для произвольного состояния релятивистской струны с массивными концами они определяются с помощью следующих интегралов (токов Нётер) [2]:

$$P^\mu = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} p^\mu(\tau, \sigma) d\sigma + p_1^\mu(\tau) + p_2^\mu(\tau),$$

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (X^\mu p^\nu - X^\nu p^\mu) d\sigma + \sum_{i=1}^2 [x_i^\mu(\tau) p_i^\nu(\tau) - x_i^\nu(\tau) p_i^\mu(\tau)].$$

Здесь $p_i^\mu(\tau) = m_i U_i^\mu(\tau)$, $p^\mu(\tau, \sigma) = \gamma(-g)^{-1/2}[(\dot{X}, X')X'^\mu - X'^2 \dot{X}^\mu]$. В ортонормальной калибровке (5) $p^\mu(\tau, \sigma) = \gamma \dot{X}^\mu(\tau, \sigma)$.

Подставим в эти выражения ряд (31), записанный с учетом нелинейных поправок в виде

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_{\text{rot}}^\mu(\tau, \sigma) + x^\mu(\tau, \sigma) + \delta x^\mu(\tau, \sigma). \quad (32)$$

Здесь $x^\mu(\tau, \sigma)$ – сумма линейных по α_n, β_n слагаемых ряда (31), а $\delta x^\mu(\tau, \sigma)$ – поправки более высоких порядков по этим амплитудам. В итоге получим следующие классические выражения для полного 4-импульса и углового момента квазиротационных состояний (32):

$$P^\mu = e_0^\mu E_{\text{rot}} + \delta P^\mu, \quad (33)$$

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = j_3^{\mu\nu} \left(J_{\text{rot}} - \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 \frac{\gamma \theta B_{1,n}}{4Q_1^2 (\tilde{\omega}_n^2 - \theta^2)} Z_n \right) + \delta \mathcal{J}^{\mu\nu}. \quad (34)$$

Здесь $E_{\text{rot}} = e_0^\mu \sum_{i=1}^2 (\gamma \Omega^{-1} \arcsin v_i + m_i \Gamma_i)$ – энергия,

$$J_{\text{rot}} = \frac{1}{2\Omega} \left(E_{\text{rot}} - \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{\Gamma_i} \right) \quad (35)$$

– угловой момент ротационного движения струны (14), δP^μ , $\delta \mathcal{J}^{\mu\nu}$ – поправки, определяемые слагаемым $\delta x^\mu(\tau, \sigma)$ в (32). В формуле (34) введены обозначения

$$j_3^{\mu\nu} = e_1^\mu e_2^\nu - e_1^\nu e_2^\mu = e^\mu \dot{e}^\nu - e^\nu \dot{e}^\mu, \quad B_{i,n} = 4Q_i^2 + (\tilde{\omega}_n^2 - q_i)^2 \tilde{\omega}_n^{-2},$$

$$Z_n = \pi(3\tilde{\omega}_n^2 + \theta^2) + \sum_{i=1}^2 \left[\frac{16Q_i^3}{B_{i,n}} - \frac{v_i^2(\tilde{\omega}_n^2 - \theta^2)}{Q_i} \right]$$

и предполагается, что $\alpha_1 = 0$. Как было сказано выше, наличие такой моды эквивалентно наклону плоскости вращения.

В линейном по амплитудам α_n, β_n приближении равенство (33) сводится к виду $P^\mu = e_0^\mu E_{\text{rot}}$. Это означает, что энергия системы совпадает с энергией E_{rot} ротационного движения (14). Для каждой из гармоник (31) струнный вклад $\int p^\mu(\tau, \sigma) d\sigma$ в 4-импульс P^μ в этом приближении точно компенсируют импульсы концов $p_i^\mu = m_i U_i^\mu$.

Аналогичное равенство $P^\mu = p^\mu$ имеет место и для ряда Фурье, описывающего движение открытой струны без масс на концах [2], [15]

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \frac{p^\mu}{\pi\alpha'} \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{a_n^\mu}{n} \cos(n\sigma) e^{-in\tau} \quad (36)$$

в рамках условий ортонормальности (5). Ограничения (5) приводят к условиям Вирасоро, которым должны удовлетворять коэффициенты ряда (36). Эти условия определяют спектр масс данной системы, причем выражение $M^2 = P^2$ квадратично по амплитудам a_n^μ .

Для квазиротационных колебаний (31) струны с массивными концами можно также ожидать, что поправка δP^μ к энергии квадратична по амплитудам α_n, β_n . Однако ее вычисление по указанной выше схеме невозможно, так как ряды (31) и (32) по построению удовлетворяют условиям ортонормальности (5) (каждый в своем приближении).

В этой связи надо отметить, что порождающее поправку δP^μ слагаемое $\delta x^\mu(\tau, \sigma)$ в выражении (32) не определяется однозначно заданными амплитудами α_n, β_n в ряду (31), т.е. слагаемым $x^\mu(\tau, \sigma)$ в (32).

Наличие произвола в выборе δx^μ наглядно проявляется, если в качестве отправной точки рассмотреть поправки высших порядков к $U_i^\mu(\tau)$ – единичным векторам скорости концов струны (8). Любая из функций $U_i^\mu(\tau)$ с точностью до трансляций определяет мировую поверхность посредством выражений (10), (12). Более того, так как динамика системы сведена к уравнениям (13), то для определения $X^\mu(\tau, \sigma)$ достаточно задать на отрезке $I = [\tau_0, \tau_0 + 2\pi]$, например, единичную вектор-функцию

$$U_1^\mu(\tau) = U_{1(\text{rot})}^\mu(\tau) + u_1^\mu(\tau) + \delta u_1^\mu(\tau). \quad (37)$$

Здесь $U_{i(\text{rot})}^\mu$ – векторы (16), линейная поправка u_1^μ из выражения (17) для состояний (31) имеет вид

$$u_1^\mu(\tau) = \Omega v_1 \Gamma_1^2 \sum_{n \neq 0} \left\{ \frac{e_3^\mu \alpha_n e^{-i\omega_n \tau}}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + Q_1^2}} + \beta_n [e_0^\mu + v_1^{-1} \dot{e}^\mu + i h_n e^\mu] e^{-i\tilde{\omega}_n \tau} \right\}.$$

Нелинейная поправка $\delta u_1^\mu(\tau)$ может быть задана произвольно на отрезке I с единственным ограничением – требованием единичности вектора (37). Последнее условие с учетом (18) приводит к равенству

$$2(\delta u_1, U_{1(\text{rot})}) + u_1^2(\tau) = 0, \quad (38)$$

в котором опущены члены высших порядков малости по δu_1^μ .

Выражение δx^μ через δu_1^μ с учетом квадратичных по u_1^μ членов, полученное с помощью формул (10) и (12), имеет вид

$$\delta x^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} [\delta \psi_+^\mu(\tau + \sigma) + \delta \psi_-^\mu(\tau - \sigma)],$$

где

$$\begin{aligned} \delta \psi_\pm^\mu(\tau) &= \frac{m_1}{\gamma} \left[Q_1 \delta u_1^\mu(\tau) \pm \delta u_1'^\mu(\tau) - A u_1'^\mu - \frac{2(\delta u_1', U_{1(\text{rot})}') + u_1'^2 + A^2}{2Q_1} U_{1(\text{rot})}^\mu \right], \\ A(\tau) &= (u_1'(\tau), U_{1(\text{rot})}'(\tau)) Q_1^{-1}. \end{aligned}$$

Эти выражения определяют поправки δP^μ , $\delta \mathcal{J}^{\mu\nu}$ в формулах (33), (34), зависящие от выбора произвольной функции $\delta u_1^\mu(\tau)$ в (37) на отрезке $I = [\tau_0, \tau_0 + 2\pi]$. Произвол ограничен лишь условием (38), что эквивалентно уменьшению на единицу числа независимых компонент вектор-функции $\delta u_1^\mu(\tau)$. Интегралы, приводящие к поправкам δP^μ , $\delta \mathcal{J}^{\mu\nu}$, не зависят от выбора сечения $\tau = \tau_1 = \text{const}$ мировой поверхности, по которому ведется интегрирование. Эти интегралы содержат как слагаемые, квадратичные по u_1^μ (следовательно, квадратичные по α_n , β_n), так и слагаемые, пропорциональные значениям произвольной функции δu_1^μ при фиксированных τ и интегралам от нее по промежутку I .

Таким образом, произвол в выборе δu_1^μ не позволяет определить однозначно квадратичные поправки к энергии и моменту. Используя этот произвол, мы можем выбрать такое возмущение $\delta u_1^\mu(\tau)$, при котором поправка δP^μ и составляющая $\delta \mathcal{J}^{\mu\nu}$, пропорциональная $j_3^{\mu\nu}$ (проекция момента на ось Oz), обращаются в нуль в данном приближении. Ниже мы предполагаем именно такой выбор δu_1^μ .

В теории струн, не нагруженных массами, выражение (36) (как и ряд Фурье для замкнутой струны) является аналогом разложения поля $X^\mu(\tau, \sigma)$ по плоским волнам [15]. Пользуясь этой аналогией, для струны с массивными концами можно трактовать амплитуды α_n , β_n различных мод в выражении (31) как величины, пропорциональные операторам рождения и уничтожения в пространстве Фока. Последнее включает квазиротационные состояния пространства $\mathcal{Q}$, причем чисто ротационное движение (14) $X^\mu = X_{\text{rot}}^\mu$ выступает в качестве вакуумного состояния $|0\rangle$.

Введем скобки Пуассона действующих в $\mathcal{Q}$ функционалов

$$\{F, G\} = \frac{1}{\gamma} \left[\int_0^\pi \left(\frac{\delta F}{\delta \dot{X}^\mu} \frac{\delta G}{\delta X_\mu} - \frac{\delta F}{\delta X^\mu} \frac{\delta G}{\delta \dot{X}_\mu} \right) d\sigma + \sum_{i=1}^2 Q_i \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i^\mu} \frac{\partial G}{\partial x_{i\mu}} - \frac{\delta F}{\delta x_i^\mu} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_{i\mu}} \right) \right],$$

где $x_i^\mu(\tau) = X^\mu(\tau, \sigma_i)$. Вычислим амплитуды α_n, β_n , используя ряд (31) и скалярные произведения (25), (30),

$$\alpha_n = -\frac{e^{i\omega_n \tau}}{\Pi_n} e_{3\mu} \langle \dot{X}^\mu - i\omega_n X^\mu, w_n \rangle, \quad \beta_n = -\frac{2Q_1 e^{i\tilde{\omega}_n \tau}}{\tilde{\Pi}_n \tilde{\omega}_n B_{1,n}} e_{0\mu} \langle \dot{X}'^\mu - i\tilde{\omega}_n X'^\mu, y_n \rangle^*.$$

Здесь

$$\Pi_n = 2\langle w_n, w_n \rangle = \pi + \sum_{i=1}^2 \frac{Q_i}{Q_i^2 + \omega_n^2}, \quad \tilde{\Pi}_n = \pi + \sum_{i=1}^2 \frac{2Q_i(\tilde{\omega}_n^2 + q_i)}{B_{i,n}}.$$

Найдем скобки Пуассона для амплитуд α_n, β_n ,

$$\{\alpha_m, \alpha_n\} = -i\lambda_m \delta_{m+n,0}, \quad \{\beta_m, \beta_n\} = -i\tilde{\lambda}_m \delta_{m+n,0}, \quad \{\alpha_m, \beta_n\} = 0,$$

где

$$\lambda_m = \frac{\omega_m}{\gamma \Pi_m}, \quad \tilde{\lambda}_m = \frac{4Q_1^2(\tilde{\omega}_m^2 - \theta^2)}{\gamma \theta B_{1,m} Z_m}.$$

Это позволяет определить коммутационные соотношения для операторов α_n, β_n в рамках стандартной процедуры квантования:

$$[\alpha_m, \alpha_n] = \lambda_m \delta_{m+n,0}, \quad [\beta_m, \beta_n] = \tilde{\lambda}_m \delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m, \beta_n] = 0. \quad (39)$$

Однако такое описание квазиротационных состояний (31) содержит отличия от обычной схемы квантования открытой струны, представленной рядом (36). Они связаны с упомянутым выше произволом в выборе возмущений второго порядка δx^μ в (32) или δu_1^μ в (37). Рассмотрим простейшую схему такого выбора, при которой, как было сказано выше, энергия системы в рассматриваемом порядке $E = E_{\text{rot}}$.

Учитывая коммутационные соотношения (39), определим операторы уничтожения и рождения в пространстве Фока $\mathcal{Q}$ следующим образом:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \alpha_n, \quad a_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \alpha_{-n}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_n}} \beta_n, \quad b_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_n}} \beta_{-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Они подчиняются соотношениям

$$[a_m, a_n^\dagger] = [b_m, b_n^\dagger] = \delta_{m,n}, \quad [a_m, b_n^\dagger] = 0.$$

В этих обозначениях оператор момента (34) принимает вид

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = j_3^{\mu\nu} \left(J_{\text{rot}} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^\dagger b_n \right) + \delta \mathcal{J}^{\mu\nu}. \quad (40)$$

Здесь J_{rot} — c -числовое слагаемое (35).

Действие операторов рождения $b_n^\dagger$ на вакуумное состояние $|0\rangle$ (которое, напомним, отождествляется с классическим ротационным движением $X^\mu = X_{\text{rot}}^\mu$) порождает квазиротационные состояния $b_n^\dagger |0\rangle$ пространства $\mathcal{Q}$. Значения z -компоненты углового момента (40) для этих возбуждений равно $J_{\text{rot}} - 1$ (здесь $\hbar = 1$), если, как предполагалось выше, поправка $\delta \mathcal{J}^{\mu\nu}$ этой компоненты не содержит. Таким образом, по отношению к вращению струны (14) эти возбуждения можно интерпретировать как адронные состояния с тем же значением массы (энергии) $E = E_{\text{rot}}$, но с меньшим на единицу значением углового момента.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованные в работе малые колебания вращающейся релятивистской струны с массивными концами могут быть использованы в спектроскопии адронов. Наибольший интерес в этой связи представляют колебания в плоскости вращения струны. На классическом уровне они имеют вид стоячих волн – каждому слагаемому ряда (31) с множителем β_n отвечает стоячая волна с n узлами (которые, однако, не являются неподвижными [12]). Массивные концы также участвуют в колебаниях – их траектории близки к эллипсам в системе отсчета, вращающейся со струной.

В рамках подхода, развитого в разделе 4 и включающего сделанные предположения относительно поправок δP^μ и $\delta \mathcal{J}^{\mu\nu}$, возмущенные состояния указанного типа обладают значениями энергии и углового момента соответственно $E = E_{\text{rot}}$ и $J = J_{\text{rot}} - 1$. Следовательно, с их помощью можно описывать возбуждения адронов, лежащие на дочерних траекториях Редже. Эти траектории имеют тот же наклон $\alpha' = 1/(2\pi\gamma)$, что и основная траектория, на которой расположены орбитальные возбуждения адронов, описываемые с помощью ротационных состояний (14) струны с массивными концами [5], [6].

Список литературы

- [1] A. Chodos, C.B. Thorn. Nucl. Phys. B. 1974. V. 72. № 3. P. 509; Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко. ТМФ. 1977. Т. 31. № 2. С. 291.
- [2] Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [3] И.Ю. Кобзарев, Б.В. Мартеньянов, М.Г. Щепкин. УФН. 1992. Т. 162. № 4. С. 1.
- [4] Л.Д. Соловьев. ТМФ. 1998. Т. 116. № 2. С. 225; L.D. Soloviev. Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 015009; hep-ph/9907486.
- [5] Г.С. Шаров. ЯФ. 1999. Т. 62. № 10. С. 1831.
- [6] A. Inopin, G.S. Sharov. Phys. Rev. D. 2001. V. 63. № 5. P. 054023.
- [7] M. Ida. Prog. Theor. Phys. 1978. V. 59. № 5. P. 1661.
- [8] D. LaCourse, M.G. Olsson. Phys. Rev. D. 1989. V. 39. № 9. P. 2751.
- [9] V.V. Nesterenko. Z. Phys. C. 1990. V. 47. № 1. P. 111.
- [10] T.J. Allen, M.G. Olsson, S. Veseli. Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 094011; Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 074026; hep-ph/9903222.
- [11] A.M. Polyakov. Phys. Lett. B. 1981. V. 103. № 2. P. 207.
- [12] G.S. Sharov. Phys. Rev. D. 2000. V. 62. № 9. P. 094015; hep-ph/0004003.
- [13] Г.С. Шаров. ТМФ. 1996. Т. 107. № 1. С. 86.
- [14] В.П. Петров, Г.С. Шаров. ТМФ. 1996. Т. 109. № 2. С. 187.
- [15] М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен. Теория суперструн. Т. 1. М.: Мир, 1990.

Поступила в редакцию 29.IX.2003 г.,
После доработки 5.I.2004 г.