Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Обухов, Калибровочные поля и геометрия пространства-времени, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 2, 249–262

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf930>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:23:42

© 1998 г.

Ю. Н. Обухов*

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ И ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Рассматриваются отображения между $SU(2)$ -калибровочной теорией Янга–Миллса и калибровочной теорией гравитации. Глобальные аспекты обсуждаются в рамках формализма расслоений, и дается подробное описание трех локальных конструкций (в зависимости от существования фиксированной фоновой метрики).

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятия калибровочной симметрии и калибровочного поля лежат в основе современных представлений о природе физических взаимодействий. Математические формулировки выявляют важную роль расслоений и их геометрических и топологических свойств [1]. Существуют два типа калибровочных полей, которые отвечают “внутренним” и “внешним” (или пространственно-временным) симметриям. Пространственно-временные симметрии и “внешние” калибровочные поля связаны с гравитацией. Эйнштейновская общая теория относительности, которая описывает гравитационные явления на больших расстояниях, хорошо понятна в рамках калибровочного подхода на основе группы диффеоморфизмов пространства-времени и так называемого предела телепараллелизма для калибровочной группы Пуанкаре. На малых расстояниях можно естественным образом ожидать расширения теории до общей пуанкаре- (и/или конформной и аффинной) калибровочной теории гравитации [2]. “Внутренние” калибровочные теории электрослабых и сильных взаимодействий (стандартная модель и квантовая хромодинамика) успешно описывают явления в физике частиц высоких энергий [3]. Эти модели обычно основаны на унитарных группах $U(1)$, $SU(N)$, $N = 2, 3, \dots$, хотя ряд схем “великого объединения” иногда строится на основе ортогональных или исключительных групп. Неоднократно предпринимались попытки связать “внешние” и “внутренние” калибровочные теории. Некоторый прогресс был недавно достигнут в рамках супергравитации и теории суперструн. С геометрической точки зрения связи между “внешней” и “внутренней” геометриями строятся в этих моделях с помощью определенных вложений их в более сложную структуру, такую как супергеометрия и бесконечномерная геометрия протяженных объектов.

В то же время можно установить формальные связи между “внешней” и “внутренней” геометриями более непосредственным образом. В качестве первого примера отметим

*Институт теоретической физики, Университет Кельна, Кельн, ФРГ

подход Аштекара в квантовой гравитации [4]. Общая теория относительности оперирует с геометрией четырехмерного многообразия, описываемой посредством (псевдо) римановой метрической структуры, причем в каноническом подходе центральную роль играет 3-геометрия пространства. В подходе Аштекара вводится фундаментальная структура *связности* на основе калибровочной $SO(3) \cong SU(2)$ -группы таким образом, что “внешняя” метрическая 3-геометрия возникает как “эффективная” структура из “внутренней” калибровочной структуры янг-миллсовского типа со специальным функционалом Гамильтона. Замечательным образом этот подход допускает ясную формулировку в рамках пуанкаре-калибровочной теории [5]. Более того, доказательство положительности энергии значительно упрощается в новых полевых переменных [6]. Таким образом, подход Аштекара можно рассматривать как реализацию отображений некоторой “внутренней” калибровочной теории во “внешнюю” калибровочную теорию.

Существуют примеры отображений в “противоположном направлении”. Калибровочная теория Янга–Миллса для группы $SU(N)$ ($N = 2, 3, \dots$) лежит в основе квантовой хромодинамики (КХД), которая удовлетворительно описывает адронные явления при больших значениях переданного импульса [7]. Асимптотическая свобода позволяет использовать теорию возмущений. В работе [7] отмечалось: “Однако наиболее важные явления в сильных взаимодействиях нельзя описать пертурбативными методами, и в настоящее время “непертурбативная КХД” является для нас величайшим вызовом”. Адроны рассматриваются как элементарные возбуждения вакуума КХД, и полное понимание природы адронов существенным образом связано с проблемой вакуума (основного состояния) в модели Янга–Миллса. Проблема глюонной материи (глюоболов, описываемых посредством одних только полей Янга–Миллса) также связана со структурой вакуума КХД. Исследуя последнюю в явно калибровочно-инвариантном формализме, авторы работ [8] предложили подход, в котором динамика полей Янга–Миллса в $(2+1)$ и $(3+1)$ измерениях формулируется в терминах “эффективной” метрической римановой геометрии на 3-пространстве. Независимо Лунев в серии статей [9] показал возможность “индуцирования” геометрии Римана–Картана в $SU(2)$ -калибровочной теории Янга–Миллса. В рамках $SU(3)$ -модели КХД в работе [10] построена калибровочная теория гравитации для группы диффеоморфизмов. Геометрическое обсуждение этих построений было дано в статье [11]. Наконец, недавно еще один альтернативный подход был предложен в [12].

В данной работе обсуждаются локальные и глобальные аспекты отображений между “внутренней” $SU(2)$ -калибровочной теорией Янга–Миллса и “внешней” пуанкаре-калибровочной теорией.

Эта статья посвящена памяти Федора Александровича Лунева, с которым мы много лет взаимодействовали в научном и личном плане и который внес весомый вклад в развитие проблемы.

2. РАССЛОЕНИЯ И СВЯЗНОСТИ

Пусть M – гладкое многообразие, $P(M, G)$ и $P'(M, G')$ суть главные расслоения над M со структурными группами G и G' , соответственно. Пусть $f': G' \rightarrow G$ – гомоморфизм структурных групп. Отображение $f: P' \rightarrow P$ называется гомоморфизмом главных расслоений, если $f(u'g') = f(u')f'(g')$ для всех точек $u' \in P'$ и групповых эле-

ментов $g' \in G'$. Связности в P' и P соотносятся следующим образом [13]: если гомоморфизм расслоений $f: P'(M, G') \rightarrow P(M, G)$ таков, что индуцированное им отображение $f: M \rightarrow M$ является диффеоморфизмом, то для любой связности Γ' в P' с некоторой 1-формой связности ω' существует единственная связность Γ в P такая, что соответствующая 1-форма связности ω удовлетворяет условию

$$f'(\omega'(X')) = \omega(f_* X') \quad (2.1)$$

для любых векторов $X' \in T_u P'$, $u' \in P'$. Здесь, как обычно, f_* обозначает дифференциал отображения f , в то время как f' в левой части – гомоморфизм соответствующих алгебр Ли $\mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$, индуцированный отображением групп $f': G' \rightarrow G$. Гомоморфизм f отображает Γ' -горизонтальные подпространства P' в горизонтальные подпространства Γ в P .

Далее, положим $G' = SU(2)$ и $G = SO(3)$. Связности в главных расслоениях P' и P описывают соответственно $SU(2)$ - и $SO(3)$ -калибровочные поля янг-миллсовского типа [1]. Группа $SU(2)$ является двулистным накрытием группы $SO(3)$. Следовательно, соответствующие алгебры Ли изоморфны, $su(2) \approx so(3)$. Накрывающий гомоморфизм $f': SU(2) \rightarrow SO(3)$ порождает специальный гомоморфизм расслоений $f: P'(M, SU(2)) \rightarrow P(M, SO(3))$. Соответственно существует отображение связностей в этих расслоениях, которое фактически описывает трансформацию одной калибровочной модели в другую.

Полезно проследить, как гомоморфизм групп порождает гомоморфизм расслоений. Наиболее простая конструкция главного расслоения $P(M, G)$ реализуется в терминах открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ многообразия M и функций перехода. Как известно [13, 1], каждое расслоение $P(M, G)$ единственным образом определяется над M заданием открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ и набора отображений $\psi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, которые определены в любом непустом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \subset M$, так что в каждом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ функции перехода удовлетворяют условию совместности

$$\psi_{\gamma\alpha}(x) = \psi_{\gamma\beta}(x)\psi_{\beta\alpha}(x), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \subset M. \quad (2.2)$$

Исходя из главного расслоения $P'(M, SU(2))$ рассмотрим открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ и соответствующие функции перехода $\psi'_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow SU(2)$. Для того же самого покрытия M определим функции перехода $\psi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow SO(3)$ соотношением

$$\psi_{\beta\alpha} = f' \circ \psi'_{\beta\alpha}. \quad (2.3)$$

Напомним, что гомоморфизм групп f' описывается уравнением $\sigma_b \Lambda^b_a = g \sigma_a g^{-1}$, где $\Lambda^b_a \in SO(3)$, $g \in SU(2)$ и σ_a суть (2×2) -матрицы Паули. Очевидно, что $f'(g_1 g_2) = f'(g_1) f'(g_2)$, и мы легко убеждаемся, что условие совместности (2.2) выполнено. Построенные функции перехода $\psi_{\beta\alpha}$ единственным образом определяют главное расслоение $P(M, SO(3))$. Полученный гомоморфизм расслоений порождает связность в P из связности в P' . В физических терминах данная схема индуцирует $SO(3)$ -калибровочный потенциал Γ^{ab} из $SU(2)$ -калибровочного поля A^a . Локально имеем, что

$$\Gamma^{ab} = A^c \varepsilon_c^{ab}. \quad (2.4)$$

Описанная конструкция существует на многообразии M любой размерности. Однако размерности 3 и 4 представляют наибольший интерес как с физической точки зрения, так и из-за некоторых специфических свойств $SU(2)$ - и $SO(3)$ -калибровочных теорий в данных размерностях.

Рассмотрим теперь геометрию Римана–Картана на многообразии M . По определению пространство-время Римана–Картана есть n -мерное гладкое многообразие M вместе с метрикой $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, задаваемой полями *ортонормированных* реперов и кореперов,

$$e_\alpha = e^i_\alpha \partial_i, \quad \vartheta^\beta = \vartheta_j^\beta dx^j, \quad (2.5)$$

и с линейной связностью

$$\Gamma^{\alpha\beta} = \Gamma_i^{\alpha\beta} dx^i = -\Gamma^{\beta\alpha}. \quad (2.6)$$

Мы используем обозначения работ [2, 11]. В частности, греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 0, 1, \dots, n-1$ нумеруют компоненты неголономных реперов, тогда как латинские индексы $i, j, k, \dots = 0, 1, \dots, n-1$ относятся к мировым (голономным) координатам; $\wedge$ и $\rfloor$ обозначают внешнее и внутреннее произведения, соответственно. Неголономные индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики плоского пространства

$$g_{\alpha\beta} = e^i_\alpha e^j_\beta g_{ij} = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_s, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-s}).$$

Для $s = 1$ мы имеем лоренцеву сигнатуру пространства Минковского, для $s = 0$ получаем евклидово пространство. Метрика $g_{\alpha\beta}$ определяет оператор дуализации Ходжа на M (обозначаемый в дальнейшем знаком $*$).

В n -мерной пуанкаре-калибровочной теории (случай $n = 4$ см., например, в [2]) 1-формы корепера ϑ^α и связности $\Gamma^{\alpha\beta}$ рассматриваются как *калибровочные потенциалы*, отвечающие локальным трансляциям и локальным лоренцевым преобразованиям, соответственно. Напряженности калибровочных полей даются для трансляции 2-формой кручения

$$T^\alpha := D\vartheta^\alpha = d\vartheta^\alpha + \Gamma_\beta^\alpha \wedge \vartheta^\beta = \frac{1}{2} T_{ij}^\alpha dx^i \wedge dx^j \quad (2.7)$$

и для локальных лоренцевых преобразований – 2-формой кривизны

$$R^{\alpha\beta} := d\Gamma^{\alpha\beta} + \Gamma_\gamma^{\alpha\beta} \wedge \Gamma^{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} R_{ij}^{\alpha\beta} dx^i \wedge dx^j = -R^{\beta\alpha}. \quad (2.8)$$

Форма кривизны антисимметрична по индексам α и β . В общем случае кривизна Римана–Картана имеет больше неприводимых компонент, чем риманова кривизна.

При размерности $n \geq 3$ кручение и кривизна удовлетворяют тождествам Бианки

$$DT^\alpha - R_\gamma^\alpha \wedge \vartheta^\gamma \equiv 0, \quad DR_\alpha^\beta \equiv 0. \quad (2.9)$$

Теория гравитации Эйнштейна–Картана в пространстве-времени любого числа измерений определяется лагранжианом Гильберта–Эйнштейна

$$L_{\text{HE}} = -\frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \wedge R^{\alpha\beta}, \quad (2.10)$$

где $\eta_{\alpha\beta} := *(\vartheta_\alpha \wedge \vartheta_\beta)$. Интересно отметить, что при $n = 3$ этот лагранжиан описывает топологическую (так называемую BF) теорию поля.

3. ТЕОРИЯ ЯНГА–МИЛЛСА В ЧЕТЫРЕХ И ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Рассмотрим $SU(2)$ -калибровочную теорию на плоском пространстве-времени Минковского M . Это четырехмерное многообразие, $\dim M = 4$, которое имеет структуру произведения $R \times \underline{M}$ с плоским евклидовым 3-мерным пространством $\underline{M}$. Хотя M и $\underline{M}$ оба являются плоскими и калибровочная теория ковариантна относительно глобальных лоренцевых преобразований декартовых координат на M и $\underline{M}$, ясно, что всегда можно использовать произвольные криволинейные координаты. Действительно, все основные физические объекты являются внешними формами: 1-форма потенциала калибровочного поля $A = A^a \tau_a$ и 2-форма

$$F = \left(dA^a + \frac{1}{2} \varepsilon^a_{bc} A^b \wedge A^c \right) \tau_a$$

напряженности калибровочного поля. Эти формы не зависят от локальных координат (матрицы τ_a образуют базис алгебры Ли). Будем обозначать произвольные локальные координаты t (или x^0) на R и x^i , $i = 1, 2, 3$, на $\underline{M}$. (Псевдо) риманова структура вводится на M метрикой Минковского g с лоренцевой сигнатурой $(-, +, +, +)$. Эта геометрическая структура не зависит от полей Янга–Миллса и трактуется как фиксированный фон. Выберем локальные координаты $\{t, x^i\}$, в которых

$$g = -dt \otimes dt + \underline{g} = -dt \otimes dt + \underline{g}_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad (3.1)$$

где $\underline{g} = \underline{g}_{ij} dx^i \otimes dx^j$ – положительно-определенная 3-метрика. Последняя является плоской, т.е. существует преобразование от x^i к координатам x'^i , в которых $\underline{g}'_{ij} = \delta_{ij}$. Здесь и далее подчеркнутые величины – трехмерные объекты и операторы на $\underline{M}$. В частности, d – полный четырехмерный внешний дифференциал, а 3-дифференциал на $\underline{M}$ обозначается $\underline{d}$. В локальных координатах имеем $d = dt \partial_0 + dx^i \partial_i$, $\underline{d} = dx^i \partial_i$.

Предположим, что временная координата t фиксирована. Такое координатное калибровочное условие определяет $(1+3)$ -разбиение M . Нетрудно построить $(1+3)$ -разбиение [5] теории Янга–Миллса на M ,

$$A = dt A_0 + \underline{A}, \quad F = dt \wedge E + B. \quad (3.2)$$

Напряженности поля Янга–Миллса разбиваются на “электрическую” и “магнитную” части, определяемые соответственно соотношениями

$$E := \underline{A} - \underline{D} A_0, \quad B := \underline{F} = \underline{d} \underline{A} + \underline{A} \wedge \underline{A}, \quad (3.3)$$

где $\underline{A} = \partial_0 \underline{A}$ – временная производная потенциала. Инфинитезимальное калибровочное преобразование разбивается на пару преобразований $\delta A_0 = -D_t \xi$, $\delta \underline{A} = -\underline{D} \xi$, где $\xi = \xi^a \tau_a$ – параметр бесконечно малого преобразования и $D_t := \partial_0 + [A_0, \cdot]$, $\underline{D} := \underline{d} + [\underline{A}, \cdot]$. “Электрическая” и “магнитная” части преобразуются соответственно как $\delta E = [\xi, E]$ и $\delta B = [\xi, B]$.

Лагранжиан Янга–Миллса

$$L_{YM} = -\frac{1}{2} F^a \wedge {}^* F_a,$$

где $*$ обозначает четырехмерную дуализацию Ходжа (определенную метрикой (3.1)), представляется в виде

$$L_{YM} = \frac{1}{2} dt \wedge (E^a \wedge^* E_a - B^a \wedge^* B_a), \quad (3.4)$$

где $\underline{*}$ обозначает 3-мерную дуализацию Ходжа, которая задается плоской фоновой 3-метрикой $\underline{g}$. Уравнения поля, получающиеся из этого лагранжиана, имеют вид

$$\underline{D}^* E = 0, \quad \underline{D}^* B = -D_t^* E, \quad (3.5)$$

$$\underline{D} B = 0, \quad \underline{D} E = D_t B. \quad (3.6)$$

В гамильтоновой формулировке теории Янга–Миллса “электрическая” трехмерная 1-форма E дуальна импульсу, канонически-сопряженному к $\underline{A}$. Нестационарная компонента A_0 играет роль лагранжева множителя. Это отражает известный факт наличия связей в теории из-за калибровочной симметрии. Во многих случаях удобно выбрать калибровочное условие $A_0 = 0$ и редуцировать теорию только к динамике канонических переменных $\underline{A}$, E . Такая эффективная 3-мерная модель может быть проквантована обычным образом [8].

4. ТРЕХМЕРНЫЕ ГЕОМЕТРИИ РИМАНА–КАРТАНА, ПОРОЖДЕННЫЕ $SU(2)$ -КАЛИБРОВОЧНЫМ ПОЛЕМ

Существует несколько отображений трехмерной теории Янга–Миллса в эффективные геометрии Римана–Картана. Они не эквивалентны друг другу, и поэтому имеет смысл рассмотреть все возможные формулировки. Данные отображения описывают построение 1-формы корепера θ^a из 1-формы $SU(2)$ -калибровочного поля A^a или из соответствующей 1-формы $SO(3)$ -связности Γ^{ab} . Заметим, что все эти объекты определены на 3-мерном многообразии $\underline{M}$ и имеют 9 независимых компонент каждый. Кривизна Римана–Картана и кручение также имеют по 9 компонент в трех измерениях.

4.1. Отображение Лунева. Отображение Лунева [9] определено при наличии фиксированной фоновой геометрии (например, пространства Минковского), что позволяет явно построить действие Янга–Миллса.

Перепишем лагранжиан (3.4) в форме теории первого порядка. Это достигается с помощью двух вспомогательных полей, 1-формы Θ_a и 2-формы π_a (преобразующихся ковариантным образом под действием калибровочной группы):

$$L_{YM} = dt \wedge \left(\pi_a \wedge E^a - \frac{1}{2} \pi_a \wedge^* \pi^a - \Theta_a \wedge B^a + \frac{1}{2} \Theta_a \wedge^* \Theta^a \right). \quad (4.1)$$

После этого легко установить отображение Лунева следующим образом. Для каждой трехмерной янг-миллсовской конфигурации $(\underline{A}^a, \Theta^a)$ определим *трехмерную эффективную геометрию Римана–Картана* соотношениями (сравните с (2.4))

$$\underline{\Gamma}^{ab} = A^c \varepsilon_c^{ab}, \quad \underline{\theta}^a = \Theta^a. \quad (4.2)$$

Третий член в лагранжиане (4.1), таким образом, является стандартным лагранжианом Гильберта–Эйнштейна (2.10):

$$-\Theta_a \wedge B^a = -\frac{1}{2} \eta_{ab} \wedge \underline{R}^{ab}. \quad (4.3)$$

Выведем эффективные “гравитационные” уравнения поля. Независимая вариация (4.1) относительно Γ^{ab} и θ^a приводит соответственно к равенствам

$$\underline{T}^a = -D_t \pi^a, \quad \underline{R}^{ab} = \varepsilon^{abc} * \theta_c. \quad (4.4)$$

Заметим, что в общем случае эффективная пространственная геометрия действительно является геометрией Римана–Картана с нетривиальными кривизной и кручением. Очевидно, в частности, что кручение в (4.4) не исчезает для нестатических конфигураций. Однако и в статическом случае эффективное кручение отлично от нуля, если $A_0 \neq 0$. Эффективная метрика (поле кореперов) удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (4.4), которые можно переписать в форме

$$\underline{R}^{ab} = \Lambda \theta^a \wedge \theta^b + 2\Lambda^a{}_{[c} \theta^{b]} \wedge \theta^c. \quad (4.5)$$

Здесь тензор

$$\Lambda^{ab} := \frac{\sqrt{\det g}}{\det \theta} \theta_i^a \theta_j^b g^{ij} \quad (4.6)$$

описывает влияние фиксированной фоновой геометрии пространства-времени на эффективную геометрию, $\Lambda := \Lambda^a{}_a$. В общем случае вместо пространства-времени Минковского можно рассматривать произвольное искривленное пространство-время.

4.2. Отображение Фридмана. В отличие от отображения Лунева отображение Фридмана [8] определено на пространственно-временном многообразии даже в отсутствие фоновой метрической структуры.

Предположим, что на трехмерном многообразии M задана $SO(3)$ -связность Γ_α^β . Тогда на M можно ввести геометрию Римана–Картана. Описываемая ниже конструкция специфична для размерности 3 и для калибровочной группы $SO(3)$. Заметим, что M изначально не имеет метрики, но специальная риманова структура индуцируется на M связностью Γ_α^β , если выполнены некоторые необходимые условия. Как мы уже выяснили выше, $SO(3)$ -калибровочная теория может рассматриваться как *индуцированная*, возникающая из $SU(2)$ -калибровочной модели. В этом смысле описанная в данном разделе конструкция фактически определяет построение *внешней* геометрии (т.е. обычной геометрии на самом многообразии) из *внутренней* геометрии расслоенного пространства.

Центральным пунктом оригинального отображения Фридмана является введение неголономного корепера ϑ^α уравнением

$$R^{\alpha\beta} = \vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta. \quad (4.7)$$

Левая часть зависит только от связности, и требуется разрешить это уравнение относительно корепера. После этого риманова метрика определяется как

$$g = g_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha \otimes \vartheta^\beta, \quad g_{ij} = g_{\alpha\beta} \vartheta_i^\alpha \vartheta_j^\beta. \quad (4.8)$$

Ниже мы дадим *формальное* не зависящее от координат решение наряду с явным решением в локальных координатах. В качестве предварительного шага заметим, что уравнение (4.7) имеет 9 компонент, как и число компонент корепера в трех измерениях.

Формальное решение очень простое. Свернув уравнение (4.7) с тензором $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}/2$ и используя оператор дуализации Ходжа, определенный метрикой (4.8), найдем

$$\vartheta^\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \# R_{\alpha\beta}. \quad (4.9)$$

Однако имеется одна тонкость. Оператор, отмеченный знаком $\#$ в правой части (4.9), содержит детерминант метрики (4.8), который также следует выразить через компоненты связности. Здесь и далее мы используем обозначение $\#$, чтобы подчеркнуть отличие этого оператора от обоих операторов Ходжа, помеченных знаками $*$ и $\sharp$, которые задаются *фоновыми* метрическими структурами. Описанную проблему проще всего исследовать в локальных координатах.

Вспоминая, что компоненты кривизны определяются из соотношения

$$\begin{aligned} R_\alpha{}^\beta &= \frac{1}{2} R_{ij\alpha}{}^\beta dx^i \wedge dx^j = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i \Gamma_{j\alpha}{}^\beta - \partial_j \Gamma_{i\alpha}{}^\beta + \Gamma_{i\gamma}{}^\beta \Gamma_{j\alpha}{}^\gamma - \Gamma_{j\gamma}{}^\beta \Gamma_{i\alpha}{}^\gamma) dx^i \wedge dx^j, \end{aligned} \quad (4.10)$$

получим из (4.7) с помощью внешнего произведения с ϑ^γ формулу

$$R^{\alpha\beta} \wedge \vartheta^\gamma = \frac{1}{2} R_{ij}{}^{\alpha\beta} \vartheta_k{}^\gamma dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\gamma = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \eta, \quad (4.11)$$

где 3-форма объема есть $\eta := \# 1 = \det \vartheta d^3 x$. Используя тождество $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \varepsilon^{ijk} d^3 x$, найдем, что

$$\frac{1}{4} \varepsilon_{\alpha\beta\mu} \varepsilon^{ijk} R_{ij}{}^{\alpha\beta} \vartheta_k{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu \det \vartheta. \quad (4.12)$$

Данное уравнение имеет смысл, только если зависящая от связности (3×3) -матрица

$$B_\mu{}^k := \frac{1}{4} \varepsilon_{\alpha\beta\mu} \varepsilon^{ijk} R_{ij}{}^{\alpha\beta} \quad (4.13)$$

не вырождена. Тогда соотношение (4.12) дает $\det B = (\det \vartheta)^2$, и окончательно получаем компоненты *репера* в виде

$$e_\mu{}^k = \frac{B_\mu{}^k}{\sqrt{\det B}}. \quad (4.14)$$

Компоненты корепера $\vartheta_i{}^\alpha$ составляют обратную матрицу.

Таким образом, необходимым условием существования данной структуры Римана–Картана является невырожденность матрицы (4.13). Заметим, что в обеих частях равенства (4.12) присутствует нумерический объект ε , однако все соотношение целиком является общекоординатно-ковариантным.

Интересно отметить, что уравнения поля в подходе Лунева (4.5) сводятся к фундаментальному соотношению (4.7) в подходе Фридмана, если $\Lambda^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$. Как вытекает из определения (4.6), это означает, что действительно на M не существует иной независимой метрической структуры, кроме индуцированной геометрии $\underline{g}_{ij} = g_{ij}$.

Рассмотрим основные свойства геометрии Римана–Картана, определяемой уравнением (4.7). Имея решение для корепера, получаем пуанкаре-калибровочные поля $(\vartheta^\alpha, \Gamma_\beta^\alpha)$, соответствующие 2-формы напряженностей суть исходная $SO(3)$ -кривизна и кручение $T^\alpha = D\vartheta^\alpha$. По построению репера кривизна Римана–Картана постоянна, что выражает соотношение (4.7). В терминах компонент кривизны

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu$$

уравнение (4.7) дает уравнение

$$R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta, \quad (4.15)$$

так что тензор Риччи имеет вид $A_\beta{}^\alpha := R_{\beta\nu}{}^{\alpha\nu} = 2\delta_\beta^\alpha$ и скаляр кривизны равен $A := A_\alpha{}^\alpha = 6$.

Обратимся теперь к свойствам кручения. Подставив уравнение (4.7) в тождества Бианки (2.9), найдем

$$T^\alpha \wedge \vartheta^\beta - \vartheta^\alpha \wedge T^\beta = 0 \longrightarrow T := e_\alpha \rfloor T^\alpha = 0 \quad (4.16)$$

и

$$DT^\alpha = 0. \quad (4.17)$$

Уравнение (4.16) показывает, что след кручения равен нулю, и остаются только $5 \oplus 1$ независимых компонент кручения.

Если разложить 1-форму дуального кручения относительно корепера, $\#T^\alpha = \tilde{T}^\alpha{}_\beta \vartheta^\beta$, то получим общее представление кручения в $3D$ -пространстве:

$$T^\alpha = \frac{1}{2} \tilde{T}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma\delta} \vartheta^\gamma \wedge \vartheta^\delta. \quad (4.18)$$

Подстановка в уравнение (4.16) приводит к условию

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{T}_{\beta\alpha}, \quad (4.19)$$

тогда как подстановка (4.18) в (4.17) дает дифференциальное условие на матрицу коэффициентов:

$$D_\beta \tilde{T}^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.20)$$

Рассмотренная конструкция была предложена в работах [8] с явным использованием локальных координат.

4.3. Новое отображение Джонсона. Отображение Фридмана не является взаимно однозначным. А именно, возможна ситуация, при которой различные янг-милловские поля Γ^{ab} отображаются в одну и ту же 1-форму корепера θ^a . Это связано с известной проблемой неоднозначности Ву–Янга [14, 15], которая обсуждается в разделе 5. Чтобы исключить данную проблему, в работе [12] было предложено отображение,

которое мы далее будем называть “новым отображением Джонсона”. В этой работе корепер θ^a строится таким образом, что 1-форма связности Γ^{ab} является *чисто римановой* (связность Леви–Чивиты) связностью без кручения. Математически такой корепер определяется дифференциальным уравнением

$$d\theta^a + \Gamma_b^a \wedge \theta^b = 0. \quad (4.21)$$

Важно отметить, что новое отображение Джонсона существует только в трех измерениях, где число уравнений (4.21) равно 9, т.е. равно числу неизвестных компонент.

Ясно, что новое отображение Джонсона также не является взаимно однозначным: одной и той же связности Γ^{ab} может отвечать несколько разных кореперов θ^a (простейшим примером являются 1-формы θ^a и $C\theta^a$ с константой C , которые обе удовлетворяют уравнению (4.21)). Более сложный пример неоднозначности нового отображения Джонсона рассмотрен в разделе 5.

Кроме решения проблемы неоднозначности Ву–Янга, отображение (4.21), по-видимому, устанавливает корректное описание конструкции Голдстоуна–Джакива [16] для квантования теории Янга–Миллса в терминах калибровочно-инвариантных полевых переменных.

4.4. Метрическая структура в формализме расслоений. Дадим глобальную формулировку теории отображений на языке расслоенных пространств. Для конкретности рассмотрим отображение Фридмана.

Основным моментом является введение метрики на многообразии M . На заданном гладком многообразии M фундаментальную роль играет главное расслоение линейных реперов $L(M)$. Напомним, что линейный репер в точке $x \in M$ есть произвольный базис $\{e_\alpha\}$ (в нашем случае $\alpha = 1, 2, 3$) касательного пространства $T_x M$. Множество всех реперов над всеми точками составляет многообразие $L(M)$ (гладкая структура легко вводится). Произвольная точка $u = (x, e_\alpha) \in L(M)$ отображается в точку $x \in M$ с помощью канонической проекции $\pi: L(M) \rightarrow M$. Структурная группа $L(M)$ есть $G = GL(3, R)$ с очевидным правым действием $g \in G: u \rightarrow R_g u = ug = (x, (eg)_\alpha)$ (более подробно, $(eg)_\alpha = e_\beta g_\alpha^\beta$ с (3×3) -матрицей $g_\alpha^\beta \in GL(3)$).

Задание метрики на M тесно связано с редукцией расслоения линейных реперов $L(M)$ к подрасслоению так называемых ортонормированных реперов $O(M)$. Для группы вращений $H = O(3, R)$, рассматриваемой как подгруппа $H \subset G$, определено очевидное правое действие на $L(M)$, $h \in H: u \rightarrow R_h u = uh = (x, (eh)_\alpha)$, которое вводит фактор-пространство $E = L(M)/H$. Обозначим “начало отсчета” в фактор-группе G/H как ξ_0 (т.е. это класс смежности H , задаваемый единичным элементом группы G). Тогда произвольную точку $v \in E$ можно построить как $v = (x, e\xi_0)$. Легко видеть [13], что E является векторным расслоением, ассоциированным с $L(M)$, которое обладает структурной группой G и стандартным слоем G/H . В свою очередь, расслоение линейных реперов $L(M)$ можно рассматривать как главное расслоение $P(E, H)$ над базой E со структурной группой H . Каноническая проекция $\mu: L(M) \rightarrow E$ задается с помощью факторизации проекции $G \rightarrow G/H$. Векторное расслоение E есть источник метрических структур на M .

Действительно, локальные сечения E (т.е. такие отображения $\sigma: M \rightarrow E$, что $\pi_E \circ \sigma = \text{id}$) находятся во взаимно однозначном соответствии с редукциями $L(M)$ к

$O(M)$, а следовательно, и с римановыми метриками на M . Покажем это. Пусть задано сечение $\sigma: M \rightarrow E$. Тогда подрасслоение ортонормированных реперов определим как множество

$$O(M) := \{u \in L(M) \mid \mu(u) = \sigma(\pi(u))\}, \quad (4.22)$$

т.е. отображение σ в каждой точке M выбирает один из классов эквивалентности, на которые множество реперов e_α разбито действием группы вращений. Более подробно можно записать, что $\sigma(x) = v(x) = (x, g(x)\xi_0)$, т.е. для точки $u = (x, e_\alpha)$ условие (4.22) означает, что $e\xi_0 = g(x)\xi_0$. Тем самым все реперы над точкой $x \in M$, составляющие слой $O(M)$ в x , связаны с представителем $g(x)$ преобразованием из подгруппы $H = O(3, R)$. Мы отсылаем читателя к книге [13] за строгим доказательством того, что $O(M)$ есть гладкое многообразие, вложенное в $L(M)$. Обратное также верно. Если задано отображение редукции $f: O(M) \rightarrow L(M)$, сечение E строим следующим образом: $\sigma(x) = \mu(f(u))$ для $x \in M$, где $u \in O(M)$ – произвольный элемент над x (т.е. $\pi(u) = x$). Это определение корректно, поскольку для правого действия $h \in H$ имеем $f(uh) = f(u)h$, и, следовательно, $\mu(f(uh)) = \mu(f(u))$.

Каждая редукция $L(M)$ к $O(M)$ эквивалентна введению метрики на M (и этот факт объясняет, в частности, почему $O(M)$ называется расслоением *ортонормированных* реперов – относительно чего они “ортонормированы”). Покажем это следующим образом [13]. В R^3 существует естественное внутреннее произведение $(\cdot, \cdot)$, которое в стандартном базисе E_α в R^3 задается как $(E_\alpha, E_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ (напомним, что $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$) и, очевидно, является $O(3, R)$ -инвариантным. Тогда для редуцированного расслоения $O(M)$ риманову метрику g на M определим для любых касательных векторов $X, Y \in T_x M$ равенством

$$g(X, Y) := (u^{-1}X, u^{-1}Y), \quad (4.23)$$

где $u \in O(M)$ – произвольный элемент над $x \in M$, рассматриваемый как линейный изоморфизм R^3 на касательное пространство. Данное определение не зависит от выбора u , поскольку произведение $(\cdot, \cdot)$ является $O(3, R)$ -инвариантным.

Как мы видели, метрика на M однозначно определена сечением векторного расслоения $E = L(M)/O(3)$. Собственно сечение может быть задано с помощью различных конкретных конструкций.

Покажем, что геометрия Римана–Картана, индуцированная на M связностью на главном $SO(3)$ -расслоении, определена корректно и в полном согласии с общей схемой в терминах расслоенных пространств и редукций. Доказательство следует непосредственно. Связность Γ задает с помощью (4.7) *локальное сечение расслоения линейных реперов* $L(M)$. Это сечение является полем реперов с компонентами (4.14). Обозначим данное сечение как $\sigma_\Gamma: M \rightarrow L(M)$. Тогда требуемое сечение фактор-расслоения E , очевидно, определяется как $\sigma(x) = \mu(\sigma_\Gamma)$. Такое определение совместно с калибровочной $SO(3)$ -свободой исходной внутренней калибровочной теории: при преобразовании связности $\Gamma'^\alpha_\beta = \Lambda_\delta^{-1\beta} \Gamma_\gamma^\delta \Lambda_\alpha^\gamma + \Lambda_\gamma^{-1\beta} d\Lambda_\alpha^\gamma$ с $\Lambda_\beta^\alpha(x) \in SO(3)$ сечение расслоения реперов переходит с учетом (4.7), (4.14) в другое сечение. Последнее, однако, связано просто вращением с первым сечением, $e'_\alpha = \Lambda_\alpha^\beta e_\beta$, и, следовательно, $\mu(\sigma_{\Gamma'}) = \mu(\sigma_\Gamma)$.

5. ЭФФЕКТИВНОЕ КРУЧЕНИЕ И НЕОДНОЗНАЧНОСТИ

Эффективная геометрия Римана–Картана дает *калибровочно-инвариантное* описание конфигураций полей Янга–Миллса. Это делает формализм отображений полезным для исследования проблемы калибровочной эквивалентности полей. Как уже отмечалось, отображение Фридмана чувствительно к неоднозначности Ву–Янга.

Первый известный пример неоднозначности (“копий”) калибровочных полей, который дается в работе [14], приводит к вырожденной эффективной геометрии Римана–Картана, поскольку тогда $\det B = \det \vartheta = 0$ в уравнениях (4.7), (4.13). Неединственное решение уравнения (4.7) в этом случае описывает геометрию *двумерной* сферы вместо регулярного трехмерного многообразия. Вырожденность геометрии в примере Ву–Янга легко понять, если заметить, что данные конфигурации калибровочных полей являются эффективно двумерными. Действительно, прямая проверка показывает, что потенциалы Ву–Янга, записанные в сферических координатах (r, θ, ϕ) , раскладываются только по дифференциалам угловых координат $d\theta, d\phi$, а коэффициенты этих разложений суть функции только θ и ϕ (и не зависят от r). Таким образом, можно говорить о том, что эти калибровочные поля “живут” на двумерной сфере, вложенной в трехмерное пространство.

Более интересно найти нетривиальный трехмерный пример неоднозначности Ву–Янга. Недавняя работа [17] в этом направлении частично некорректна, однако ниже мы приведем пример с аналогичным анзацем. В отличие от [17], мы не станем решать уравнение (4.7) относительно кручения. Вместо этого мы используем формализм первого порядка и рассмотрим задачу в терминах индуцированного корепера ϑ^α и $SO(3)$ -связности Γ_β^α . Основной анзац имеет вид

$$\Gamma_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 0 & k\vartheta^3 & \varphi_1 \\ -k\vartheta^3 & 0 & \varphi_2 \\ -\varphi_1 & -\varphi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

где $k = \text{const}$ и 1-формы φ_1, φ_2 таковы, что $e_3 \lrcorner \varphi_1 = e_3 \lrcorner \varphi_2 = 0$. Если существуют локальные координаты (x, y, z) , в которых $\vartheta^1 = dx, \vartheta^2 = dy, \vartheta^3 = dz$, то можно выписать явное решение уравнения (4.7) в форме

$$\varphi_1 = \sqrt{k^{-2} - 1} (\cos(kz)\vartheta^1 + \sin(kz)\vartheta^2) - \frac{1}{k}\vartheta^2, \quad (5.2)$$

$$\varphi_2 = \sqrt{k^{-2} - 1} (\sin(kz)\vartheta^1 - \cos(kz)\vartheta^2) + \frac{1}{k}\vartheta^1. \quad (5.3)$$

Расчет дает 2-форму кручения для данных кореперов ϑ^α и связностей (5.1), (5.2), (5.3) в виде

$$T^1 = \vartheta^3 \wedge (k\vartheta^2 - \varphi_1), \quad T^2 = -\vartheta^3 \wedge (k\vartheta^1 + \varphi_2), \quad T^3 = -\frac{2}{k}\vartheta^1 \wedge \vartheta^2. \quad (5.4)$$

Наконец, остается отметить, что $SU(2)$ -связность, которая индуцирует данную геометрическую структуру Римана–Картана, описывается калибровочными потенциалами

$$A^1 = -\varphi_2, \quad A^2 = \varphi_1, \quad A^3 = -k\vartheta^3. \quad (5.5)$$

Легко проверить, что 2-форма напряженности Янга–Миллса для потенциалов (5.5) имеет вид

$$F^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^\alpha{}_{\beta\gamma} \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\gamma. \quad (5.6)$$

Для любых значений параметра k калибровочные поля (5.5) имеют одну и ту же 2-форму напряженности (5.6), и, таким образом, индуцированная метрика одинакова. Однако соответствующие 2-формы кручения различны, и, следовательно, не существует калибровочного преобразования, с помощью которого можно перевести конфигурации из семейства (5.5) друг в друга. Более того, инвариант кривизны явно зависит от параметра k , $\#T^\alpha \wedge T_\alpha = 2\eta(4k^{-2} + 1 + k^2)$. Это означает не только калибровочную неэквивалентность относительно внутренних преобразований $SU(2) \approx SO(3)$, но также невозможность построить *преобразование координат*, которое связывало бы элементы семейства (5.5). Мы имеем, таким образом, явный пример *трехмерной невырожденной неоднозначности Ву–Янга* в определении напряженности калибровочного поля.

В подходе, основанном на “новом отображении Джонсона”, эффективное кручение равно нулю по определению, и тем самым проблемы неоднозначности Ву–Янга не возникает. Однако нетрудно видеть, что появляется новая неоднозначность. Проиллюстрируем это на примере классической конфигурации Ву–Янга [14], когда $A^a = (\Phi - 1)r^{-2}\varepsilon^a{}_{ij}x^i dx^j$, где $\Phi = \text{const}$ и x^i , $i = 1, 2, 3$, суть декартовы координаты с $r^2 := x^i x_i$. Решение уравнения (4.21), задающего новое отображение Джонсона, описывается широким семейством *невырожденных* кореперов

$$\vartheta^a = f(r) dx^a + h(r) \frac{x^a x_b}{r^2} dx^b, \quad (5.7)$$

где

$$f = r^{\Phi-1} \left(C + \int^r \frac{h(\tilde{r})}{\tilde{r}^\Phi} d\tilde{r} \right) \quad (5.8)$$

с константой интегрирования C и *произвольной функцией* $h(r)$.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Установление прямых соответствий между геометрическими структурами калибровочной теории Янга–Миллса и теории гравитации полезно и поучительно во многих отношениях как в классической, так и в квантовой областях. Явное устранение нединамических степеней свободы и формулировка квантовой калибровочной теории в терминах калибровочно-инвариантных переменных обсуждались ранее в работах [8, 9, 12]. Исследование соответствий между классическими решениями проливает новый свет на физическое содержание как “внутренних”, так и “внешних” калибровочных моделей. По-видимому, Виттен [18] первым заметил связь между самодуальными конфигурациями $SU(2)$ -калибровочных полей и решениями эйнштейновской общей теории относительности. Недавно внимание к данному вопросу привлекли результаты Лунева [9] и Синглтона [19], которые получили новые сферически-симметричные решения уравнений Янга–Миллса с *запирающими* свойствами исходя из решений типа Шварцшильда трехмерной теории гравитации. Аналогичные аксиально-симметричные решения (“черные струны”) обсуждаются в работах [20].

Данная работа выполнена в рамках проекта He 528/17-2, финансировавшегося Deutsche Forschungsgemeinschaft (Бонн).

Список литературы

- [1] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978; *M. Daniel, C. M. Viallet*. Rev. Mod. Phys. 1980. V. 52. P. 175.
- [2] *F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick, J. M. Nester*. Rev. Mod. Phys. 1976. V. 48. P. 393; *В. Н. Пономарев, А. О. Барвинский, Ю. Н. Обухов*. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М.: Энергоатомиздат, 1985; *E. W. Mielke*. Geometrodynamics of Gauge Fields: On the geometry of Yang–Mills and gravitational gauge theories. Berlin: Akademie-Verlag, 1987; *F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, Y. Ne'eman*. Phys. Rep. 1995. V. 258. P. 1.
- [3] *T. D. Lee*. Particle physics and introduction to field theory, Contemporary Concepts in Physics. V. 1. Revised and updated edition. Chur: Harwood Academic Publ., 1990.
- [4] *A. Ashtekar*. Lectures on non-perturbative canonical gravity. Advanced Ser. in Astrophysics and Cosmology. V. 6. Singapore: World Scientific, 1991.
- [5] *B. P. Dolan*. Phys. Lett. B. 1990. V. 233. P. 89; *R. P. Wallner*. Phys. Rev. D. 1990. V. 42. P. 441; *E. W. Mielke*. Ann. Phys. (USA). 1992. V. 219. P. 78.
- [6] *J. M. Nester, R.-S. Tung, Y. Z. Zhang*. Class. Quantum Gravit. 1994. V. 11. P. 757.
- [7] *E. V. Shuryak*. The QCD vacuum, hadrons and the superdense matter, World Scientific Lecture Notes in Physics. V. 8. Singapore: World Scientific, 1988.
- [8] *K. Johnson*. The Yang–Mills ground state. In: QCD – 20 Years Later, Aachen 1992. Eds P. M. Zerwas, H. A. Kastrup. V. 2. Singapore: World Scientific, 1993. P. 795; *D. Z. Freedman, P. E. Haagensen, K. Johnson, J. I. Latorre*. The hidden spatial geometry of non-Abelian gauge theories. Preprint CERN-TH.7010/93; *M. Bauer, D. Z. Freedman, P. E. Haagensen*. Nucl. Phys. B. 1994. V. 428. P. 147; *D. Z. Freedman*. Spatial geometry of Hamiltonian gauge theories. Preprint CERN-TH.7391/94 (Aug 1994); hep-th/9408052; *M. Bauer, D. Z. Freedman*. Nucl. Phys. B. 1995. V. 450. P. 209.
- [9] *Ф. А. Лунев*. ЯФ. 1993. Т. 56. Вып. 11. С. 238; *F. A. Lunev*. Phys. Lett. B. 1992. V. 295. P. 99; *Ф. А. Лунев*. ТМФ. 1993. Т. 94. С. 66; *F. A. Lunev*. Phys. Lett. B. 1993. V. 311. P. 273; V. 314. P. 21; Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 2281; J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 5351.
- [10] *Y. Ne'eman, Dj. Šijački*. Chromogravity: QCD-induced diffeomorphisms. Preprint Tel Aviv University, 1993; *Dj. Šijački*. QCD originated dynamical symmetry for hadrons. Preprint hep-th 9311033, November 1993; *V. Radovanovic, Dj. Šijački*. Class. Quantum Gravit. 1995. V. 12. P. 1791.
- [11] *E. M. Mielke, Yu. N. Obukhov, F. W. Hehl*. Phys. Lett. A. 1994. V. 192. P. 153.
- [12] *P. E. Haagensen, K. Johnson*. Nucl. Phys. B. 1995. V. 439. P. 597.
- [13] *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
- [14] *T. T. Wu, C. N. Yang*. Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 3843.
- [15] *S. Deser, W. Drechsler*. Phys. Lett. B. 1979. V. 86. P. 189.
- [16] *J. Goldstone, R. Jackiw*. Phys. Lett. B. 1978. V. 74. P. 81.
- [17] *D. Z. Freedman, R. R. Khuri*. Phys. Lett. B. 1994. V. 329. P. 263.
- [18] *L. Witten*. Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 718.
- [19] *D. Singleton*. Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 5911.
- [20] *Yu. N. Obukhov*. Analogue of black string in the Yang–Mills gauge theory. Preprint Univ. Cologne, August 1996; hep-th/9608011; *D. Singleton*. J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 4574; Nuovo Cimento A. 1996. V. 109. P. 169.

Поступила в редакцию 14.IV.1998 г.