Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Забродин, А. В. Зотов, А. Н. Ляшик, Д. С. Руднева, Асимметричная шестивершинная модель и классическая система частиц Рейсенарса–Шнайдера, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 2, 235–249

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:15:51

© 2017 г.

А. В. Забродин^{*†‡}, А. В. Зотов^{*§¶},
А. Н. Ляшик^{†‡||}, Д. С. Руднева^{†**}

АСИММЕТРИЧНАЯ ШЕСТИВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ И КЛАССИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЧАСТИЦ РЕЙСЕНАРСА–ШНАЙДЕРА

Обсуждается соответствие между моделями, решаемыми анзацем Бете, и классическими интегрируемыми системами типа Калоджеро. Это соответствие проиллюстрировано на простейшем примере неоднородной асимметричной шестивершинной модели, параметризованной тригонометрическими (гиперболическими) функциями.

Ключевые слова: шестивершинная модель, система частиц Рейсенарса–Шнайдера, квантово-классическое соответствие.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9300>

Исследование финансировалось программой государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации (проект 5-100). Исследования А. Н. Ляшика поддержаны объединенным проектом NASU-CNRS F14-2016. Работа А. В. Забродина частично поддержана РФФИ (грант № 14-02-00627). Исследования А. В. Зотова также частично выполнены за счет РФФИ (гранты № 14-01-00860 и 15-51-52031 ННС_а).

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова, Москва, Россия. E-mail: zabrodin@itep.ru

[†]Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

[‡]Сколковский институт науки и технологий, Россия

[§]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный Московской обл., Россия. E-mail: zotov@mi.ras.ru

[¶]Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

^{||}Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина. E-mail: a.liashyk@gmail.com

^{**}University of California, Santa Barbara, United States of America.
E-mail: missdaryarudneva@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Соответствие между квантовыми или статистическими моделями, решаемыми с помощью анзаца Бете, и классическими интегрируемыми системами многих частиц типа Калоджеро (квантово-классическая дуальность) было установлено в работе [1] в случае моделей типа XXZ . Различные аспекты этого замечательного соответствия обсуждаются также в статьях [2]–[7]. В работах [8], [9] оно было обобщено на модели типа XXZ , ассоциированные с квантовыми аффинными алгебрами $U_q(\widehat{sl_N})$. В настоящей статье мы иллюстрируем это соответствие на простейшем примере неоднородной асимметричной шестивершинной модели, параметризованной тригонометрическими (гиперболическими) функциями, которая оказывается связанной с тригонометрической (гиперболической) системой частиц Рейсенарса–Шнайдера (РШ).

Асимметричную шестивершинную модель можно понимать как симметричную, находящуюся в вертикальном и горизонтальном внешних полях [10], [11]. В естественном базисе матрица больцмановских весов асимметричной шестивершинной модели имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c' & b' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a' \end{pmatrix}.$$

Стандартный аргумент показывает, что статистическая сумма модели с периодическими граничными условиями зависит только от произведения cc' , так что с самого начала без потери общности можно положить $c' = c$.

В данной статье мы рассматриваем интегрируемую неоднородную шестивершинную модель на L узлах, при этом через x_i ($i = 1, \dots, L$) обозначаем параметры неоднородности в узлах решетки. Как известно, асимметричная модель с горизонтальным внешним полем h ($a/a' = b/b' = e^{2h}$) эквивалентна симметричной модели ($a' = a$, $b' = b$) с твистованными граничными условиями, которые сохраняют интегрируемость. Матрица твиста имеет вид $\mathbf{g} = \text{diag}(e^{Lh}, e^{-Lh})$. В действительности трансфер-матрицы двух моделей связаны преобразованием подобия, так что они имеют одинаковый спектр. Трансфер-матрица твистованной модели $\mathbf{T}^{(h)}(x)$ как функция спектрального параметра x имеет простые полюсы в точках x_i . Вычеты в этих полюсах $\mathbf{H}_i = (\text{sh } \eta)^{-1} \text{res}_{x=x_i} \mathbf{T}^{(h)}(x_i)$, где η – параметр анизотропии, являются коммутирующими операторами, которые можно одновременно диагонализировать. В рамках квантово-классической дуальности [3] их собственные значения нужно отождествить со скоростями $\dot{x}_i$ классических частиц в модели РШ, а параметры неоднородности – с координатами x_i этих частиц при условии, что высшие интегралы движения классической модели принимают некоторые предписанные значения, выражающиеся через спектральные инварианты матрицы твиста. Мы также покажем, что собственные значения другого выделенного набора коммутирующих операторов $\mathbf{G}_i = \mathbf{T}^{(h)}(x_i - \eta)$ следует отождествить с $-\eta^{-1}e^{-\eta p_i}$, где p_i – импульсы частиц в модели РШ.

Таким образом, мы видим, что различные собственные состояния трансфер-матрицы соответствуют точкам пересечения двух лагранжевых подмногообразий в фазовом пространстве системы РШ: одно из них – это гиперплоскость $x_i = \text{const}$, а второе – гиперповерхность уровня классических гамильтонианов в инволюции.

2. АСИММЕТРИЧНАЯ ШЕСТИВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ

2.1. Симметричная модель. Мы начнем с хорошо известной симметричной шестивершинной модели. Больцмановские веса $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ задаются R -матрицей

$$R(x) = \begin{pmatrix} \frac{\text{sh}(x+\eta)}{\text{sh } x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\text{sh } \eta}{\text{sh } x} & 0 \\ 0 & \frac{\text{sh } \eta}{\text{sh } x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sh}(x+\eta)}{\text{sh } x} \end{pmatrix} \quad (1)$$

в стандартной тригонометрической (гиперболической) параметризации [10], где x – спектральный параметр, а η – параметр анизотропии.

Пусть $V_i \cong \mathbb{C}^2$ – несколько копий линейного пространства $\mathbb{C}^2$, тогда $R_{ij}(x)$ – линейный оператор в $\bigotimes_i V_i$, который нетривиально действует в $V_i \otimes V_j$. Эта R -матрица удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера

$$R_{12}(x - x')R_{13}(x)R_{23}(x') = R_{23}(x')R_{13}(x)R_{12}(x - x'), \quad (2)$$

где обе части – операторы в $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Параметры анизотропии одинаковы для всех трех R -матриц.

Другое важное свойство R -матрицы (1) – ее инвариантность относительно диагональной картановской подгруппы в $GL(2) \times GL(2)$, что означает коммутативность с $\mathbf{g} \otimes \mathbf{g}$, где $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$ – любая диагональная (2×2) -матрица. Положим $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g} \otimes \mathbf{1}$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{1} \otimes \mathbf{g}$, тогда легко проверить, что

$$\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 R_{12}(x) = R_{12}(x) \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2. \quad (3)$$

2.2. Асимметричная модель. Присвоим индекс 0 горизонтальному (“вспомогательному”) пространству, а индексы $i = 1, \dots, L$ – вертикальным (“квантовым”) пространствам. Матрицы больцмановских весов асимметричной модели с горизонтальным полем h и вертикальным полем v задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{0i}^{h,v}(x) &= e^{h\sigma_0^z/2} e^{v\sigma_i^z/2} R_{0i}(x) e^{h\sigma_0^z/2} e^{v\sigma_i^z/2} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{h/2} & 0 \\ 0 & e^{-h/2} \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} e^{v/2} & 0 \\ 0 & e^{-v/2} \end{pmatrix}_i R_{0i}(x) \begin{pmatrix} e^{h/2} & 0 \\ 0 & e^{-h/2} \end{pmatrix}_0 \begin{pmatrix} e^{v/2} & 0 \\ 0 & e^{-v/2} \end{pmatrix}_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Явный вид “асимметричной” R -матрицы в тригонометрической параметризации таков:

$$R^{h,v}(x) = \begin{pmatrix} e^{h+v} \frac{\text{sh}(x+\eta)}{\text{sh } x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{h-v} & \frac{\text{sh } \eta}{\text{sh } x} & 0 \\ 0 & \frac{\text{sh } \eta}{\text{sh } x} & e^{-h+v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-h-v} \frac{\text{sh}(x+\eta)}{\text{sh } x} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Уравнение Янга–Бакстера (2) вместе с инвариантностью относительно картановской подгруппы (3) влечет следующее уравнение Янга–Бакстера для асимметричных R -матриц с тем же самым параметром η :

$$R_{12}^{-v',v}(x - x')R_{13}^{h,v}(x)R_{23}^{h,v'}(x') = R_{23}^{h,v'}(x')R_{13}^{h,v}(x)R_{12}^{-v',v}(x - x'). \quad (6)$$

В работе [12] существование R -матрицы, сплетающей $R^{h,v}(x)$ и $R^{h,v'}(x)$, было доказано прямым решением уравнения Янга–Бакстера.

Ниже мы рассматриваем неоднородную асимметричную шестивершинную модель с периодическими граничными условиями в горизонтальном направлении. Трансфер-матрица модели определяется обычным образом [13]:

$$\mathbf{T}^{h,v}(x) = \text{tr}_0(R_{01}^{h,v}(x - x_1)R_{02}^{h,v}(x - x_2) \dots R_{0L}^{h,v}(x - x_L)). \quad (7)$$

Параметры неоднородности x_i в узлах получаются сдвигом спектрального параметра. Мы предполагаем, что они находятся в общем положении, т.е. $x_i \neq x_j$ и $x_i \neq x_j \pm \eta$ при всех $i \neq j$. Из уравнения Янга–Бакстера (6) следует, что трансфер-матрицы с различными x и v (но с одинаковыми η , h и $\{x_i\}_L$) коммутируют: $[\mathbf{T}^{h,v}(x), \mathbf{T}^{h,v'}(x')] = 0$. Легко видеть, что зависимость трансфер-матрицы от вертикального поля v очень проста:

$$\mathbf{T}^{h,v}(x) = e^{v\mathbf{S}^z} \mathbf{T}^{h,0}(x), \quad (8)$$

где

$$\mathbf{S}^z = \sum_{i=1}^L \sigma_i^z = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 \quad (9)$$

– оператор, считающий (сохраняющуюся) разность между полным числом стрелок, смотрящих вверх ($\mathbf{M}_1 = (\sum_{i=1}^L (1 + \sigma_i^z))/2$) и вниз ($\mathbf{M}_2 = (\sum_{i=1}^L (1 - \sigma_i^z))/2$). Отметим, что $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = L\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – единичный оператор.

На самом деле трансфер-матрица асимметричной модели с периодическими граничными условиями связана с трансфер-матрицей симметричной модели с *твистованными* граничными условиями преобразованием подобия. Положим (см. статью [14])

$$\mathbf{U} = \mathbf{1} \otimes e^{h\sigma^z} \otimes e^{2h\sigma^z} \otimes \dots \otimes e^{(L-1)h\sigma^z} = \exp\left(\sum_{j=1}^L (j-1)h\sigma_j^z\right).$$

Из инвариантности относительно картановской подгруппы (3) следует соотношение

$$\mathbf{U} \mathbf{T}^{h,v}(x) \mathbf{U}^{-1} = e^{v\mathbf{S}^z} \mathbf{T}^{(h)}(x),$$

где

$$\mathbf{T}^{(h)}(x) = \text{tr}_0(R_{01}(x - x_1)R_{02}(x - x_2) \dots R_{0L}(x - x_L)e^{Lh\sigma_0^z}) \quad (10)$$

– трансфер-матрица симметричной модели с граничными условиями, твистованными с помощью диагонального группового элемента $\mathbf{g} = e^{Lh\sigma^z}$.

Диагональные матричные элементы R -матрицы (1) периодичны при сдвиге $x \rightarrow x + i\pi$, а недиагональные – антипериодичны. Следовательно, след (10) обладает периодичностью $\mathbf{T}^{(h)}(x + i\pi) = \mathbf{T}^{(h)}(x)$. Так как он имеет полюсы первого порядка в точках x_i , разложение по полюсам можно записать в виде

$$\mathbf{T}^{(h)}(x) = \mathbf{C} + \text{sh } \eta \sum_{k=1}^L \mathbf{H}_k \text{cth}(x - x_k), \quad (11)$$

где

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{T}^{(h)}(\infty) + \mathbf{T}^{(h)}(-\infty)), \quad \mathbf{H}_k = (\text{sh } \eta)^{-1} \text{res}_{z=x_k} \mathbf{T}^{(h)}(z)$$

– некоторые коммутирующие операторы. Их можно рассматривать как гамильтонианы интегрируемой квантовой спиновой цепочки с нелокальным взаимодействием. Предельные значения $\mathbf{T}^{(h)}(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ легко находятся:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(h)}(\infty) &= \mathbf{C} + \text{sh } \eta \sum_k \mathbf{H}_k = e^{Lh} e^{\eta \mathbf{M}_1} + e^{-Lh} e^{\eta \mathbf{M}_2}, \\ \mathbf{T}^{(h)}(-\infty) &= \mathbf{C} - \text{sh } \eta \sum_k \mathbf{H}_k = e^{Lh} e^{-\eta \mathbf{M}_1} + e^{-Lh} e^{-\eta \mathbf{M}_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем следующие правила сумм:

$$\mathbf{C} = e^{Lh} \text{ch}(\eta \mathbf{M}_1) + e^{-Lh} \text{ch}(\eta \mathbf{M}_2), \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^L \mathbf{H}_k = e^{Lh} \frac{\text{sh}(\eta \mathbf{M}_1)}{\text{sh } \eta} + e^{-Lh} \frac{\text{sh}(\eta \mathbf{M}_2)}{\text{sh } \eta}. \quad (13)$$

Для нахождения статистической суммы представляет интерес решение объединенной спектральной задачи

$$\begin{cases} \mathbf{T}^{(h)}(x)|\Psi\rangle = T(x)|\Psi\rangle, \\ \mathbf{M}_1|\Psi\rangle = M_1|\Psi\rangle, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{H}_i|\Psi\rangle = H_i|\Psi\rangle, \\ \mathbf{M}_1|\Psi\rangle = M_1|\Psi\rangle. \end{cases} \quad i = 1, \dots, L, \quad (14)$$

Другой выделенный набор коммутирующих “гамильтонианов” определяется равенствами

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{T}^{(h)}(x_i - \eta). \quad (15)$$

Можно показать, что

$$\mathbf{G}_i \mathbf{H}_i = \prod_{k \neq i}^L \frac{\text{sh}(x_i - x_k + \eta)}{\text{sh}(x_i - x_k)} \mathbf{1}. \quad (16)$$

2.3. Решение с помощью анзаца Бете. Операторы $\mathbf{T}^{h,v}(x)$, $\mathbf{S}^z$ можно одновременно диагонализировать при всех x . Ниже мы работаем с оператором $\mathbf{T}^{(h)}(x)$ или, что эквивалентно, со множеством коммутирующих “гамильтонианов” $\mathbf{H}_k$ (они обобщают гамильтонианы тригонометрической модели Годена). Задача их диагонализации обычно решается с помощью алгебраического анзаца Бете [13], [15]. В секторе, где $\mathbf{S}^z$ имеет собственное значение $S^z = L - 2M_2 \geq 0$, собственные значения $T(x)$ оператора $\mathbf{T}^{(h)}(x)$ даются формулой

$$T(x) = e^{Lh} \prod_{k=1}^L \frac{\text{sh}(x - x_k + \eta)}{\text{sh}(x - x_k)} \prod_{\alpha=1}^{M_2} \frac{\text{sh}(x - u_\alpha - \eta)}{\text{sh}(x - u_\alpha)} + e^{-Lh} \prod_{\alpha=1}^{M_2} \frac{\text{sh}(x - u_\alpha + \eta)}{\text{sh}(x - u_\alpha)} \quad (17)$$

(напомним, что $M_1 + M_2 = L$). Корни Бете u_α находятся из системы уравнений Бете

$$e^{2Lh} \prod_{k=1}^L \frac{\text{sh}(u_\alpha - x_k + \eta)}{\text{sh}(u_\alpha - x_k)} = \prod_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{M_2} \frac{\text{sh}(u_\alpha - u_\beta + \eta)}{\text{sh}(u_\alpha - u_\beta - \eta)}. \quad (18)$$

Соответствующие собственные значения $\mathbf{H}_j$ и $\mathbf{G}_j$ таковы:

$$H_j = e^{Lh} \prod_{k=1, \neq j}^L \frac{\text{sh}(x_j - x_k + \eta)}{\text{sh}(x_j - x_k)} \prod_{\alpha=1}^{M_2} \frac{\text{sh}(x_j - u_\alpha - \eta)}{\text{sh}(x_j - u_\alpha)}, \quad (19)$$

$$G_j = e^{-Lh} \prod_{\alpha=1}^{M_2} \frac{\text{sh}(x_j - u_\alpha)}{\text{sh}(x_j - u_\alpha - \eta)}. \quad (20)$$

3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РШ

Система частиц РШ [16] – это релятивистское обобщение модели Калоджеро–Мозера–Сазерленда. Пусть p_i , x_i – канонические переменные со скобкой Пуассона $\{p_i, x_j\} = \delta_{ij}$. Тригонометрическая (гиперболическая) система РШ с L частицами задается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^L e^{\eta p_i} \prod_{k \neq i}^L \frac{\text{sh}(x_i - x_k + \eta)}{\text{sh}(x_i - x_k)}, \quad (21)$$

где параметр η имеет смысл обратной скорости света. Скорости частиц заданы выражением

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \eta e^{\eta p_i} \prod_{k \neq i}^L \frac{\text{sh}(x_i - x_k + \eta)}{\text{sh}(x_i - x_k)}. \quad (22)$$

Уравнения движения $\dot{p}_i = -\partial \mathcal{H} / \partial x_i$ в этом случае принимают вид

$$\ddot{x}_j = - \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^L \frac{2\dot{x}_j \dot{x}_k \text{sh}^2 \eta \text{ch}(x_j - x_k)}{\text{sh}(x_j - x_k + \eta) \text{sh}(x_j - x_k) \text{sh}(x_j - x_k - \eta)}. \quad (23)$$

В тригонометрической модели РШ есть два интересных предела – это $\eta = \pm\infty$ и $\eta = i\pi/2$. В первом случае уравнения движения упрощаются до уравнений

$$\eta = \pm\infty: \quad \ddot{x}_j = 2 \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^L \dot{x}_j \dot{x}_k \text{cth}(x_j - x_k). \quad (24)$$

Во втором случае они имеют вид

$$\eta = \frac{i\pi}{2}: \quad \ddot{x}_j = 4 \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^L \frac{\dot{x}_j \dot{x}_k}{\text{sh} 2(x_j - x_k)}. \quad (25)$$

Как известно, модель РШ интегрируема. Она имеет представление Лакса $\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{A}, \mathbf{L}]$ с матрицей Лакса¹⁾

$$\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{L}_{ij}(\{x_k\}_L, \{\dot{x}_k\}_L) = \frac{\text{sh} \eta \dot{x}_i}{\text{sh}(x_i - x_j - \eta)} \quad (26)$$

¹⁾Матрица Лакса, которая использовалась в статье [9], связана с данной матрицей соотношением $\tilde{\mathbf{L}} = -\mathbf{L}^t$, где t означает транспонирование.

и A -матрицей

$$A_{jk} = \left(\sum_{l \neq j} \dot{x}_l \operatorname{cth}(x_j - x_l) - \sum_l \dot{x}_l \operatorname{cth}(x_j - x_l + \eta) \right) \delta_{jk} + \frac{1 - \delta_{jk}}{\operatorname{sh}(x_j - x_k)}. \quad (27)$$

Из представления Лакса следует, что эволюция во времени матрицы Лакса имеет вид преобразования подобия $L(t) = U(t)LU^{-1}(t)$. В терминах импульсов это означает, что

$$L_{ij} = \frac{\eta \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{sh}(x_i - x_j - \eta)} e^{\eta p_i} \prod_{k \neq i}^L \frac{\operatorname{sh}(x_i - x_k + \eta)}{\operatorname{sh}(x_i - x_k)}. \quad (28)$$

Отметим, что $\mathcal{H} = -\eta^{-1} \operatorname{tr} L$. Интегралы движения, которые находятся в инволюции, даются выражениями

$$\mathcal{H}_k = \operatorname{tr} L^k, \quad \mathcal{H} = -\eta^{-1} \mathcal{H}_1. \quad (29)$$

Производящую функцию законов сохранения можно задать характеристическим полиномом $Q(\lambda) = \det(\lambda I - L)$.

Пусть $X = \operatorname{diag}(x_1, x_2, \dots, x_L)$ – диагональная матрица, элементами которой являются координаты частиц. Легко проверить, что матрицы X , L удовлетворяют соотношению

$$e^{-\eta} e^X L e^{-X} - e^{\eta} e^{-X} L e^X = 2 \operatorname{sh} \eta \dot{X} E,$$

где E – это $(L \times L)$ -матрица единичного ранга, все элементы которой также равны единице.

Матрицу Лакса модели РШ можно разложить на множители:

$$L = \dot{X} C, \quad (30)$$

где $X = \operatorname{diag}(x_1, x_2, \dots, x_L)$, а C – это тригонометрическая матрица Коши

$$C_{ij} = \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{sh}(x_i - x_j - \eta)}.$$

Это разложение позволяет вычислить характеристический полином явно. Мы используем тот факт, что коэффициент при λ^{L-k} в полиноме $\det_{L \times L}(\lambda I + M)$ равен сумме всех диагональных $(k \times k)$ -миноров матрицы M . Все такие миноры можно найти, используя разложение (30) и явное выражение для детерминанта

$$\det_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{sh}(x_i - x_j - \eta)} = (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} C(x_i - x_j), \quad C(x) = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}(x + \eta) \operatorname{sh}(x - \eta)}.$$

Следовательно,

$$\det_{L \times L}(\lambda I - L) = \sum_{n=0}^L (-1)^n \mathcal{E}_n \lambda^{L-n}, \quad (31)$$

где

$$\mathcal{E}_n = (-1)^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq L} \dot{x}_{i_1} \dots \dot{x}_{i_n} \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} C(x_{i_\alpha} - x_{i_\beta}). \quad (32)$$

Интегралы движения $\mathcal{E}_n$ связаны с интегралами движения $\mathcal{H}_n$ с помощью формулы Ньютона $\sum_{k=0}^L (-1)^k \mathcal{E}_{L-k} \mathcal{H}_k = 0$, где $\mathcal{H}_0 = \text{tr } L^0 = L$.

Кроме того, матрица Лакса допускает другую нетривиальную факторизацию [9]:

$$L = -\eta e^{\eta P} D_\eta (V^t)^{-1} S^{-1} V^t (D_\eta)^{-1} \quad (33)$$

(в работах [3], [17], [18] предложено аналогичное представление в рациональном случае). Здесь P , D , S – диагональные матрицы:

$$P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_L),$$

$$(D_\eta)_{ij} = \delta_{ij} \prod_{k \neq i}^L \text{sh}(x_i - x_k + \eta), \quad (34)$$

$$S_{ij} = \delta_{ij} e^{-(2i-L-1)\eta}, \quad (35)$$

а V – это матрица Вандермонда

$$V_{ij} = e^{(2j-L-1)x_i}. \quad (36)$$

Равенство (33) представляет собой классическую версию факторизации L -оператора для квантовой тригонометрической модели РШ [19].

4. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ШЕСТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛЬЮ И МОДЕЛЬЮ РШ

Рассмотрим матрицу Лакса (26) модели РШ с L частицами. Координаты частиц x_i отождествим с параметрами неоднородности, а обратную “скорость света” η – с параметром анизотропии. Также сделаем подстановку $\dot{x}_i = -H_i$ и получим матрицу $L = L(\{x_i\}_L, \{-H_i\}_L)$:

$$L = \begin{pmatrix} H_1 & \frac{\text{sh } \eta H_1}{\text{sh}(x_2 - x_1 + \eta)} & \frac{\text{sh } \eta H_1}{\text{sh}(x_3 - x_1 + \eta)} & \cdots & \frac{\text{sh } \eta H_1}{\text{sh}(x_L - x_1 + \eta)} \\ \frac{\text{sh } \eta H_2}{\text{sh}(x_1 - x_2 + \eta)} & H_2 & \frac{\text{sh } \eta H_2}{\text{sh}(x_3 - x_2 + \eta)} & \cdots & \frac{\text{sh } \eta H_2}{\text{sh}(x_L - x_2 + \eta)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\text{sh } \eta H_L}{\text{sh}(x_1 - x_L + \eta)} & \frac{\text{sh } \eta H_L}{\text{sh}(x_2 - x_L + \eta)} & \frac{\text{sh } \eta H_L}{\text{sh}(x_3 - x_L + \eta)} & \cdots & H_L \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Соответствие между шестивершинной моделью и моделью РШ заключается в том, что если H_k – собственные значения операторов $\mathbf{H}_k$, то собственные значения матрицы Лакса модели РШ равны

$$\begin{aligned} e^{Lh - (M_1 - 1)\eta + 2\eta j}, & \quad j = 0, 1, \dots, M_1 - 1, \\ e^{-Lh - (M_2 - 1)\eta + 2\eta j}, & \quad j = 0, 1, \dots, M_2 - 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Используя терминологию анзаца Бете, можно сказать, что они формируют “струны” длины M_1 , M_2 соответственно с центрами в $e^{\pm Lh}$. Мы видим, что спектр L зависит только от горизонтального внешнего поля h (и от M_1 , M_2). Это позволяет заключить, что задача поиска собственных значений для трансфер-матрицы шестивершинной модели эквивалентна следующей *обратной* спектральной задаче для

матрицы Лакса модели РШ: даны x_i , найти такие H_i , чтобы собственные значения матрицы Лакса были равны значениям (38). Тем самым мы фиксируем значения интегралов движения модели РШ

$$\mathcal{H}_n = \text{tr } \mathbf{L}^n = e^{Lhn} \frac{\text{sh}(M_1 \eta n)}{\text{sh}(\eta n)} + e^{-Lhn} \frac{\text{sh}(M_2 n \eta)}{\text{sh}(\eta n)}. \quad (39)$$

Согласно равенствам (31), (32) мы получаем в (31), что

$$\mathcal{E}_n = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq L} H_{i_1} \dots H_{i_n} \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} \frac{\text{sh}^2(x_{i_\alpha} - x_{i_\beta})}{\text{sh}(x_{i_\alpha} - x_{i_\beta} + \eta) \text{sh}(x_{i_\alpha} - x_{i_\beta} - \eta)}. \quad (40)$$

Спектры операторов $\mathbf{H}_i$ можно найти путем решения алгебраических уравнений

$$\mathcal{E}_n = e_n, \quad n = 1, \dots, L, \quad (41)$$

в которых e_n – элементарные симметрические функции, $e_n = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq L} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_n}$, от переменных ξ_i , которые принимают значения из множества

$$\{\xi_k\}_L = \left\{ \underbrace{e^{Lh-(M_1-1)\eta}, e^{Lh-(M_1-3)\eta}, \dots, e^{Lh+(M_1-1)\eta}}_{M_1}, \right. \\ \left. \underbrace{e^{-Lh-(M_2-1)\eta}, e^{-Lh-(M_2-3)\eta}, \dots, e^{-Lh+(M_2-1)\eta}}_{M_2} \right\}$$

собственных значений матрицы $\mathbf{L}$. Эти уравнения имеют набор решений, соответствующих различным собственным значениям.

Интересно отметить, что собственные значения коммутирующих гамильтонианов $\mathbf{G}_i$ связаны с импульсами частиц модели РШ. Из (16) и (22) следует, что если мы отождествим $H_i = -\dot{x}_i$, то, как следствие, получим равенство

$$G_i = -\eta^{-1} e^{-\eta p_i}, \quad i = 1, \dots, L. \quad (42)$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СООТВЕТСТВИЯ

Доказать сформулированное выше соответствие можно непосредственно, но это требует некоторых усилий. В частности, доказательство использует нетривиальную факторизацию (33) матрицы Лакса.

Начнем с доказательства следующей леммы [9].

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{Q}}$ – пара $(N \times N)$ - и $(M \times M)$ -матриц

$$\mathbf{Q}_{ij}(\{x_i\}_N, \{y_\alpha\}_M, g) = \frac{g \text{sh } \eta}{\text{sh}(x_j - x_i + \eta)} \prod_{k \neq i}^N \frac{\text{sh}(x_i - x_k + \eta)}{\text{sh}(x_i - x_k)} \prod_{\gamma=1}^M \frac{\text{sh}(x_i - y_\gamma)}{\text{sh}(x_i - y_\gamma + \eta)}, \quad (43)$$

где $i, j = 1, \dots, N$, и

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\beta}(\{y_\gamma\}_M, \{x_i\}_N, g) = \frac{g \text{sh } \eta}{\text{sh}(y_\beta - y_\alpha + \eta)} \prod_{\gamma \neq \alpha}^M \frac{\text{sh}(y_\alpha - y_\gamma - \eta)}{\text{sh}(y_\alpha - y_\gamma)} \prod_{k=1}^N \frac{\text{sh}(y_\alpha - x_k)}{\text{sh}(y_\alpha - x_k - \eta)}, \quad (44)$$

где $\alpha, \beta = 1, \dots, M$ (для определенности предположим, что $M \leq N$). Тогда справедливо следующее тождество:

$$\begin{aligned} \det_{N \times N} (\lambda I - Q(\{x_i\}_N, \{y_\alpha\}_M, g)) = \\ = \det_{(N-M) \times (N-M)} (\lambda I - gS_{N-M}) \det_{M \times M} (\lambda I - \tilde{Q}(\{y_\alpha\}_M, \{x_i\}_N, g)). \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь мы используем обозначение $(S_K)_{ij} = \delta_{ij} e^{-(2i-K-1)\eta}$ ($i, j = 1, \dots, K$) для матрицы вида (35) размера $K \times K$.

Это означает, что матрица Q (43) имеет $N - M$ собственных значений вида $ge^{-(2i-N+M-1)\eta}$, где $i = 1, \dots, N - M$. В частности, при $M = 0$ мы можем записать, что

$$\det_{N \times N} (\lambda I - Q(\{x_i\}_N, \emptyset, g)) = \det_{N \times N} (\lambda I - gS_N) = \prod_{i=0}^{N-1} (\lambda - ge^{-(2i-N+1)\eta}). \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе стороны равенства (45) являются рациональными функциями от $t_i = e^{2x_i}$. Для доказательства достаточно установить, что они имеют одинаковые вычеты в полюсах и одинаковые значения на бесконечности.

Для доказательства нам нужны разложения матриц Q и $\tilde{Q}$, аналогичные (33):

$$Q(\{x_i\}_N, \{y_\alpha\}_M, g) = gW^{(N,M)} D_\eta(\{x_i\}_N) (V^t)^{-1} (\{x_i\}_N) S_N^{-1} V^t (\{x_i\}_N) D_\eta^{-1}(\{x_i\}_N), \quad (47)$$

$$\tilde{Q}(\{y_\alpha\}_M, \{x_i\}_N, g) = g\tilde{W}^{(N,M)} D_0^{-1}(\{y_\alpha\}_M) V(\{y_\alpha\}_M) S_M V^{-1}(\{y_\alpha\}_M) D_0(\{y_\alpha\}_M). \quad (48)$$

Здесь

$$V_{ij}(\{q_k\}_K) = e^{(2j-K-1)q_i}, \quad i, j = 1, \dots, K, \quad (49)$$

$$(D_\xi)_{ij}(\{q_k\}_K) = \delta_{ij} \prod_{k \neq j}^K \text{sh}(q_i - q_k + \xi), \quad i, j = 1, \dots, K, \quad (50)$$

$$W_{ij}^{(N,M)} = \delta_{ij} \prod_{\gamma=1}^M \frac{\text{sh}(y_\gamma - x_i)}{\text{sh}(y_\gamma - x_i - \eta)}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (51)$$

$$\tilde{W}_{\alpha\beta}^{(N,M)} = \delta_{\alpha\beta} \prod_{k=1}^N \frac{\text{sh}(y_\alpha - x_k)}{\text{sh}(y_\alpha - x_k - \eta)}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, M. \quad (52)$$

Отметим, что $\det W^{(N,M)} = \det \tilde{W}^{(N,M)}$. Следовательно, утверждение леммы приобретает вид

$$\begin{aligned} \det_{N \times N} (\lambda (W^{(N,M)})^{-1} - Q_0(\{x_i\}_N, g)) = \\ = \det_{(N-M) \times (N-M)} (\lambda I - gS_{N-M}) \det_{M \times M} (\lambda (\tilde{W}^{(N,M)})^{-1} - \tilde{Q}_0(\{y_\alpha\}_M, g)), \end{aligned} \quad (53)$$

где $Q_0(\{x_i\}_N, g) = Q(\{x_i\}_N, \emptyset, g)$, $\tilde{Q}_0(\{y_\alpha\}_M, g) = \tilde{Q}(\{y_\alpha\}_M, \emptyset, g)$.

Сначала докажем, что левая часть уравнения (53) не имеет полюсов в точках $x_i = x_k$ и $x_i = x_k + \eta$. Отметим, что

$$V_{ij}(\{x_k\}_N) = e^{(1-N)x_i} (e^{2x_i})^{j-1} = T_{ii}(\{x_k\}_N) \tilde{V}_{ij}(\{x_k\}_N),$$

где $\tilde{V}$ – матрица Вандермонда по переменным $t_i = e^{2x_i}$ ($\tilde{V}_{ij} = t_i^{j-1}$), а T – диагональная матрица ($T_{ii} = e^{(1-N)x_i}$). Тогда мы можем переписать левую часть (53) как

$$\begin{aligned} \det_{N \times N} (\lambda(W^{N,M})^{-1} - Q_0(\{x_i\}_N, g)) &= \\ &= \det_{N \times N} (\lambda(W^{N,M})^{-1} - gD_\eta(V^t)^{-1}S_N^{-1}V^tD_\eta^{-1}) = \\ &= \det_{N \times N} (\lambda(W^{N,M})^{-1} - gT^{-1}(\tilde{V}^t)^{-1}S_N^{-1}\tilde{V}^tT) = \\ &= \det_{N \times N} (\lambda\tilde{V}^t(W^{N,M})^{-1}(\tilde{V}^t)^{-1} - gS_N^{-1}). \end{aligned}$$

Матрица, обратная к матрице Вандермонда, дается следующим выражением:

$$(\tilde{V}^t)^{-1}_{kj} = \frac{1}{(j-1)!} \partial_s^{j-1} \prod_{l \neq k}^N \frac{s - t_l}{t_k - t_l} \Big|_{s=0}.$$

В таком случае матричный элемент $(\tilde{V}^t W^{-1} (\tilde{V}^t)^{-1})_{ij}$ имеет вид

$$(\tilde{V}^t W^{-1} (\tilde{V}^t)^{-1})_{ij} = \sum_{k=1}^N \tilde{V}_{ki} W_{kk}^{-1} (\tilde{V}^t)^{-1}_{kj} = \sum_{k=1}^N t_k^{i-1} W_{kk}^{-1} \frac{1}{(j-1)!} \partial_s^{j-1} \prod_{l \neq k}^N \frac{s - t_l}{t_k - t_l} \Big|_{s=0}.$$

Выражение

$$\sum_{k=1}^N t_k^{i-1} W_{kk}^{-1} \prod_{l \neq k}^N \frac{s - t_l}{t_k - t_l} = \sum_{k=1}^N (\tilde{V}^t W^{-1} (\tilde{V}^t)^{-1})_{ik} s^k$$

является производящей функцией для матричных элементов. Мы видим, что полюсы в точках $x_a = x_b + \eta$ отсутствуют. Полюсы в точках $x_a = x_b$ происходят от членов с $k = a, b$. Вычет в этой точке дается выражением

$$\prod_{m=1}^N (s - t_m) \left(\frac{t_a^{i-1}}{s - t_a} \frac{W_{aa}^{-1}}{\prod_{l \neq a, b} (t_a - t_l)} - \frac{t_b^{i-1}}{s - t_b} \frac{W_{bb}^{-1}}{\prod_{l \neq a, b} (t_b - t_l)} \right),$$

которое равно нулю при $x_a = x_b$.

Аналогично можно показать, что нет полюсов в точках $y_\alpha = y_\beta$ и $y_\alpha = y_\beta + \eta$ в правой части равенства (53). Это значит, что обе стороны имеют полюсы только в точках $x_i = y_\alpha$.

Следующий шаг – это индукция по M . При $M = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \det_{N \times N} (\lambda I - Q) &= \det_{N \times N} (\lambda I - gD_\eta(V^t)^{-1}S_N^{-1}V^tD_\eta^{-1}) = \\ &= \det_{N \times N} (\lambda I - gS_N^{-1}) = \det_{N \times N} (\lambda I - gS_N), \end{aligned}$$

что согласуется с утверждением леммы (второй детерминант матрицы размера 0×0 в (45) следует положить равным единице). Предположением индукции является утверждение, что лемма справедлива при $M - 1$ и для любых $N \geq M - 1$. Совершая переход от $M - 1$ к M , рассмотрим вычет в точке $x_i = y_\alpha$ в левой части равенства (53):

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{x_i=y_\alpha} \det_{N \times N} (\lambda(W^{N,M})^{-1} - Q_0(\{x_k\}_N, g)) &= \\ &= \det_{(N-1) \times (N-1)} (\lambda(W^{N-1,M})^{-1} - Q_0^{ii}(\{x_k\}_N, g)) \lambda \operatorname{sh} \eta \prod_{\gamma \neq \alpha}^M \frac{\operatorname{sh}(x_i - y_\gamma + \eta)}{\operatorname{sh}(x_i - y_\gamma)} = \\ &= \det_{(N-1) \times (N-1)} (\lambda(W^{N-1,M-1})^{-1} - Q_0(\{x_k\}_N \setminus x_i, g)) \lambda \operatorname{sh} \eta \times \\ &\quad \times \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^N \frac{\operatorname{sh}(x_k - y_\alpha + \eta)}{\operatorname{sh}(x_k - y_\alpha)} \prod_{\substack{\gamma=1, \\ \gamma \neq \alpha}}^M \frac{\operatorname{sh}(x_i - y_\gamma + \eta)}{\operatorname{sh}(x_i - y_\gamma)}. \end{aligned}$$

Во второй строчке Q_0^{ii} — это матрица Q_0 без i -й строки и i -го столбца. Аналогичным образом, вычет в правой части равенства (53) равен

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{x_i=y_\alpha} \det_{M \times M} (\lambda(\tilde{W}^{N,M})^{-1} - \tilde{Q}_0(\{y_\gamma\}_M, g)) &= \\ &= \det_{(M-1) \times (M-1)} (\lambda(\tilde{W}^{N,M-1})^{-1} - \tilde{Q}_0^{\alpha\alpha}(\{y_\gamma\}_M, g)) \times \\ &\quad \times \lambda \operatorname{sh} \eta \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^N \frac{\operatorname{sh}(x_k - y_\alpha + \eta)}{\operatorname{sh}(x_k - y_\alpha)} = \\ &= \det_{(M-1) \times (M-1)} (\lambda(\tilde{W}^{N-1,M-1})^{-1} - \tilde{Q}_0(\{y_\gamma\}_M \setminus y_\alpha, g)) \lambda \operatorname{sh} \eta \times \\ &\quad \times \prod_{\substack{\gamma=1, \\ \gamma \neq \alpha}}^M \frac{\operatorname{sh}(x_i - y_\gamma + \eta)}{\operatorname{sh}(x_i - y_\gamma)} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^N \frac{\operatorname{sh}(x_k - y_\alpha + \eta)}{\operatorname{sh}(x_k - y_\alpha)}. \end{aligned}$$

Мы видим, что множители возле детерминантов в обеих частях равенства совпадают. Из этого следует, что равенство вычетов в (53) для N, M сводится к (53) для $N - 1, M - 1$, которое выполнено в силу предположения индукции. Следовательно, все полюсы и вычеты с обеих сторон равенства (53) совпадают.

Таким образом, мы доказали, что

$$\begin{aligned} \det_{N \times N} (\lambda(W^{N,M})^{-1} - Q_0(\{x_i\}_N, g)) &= \\ &= \det_{(N-M) \times (N-M)} (\lambda I - gS_{N-M}) \det_{M \times M} (\lambda(\tilde{W}^{N,M})^{-1} - \tilde{Q}_0(\{y_\alpha\}_M, g)) + C_{N,M}, \quad (54) \end{aligned}$$

где $C_{N,M}$ — некоторые константы. Их можно найти из предела $y_\alpha \rightarrow \infty$. В этом пределе справедливо равенство

$$\begin{aligned} \lim_{y_\alpha \rightarrow \infty} \det_{N \times N} (\lambda(W^{N,M})^{-1} - Q_0(\{x_k\}_N, g)) &= \det_{N \times N} (\lambda e^{-\eta} (W^{N,M-1})^{-1} - Q_0(\{x_k\}_N, g)), \\ \lim_{y_\alpha \rightarrow \infty} \det_{M \times M} (\lambda(\tilde{W}^{N,M})^{-1} - \tilde{Q}_0(\{y_\gamma\}_M, g)) &= \\ &= (\lambda e^{-N\eta} - g e^{-(M-1)\eta}) \det_{(M-1) \times (M-1)} (\lambda(\tilde{W}^{N,M-1})^{-1} - \tilde{Q}_0(\{y_\gamma\}_N \setminus y_\alpha, g) e^\eta). \end{aligned}$$

Используя тождество (его можно легко проверить непосредственно)

$$\begin{aligned} \det_{(N-M+1) \times (N-M+1)} (\lambda e^{-\eta} \mathbf{I} - g \mathbf{S}_{N-M+1}) &= \\ &= (\lambda e^{(M-N-1)\eta} - g) \det_{(N-M) \times (N-M)} (\lambda \mathbf{I} - g \mathbf{S}_{N-M}), \end{aligned}$$

заключаем, что $C_{N,M} = C_{N,M-1}$. Но мы знаем, что $C_{N,0} = 0$ для любого N . Поэтому $C_{N,M} = 0$ для любых N и M и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть H_i – собственные значения операторов $\mathbf{H}_i$, тогда спектр матрицы $\mathbf{L}(\{x_k\}_L, \{\dot{x}_k = -H_k\}_L)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{Spec } \mathbf{L}(\{x_k\}_L, \{\dot{x}_k = -H_k\}_L) &= \\ &= \underbrace{\{e^{Lh-(M_1-1)\eta}, e^{Lh-(M_1-3)\eta}, \dots, e^{Lh+(M_1-1)\eta}\}}_{M_1}, \\ &\quad \underbrace{\{e^{-Lh-(M_2-1)\eta}, e^{-Lh-(M_2-3)\eta}, \dots, e^{-Lh+(M_2-1)\eta}\}}_{M_2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что утверждение теоремы эквивалентно равенству

$$\det_{L \times L} (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{L}(\{x_k\}_L, \{-H_k\}_L)) = \det_{M_1 \times M_1} (\lambda \mathbf{I} - e^{Lh} \mathbf{S}_{M_1}) \det_{M_2 \times M_2} (\lambda \mathbf{I} - e^{-Lh} \mathbf{S}_{M_2}). \quad (55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Значения H_k , записанные через корни Бете, даются уравнениями (19). Подставляя (19) в $\mathbf{L}(\{x_k\}_L, \{\dot{x}_k = -H_k\}_L)$, мы видим, что

$$\mathbf{L}(\{x_k\}_L, \{\dot{x}_k = -H_k\}_L) = \mathbf{Q}(\{x_k - \eta\}_L, \{u_\alpha\}_{M_2}, e^{Lh}),$$

где $\mathbf{Q}$ дается выражением (43). Применяя лемму 1, получаем равенство

$$\det_{L \times L} (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{L}) = \det_{(L-M_2) \times (L-M_2)} (\lambda \mathbf{I} - e^{Lh} \mathbf{S}_{L-M_2}) \det_{M_2 \times M_2} (\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{Q}}(\{u_\alpha\}_{M_2}, \{x_i - \eta\}_L, e^{Lh})), \quad (56)$$

в котором

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\beta}(\{u_\alpha\}_{M_2}, \{x_i - \eta\}_L, e^{Lh}) &= \\ &= \frac{e^{Lh} \text{sh } \eta}{\text{sh}(u_\beta - u_\alpha + \eta)} \prod_{\gamma \neq \alpha}^{M_2} \frac{\text{sh}(u_\alpha - u_\gamma - \eta)}{\text{sh}(u_\alpha - u_\gamma)} \prod_{k=1}^L \frac{\text{sh}(u_\alpha - x_k + \eta)}{\text{sh}(u_\alpha - x_k)}. \end{aligned}$$

Используя уравнения Бете (18), записываем формулу

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_{\alpha\beta}(\{u_\alpha\}_{M_2}, \{x_i - \eta\}_L, e^{Lh})|_{\text{BE}} &= \frac{e^{-Lh} \text{sh } \eta}{\text{sh}(u_\beta - u_\alpha + \eta)} \prod_{\gamma \neq \alpha}^{M_2} \frac{\text{sh}(u_\alpha - u_\gamma + \eta)}{\text{sh}(u_\alpha - u_\gamma)} = \\ &= \mathbf{Q}_{\alpha\beta}(\{u_\alpha\}_{M_2}, \emptyset, e^{-Lh}). \end{aligned}$$

Второй детерминант в (56) тогда равен

$$\begin{aligned} \det_{M_2 \times M_2} (\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{Q}}(\{u_\alpha\}_{M_2}, \{x_i - \eta\}_L, e^{Lh})) &= \det_{M_2 \times M_2} (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q}(\{u_\alpha\}_{M_2}, \emptyset, e^{-Lh})) = \\ &= \det_{M_2 \times M_2} (\lambda \mathbf{I} - e^{-Lh} \mathbf{S}_{M_2}) \end{aligned}$$

(второе равенство можно получить, еще раз используя лемму 1 при $M = 0$). Объединив эту формулу с выражением (56), мы приходим к (55). Теорема доказана.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы обсудили обобщение квантово-классического соответствия на случай простейшей модели типа XXZ . Основной результат заключается в том, что методы, предложенные в статье [3] для моделей, параметризованных рациональными функциями, применимы также и в этом случае. Параметр анизотропии шестивершинной модели определяет расщепление спектра матрицы Лакса классической модели Рейсенарса–Шнайдера.

Известные примеры говорят о том, что квантово-классическое соответствие специфично для интегрируемых моделей. Однако его происхождение и степень общности все еще остаются неясными. Один из открытых вопросов – обобщение на модели, параметризуемые эллиптическими функциями (в частности, на восьмивершинную модель).

В то же время похожие явления встречаются в несколько иных контекстах. Например, интерпретация постоянной Планка как параметра релятивистской деформации используется в конструкции релятивистских волчков Эйлера–Арнольда [18] путем квазиклассического описания одноузельной спиновой цепочки. В некоторых частных случаях такие волчки калибровочно-эквивалентны моделям Рейсенарса–Шнайдера, причем постоянная Планка, входящая в квантовую R -матрицу, отождествляется с релятивистским параметром. Другим примером служит подход Мацуо–Чередника [20], [21] к квантовым моделям Калоджеро–Мозера. Спектральные параметры классических r -матриц в связности Книжника–Замолотчикова играют роль координат частиц в моделях Калоджеро–Мозера. Близкие вопросы обсуждаются в работе [6]. Наконец, отметим еще одну взаимосвязь между классическими и квантовыми интегрируемыми системами, подобную квантово-классическому соответствию. В статье [7] было замечено, что собственные состояния квантовой системы Хитчина соответствуют точкам пересечения лагранжевых подмногообразий в классическом фазовом пространстве, образованном модулями плоских связностей.

Благодарности. Авторы благодарны организаторам Международного семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы”, где были доложены некоторые результаты настоящей работы.

Список литературы

- [1] A. Alexandrov, V. Kazakov, S. Leurent, Z. Tsuboi, A. Zabrodin, “Classical tau-function for quantum spin chains”, *JHEP*, **09** (2013), 064, 64 pp.
- [2] A. Alexandrov, S. Leurent, Z. Tsuboi, A. Zabrodin, “The master T -operator for the Gaudin model and the KP hierarchy”, *Nucl. Phys. B*, **883** (2014), 173–223.
- [3] A. Gorsky, A. Zabrodin, A. Zotov, “Spectrum of quantum transfer matrices via classical many-body systems”, *JHEP*, **01** (2014), 070, 27 pp.
- [4] A. Zabrodin, “Quantum spin chains and integrable many-body systems of classical mechanics” (Sofia, Bulgaria, 28 November – 2 December, 2013), *Springer Proceedings in Physics*, **163** (2015), 29–48.
- [5] Z. Tsuboi, A. Zabrodin, A. Zotov, “Supersymmetric quantum spin chains and classical integrable systems”, *JHEP*, **05** (2015), 086, 42 pp.
- [6] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, “KZ characteristic variety as the zero set of classical Calogero–Moser Hamiltonians”, *SIGMA*, **8** (2012), 072, 11 pp.

- [7] N. Nekrasov, A. Rosly, S. Shatashvili, “Darboux coordinates, Yang–Yang functional, and gauge theory”, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **216**:1 (2011), 69–93.
- [8] А. В. Забродин, “Управляющий T -оператор для вершинных моделей с тригонометрическими R -матрицами как классическая τ -функция”, *ТМФ*, **174**:1 (2013), 59–76.
- [9] M. Bekeov, A. Liashyk, A. Zabrodin, A. Zotov, “Trigonometric version of quantum-classical duality in integrable systems”, *Nucl. Phys. B*, **903** (2016), 150–163.
- [10] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [11] N. Reshetikhin, “Lectures on integrability of the six-vertex model”, *Exact Methods in Low-Dimensional Statistical Physics and Quantum Computing* (École d’été de Physique des Houches, session LXXXIX, 30 June – 1 August, 2008), eds. J. Jacobsen, S. Ouvry, V. Pasquier, D. Serban, L. F. Cugliandolo, Oxford Univ. Press, Oxford, 2010, 197–266.
- [12] B. Brubaker, D. Bump, S. Friedberg, “Schur Polynomials and the Yang–Baxter equation”, *Commun. Math. Phys.*, **308**:2 (2011), 281–301.
- [13] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [14] F. H. L. Essler, V. Rittenberg, “Representations of the quadratic algebra and partially asymmetric diffusion with open boundaries”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**:13 (1996), 3375–3407.
- [15] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга”, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63.
- [16] S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, “A new class of integrable systems and its relation to solitons”, *Ann. Phys.*, **170**:2 (1986), 370–405.
- [17] G. Aminov, S. Arthamonov, A. Smirnov, A. Zotov, “Rational top and its classical R -matrix”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:30 (2014), 305207, 19 pp.
- [18] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, “Relativistic classical integrable tops and quantum R -matrices”, *JHEP*, **07** (2014), 012, 38 pp.
- [19] A. Antonov, K. Hasegawa, A. Zabrodin, “On trigonometric intertwining vectors and non-dynamical R -matrix for the Ruijsenaars model”, *Nucl. Phys. B*, **503**:3 (1997), 747–770.
- [20] A. Matsuo, “Integrable connections related to zonal spherical function”, *Invent. Math.*, **110**:1 (1992), 95–121.
- [21] I. Cherednik, “Integration of quantum many-body problems by affine Knizhnik–Zamolodchikov equations”, *Adv. Math.*, **106**:1 (1994), 65–95.