Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Молев, Е. Е. Мухин, Собственные значения векторов Бете в модели Годена, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 3, 369–394

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:18:08

© 2017 г.

А. И. Молев*, Е. Е. Мухин†

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ВЕКТОРОВ БЕТЕ В МОДЕЛИ ГОДЕНА

По теореме Фейгина–Френкеля–Решетихина собственные значения высших гамильтонианов Годена на векторах Бете могут быть найдены с использованием центра аффинной вертексной алгебры на критическом уровне. В нашей недавней работе были вычислены явные образы Хариш–Чандры образующих центра во всех классических типах. Объединение этих результатов приводит к явным формулам для собственных значений высших гамильтонианов Годена на векторах Бете. Образы Хариш–Чандры можно интерпретировать как элементы классических $\mathcal{W}$ -алгебр. Путем вычисления классических пределов соответствующих скрининговых операторов выявлена прямая связь между кольцами q -характеров и классическими $\mathcal{W}$ -алгебрами.

Ключевые слова: гамильтониан Годена, классическая $\mathcal{W}$ -алгебра, q -характер, вектор Бете.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9304>

1. ВВЕДЕНИЕ

Фейгин, Френкель и Решетихин в своей известной статье [1] установили связь между центром $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ аффинной вертексной алгебры на критическом уровне с высшими гамильтонианами Годена. Они использовали модули Вакимото над аффинной алгеброй Каца–Мури $\hat{\mathfrak{g}}$ для вычисления собственных значений гамильтонианов на векторах Бете модели Годена, связанной с произвольной простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Вычисления зависят от выбора элемента S центра, а результат выражается через образ Хариш–Чандры элемента S (см. также работы [2]–[4], где описана связь с операми и обобщения на неоднородные гамильтонианы).

Центр $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ – это коммутативная ассоциативная алгебра со структурой, описанной теоремой Фейгина–Френкеля [5], которая утверждает, что $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ является алгеброй полиномов от бесконечного числа переменных; подробное объяснение этих результатов представлено в книге [6]. Простые явные формулы для образующих такой алгебры

*School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, Australia.
E-mail: alexander.molev@sydney.edu.au

†Department of Mathematical Sciences, Indiana University–Purdue University Indianapolis, Indianapolis, USA

найжены в работе [7] для типа A и в работе [8] для типов B , C и D (см. также статьи [9] и [10], в которых даны более простые доказательства для серии A и обобщения на супералгебры Ли). Вычисление образов Хариш-Чандры для образующих типа A производится непосредственно, тогда как серии B , C и D требуют довольно сложного использования q -характеров [11]. Нашей целью в настоящей работе является применение этих результатов для нахождения в явном виде действий высших гамильтонианов Годена в тензорных произведениях представлений алгебры $\mathfrak{g}$ и вычисление соответствующих собственных значений векторов Бете. В случае серии A мы тем самым воспроизводим результаты работы [12], полученные другим методом, основанным на анзаце Бете.

Мы начнем с краткого обсуждения некоторых результатов работ [1] и [3]. Главным образом мы концентрируем свое внимание на теореме 6.7 из работы [3], в которой собственные значения обобщенной алгебры Годена на векторах Бете представлены в терминах оперов, связанных с тензорными произведениями модулей Верма. Затем мы применяем эту теорему к классическим алгебрам Ли и выписываем операторы Годена и их собственные значения на векторах Бете в явном виде.

Связь между характеристиками янгиана (или q -характерами) и операторами Сигала–Сугавары играет существенную роль при вычислении образов Хариш-Чандры в работе [11]. Мы продолжаем исследование этой связи и строим отображение $\mathbf{gr}$, которое сопоставляет каждому характеру элемент соответствующей классической $\mathcal{W}$ -алгебры. Мы также устанавливаем свойства мультипликативности и сюръективности этого отображения.

2. ЦЕНТР ФЕЙГИНА–ФРЕНКЕЛЯ И ВЕКТОРЫ БЕТЕ

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, наделенная стандартной симметричной инвариантной билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, заданной в виде нормированной формы Киллинга:

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2h^\vee} \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y), \quad (2.1)$$

где $h^\vee$ – дуальное число Кокстера алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Соответствующая аффинная алгебра Каца–Мути $\hat{\mathfrak{g}}$ определяется как центральное расширение,

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K, \quad (2.2)$$

где $\mathfrak{g}[t, t^{-1}]$ – алгебра Ли полиномов Лорана по t с коэффициентами в $\mathfrak{g}$ (см. книгу [13]). Для любых $r \in \mathbb{Z}$ и $X \in \mathfrak{g}$ положим $X[r] = Xt^r$. Коммутационные соотношения алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ имеют вид

$$[X[r], Y[s]] = [X, Y][r + s] + r\delta_{r, -s} \langle X, Y \rangle K, \quad X, Y \in \mathfrak{g},$$

а элемент K является центральным в $\hat{\mathfrak{g}}$.

Универсальная обертывающая алгебра $U_{\operatorname{cri}}(\hat{\mathfrak{g}})$ на критическом уровне представляет собой фактор алгебры $U(\hat{\mathfrak{g}})$ по идеалу, порожденному элементом $K + h^\vee$. Пусть I означает левый идеал алгебры $U_{\operatorname{cri}}(\hat{\mathfrak{g}})$, порожденный подпространством $\mathfrak{g}[t]$, и пусть $\operatorname{Norm} I$ – его нормализатор,

$$\operatorname{Norm} I = \{v \in U_{\operatorname{cri}}(\hat{\mathfrak{g}}) \mid Iv \subseteq I\}.$$

Нормализатор представляет собой подалгебру в $U_{\text{cri}}(\hat{\mathfrak{g}})$, а I – двусторонний идеал нормализатора $\text{Norm } I$. *Центр Фейгина–Френкеля* $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ есть ассоциативная алгебра, определенная как фактор

$$\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) = \text{Norm } I / I. \quad (2.3)$$

Любой элемент алгебры $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ называется *вектором Сигала–Сугавары*. Фактор

$$V_{\text{cri}}(\mathfrak{g}) = U_{\text{cri}}(\hat{\mathfrak{g}}) / I \quad (2.4)$$

называется *вакуумным модулем* на критическом уровне над $\hat{\mathfrak{g}}$. Он обладает структурой вертексной алгебры. Как векторное пространство $V_{\text{cri}}(\mathfrak{g})$ изоморфно универсальной обертывающей алгебре $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$, где $\hat{\mathfrak{g}}_- = t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]$. Следовательно, мы имеем вложение векторных пространств

$$\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) \hookrightarrow U(\hat{\mathfrak{g}}_-).$$

Поскольку $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ – подалгебра алгебры $U_{\text{cri}}(\hat{\mathfrak{g}})$, вложение представляет собой изоморфизм алгебр, так что центр Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ можно считать подалгеброй в $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$. Эта подалгебра коммутативна, поскольку ее можно отождествить с центром вертексной алгебры $V_{\text{cri}}(\mathfrak{g})$, а именно

$$\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) = \{v \in V_{\text{cri}}(\mathfrak{g}) \mid \mathfrak{g}[t]v = 0\}. \quad (2.5)$$

Как вертексная алгебра вакуумный модуль $V_{\text{cri}}(\mathfrak{g})$ оснащен оператором трансляции

$$T: V_{\text{cri}}(\mathfrak{g}) \rightarrow V_{\text{cri}}(\mathfrak{g}), \quad (2.6)$$

который задается своими свойствами

$$T: 1 \mapsto 0, \quad [T, X[r]] = -rX[r-1], \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Мы также рассматриваем T как дифференцирование алгебры $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$. Ее подалгебра $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ инвариантна относительно T . По теореме Фейгина–Френкеля существуют такие элементы $S_1, \dots, S_n \in \mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$, где $n = \text{rank } \mathfrak{g}$, что все элементы $T^r S_l$ алгебраически независимы, а каждый вектор выражается как полином от этих элементов:

$$\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) = \mathbb{C}[T^r S_l \mid l = 1, \dots, n, r \geq 0]. \quad (2.7)$$

Назовем такое семейство $S_1, \dots, S_n$ *полным набором векторов Сигала–Сугавары*.

Выберем подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и треугольное разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

Рассмотрим $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$ как присоединенный $\mathfrak{g}$ -модуль, считая $\mathfrak{g}$ линейной оболочкой элементов $X[0]$ с $X \in \mathfrak{g}$. Обозначим через $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)^{\mathfrak{h}}$ подалгебру $\mathfrak{h}$ -инвариантов относительно этого действия. Рассмотрим левый идеал J алгебры $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$, порожденный всеми элементами $X[r]$ с $X \in \mathfrak{n}_-$ и $r < 0$. По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта пересечение $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)^{\mathfrak{h}} \cap J$ является двусторонним идеалом алгебры $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)^{\mathfrak{h}}$ и справедливо разложение в прямую сумму

$$U(\hat{\mathfrak{g}}_-)^{\mathfrak{h}} = (U(\hat{\mathfrak{g}}_-)^{\mathfrak{h}} \cap J) \oplus U(\hat{\mathfrak{h}}_-),$$

где $\hat{\mathfrak{h}}_- = t^{-1}\mathfrak{h}[t^{-1}]$. Проекция на второе слагаемое есть гомоморфизм

$$U(\hat{\mathfrak{g}}_-)^{\mathfrak{h}} \rightarrow U(\hat{\mathfrak{h}}_-), \quad (2.8)$$

представляющий собой аффинную версию *гомоморфизма Харши-Чандры*. По теореме Фейгина–Френкеля сужение гомоморфизма (2.8) на подалгебру $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ приводит к изоморфизму

$$\mathfrak{f}: \mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathcal{W}(\mathbf{L}\mathfrak{g}), \quad (2.9)$$

где $\mathcal{W}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ является классической $\mathcal{W}$ -алгеброй, связанной с двойственной по Ленглендсу алгеброй Ли $\mathbf{L}\mathfrak{g}$; подробное изложение этих результатов см. в книге [6]. Определим $\mathcal{W}$ -алгебру $\mathcal{W}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ как подалгебру алгебры $U(\hat{\mathfrak{h}}_-)$, состоящую из элементов, которые обращаются в ноль под действием *скрининговых операторов*; явные формулы см. в книге [6], раздел 8.1, а также в работе [11] для классических серий.

Для данного элемента $\chi \in \mathfrak{g}^*$ и ненулевого числа $z \in \mathbb{C}$ отображение

$$U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \rightarrow U(\mathfrak{g}), \quad X[r] \mapsto Xz^r + \delta_{r,-1}\chi(X), \quad X \in \mathfrak{g}, \quad (2.10)$$

определяет гомоморфизм алгебр. Используя коассоциативность стандартного копроизведения в $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$, определенного как

$$\Delta: Y \mapsto Y \otimes 1 + 1 \otimes Y, \quad Y \in \hat{\mathfrak{g}}_-,$$

для любого $\ell \geq 1$ получаем гомоморфизм

$$U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \rightarrow U(\hat{\mathfrak{g}}_-)^{\otimes \ell} \quad (2.11)$$

как отображение итерированного копроизведения.

Фиксируем теперь различные комплексные числа $z_1, \dots, z_\ell$; пусть u является комплексным параметром. Применяя гомоморфизмы вида (2.10) к тензорным множителям в (2.11), получаем еще один гомоморфизм

$$\Psi: U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes \ell}, \quad (2.12)$$

заданный как

$$\Psi: X[r] \mapsto \sum_{a=1}^{\ell} X_a(z_a - u)^r + \delta_{r,-1}\chi(X) \in U(\mathfrak{g})^{\otimes \ell},$$

где $X_a = 1^{\otimes(a-1)} \otimes X \otimes 1^{\otimes(\ell-a)}$ (см. работу [4]). Подкрутим этот гомоморфизм инволютивным антиавтоморфизмом

$$\varsigma: U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \rightarrow U(\hat{\mathfrak{g}}_-), \quad X[r] \mapsto -X[r], \quad X \in \mathfrak{g}, \quad (2.13)$$

чтобы получить антигомоморфизм

$$\Phi: U(\hat{\mathfrak{g}}_-) \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes \ell}, \quad (2.14)$$

заданный как композиция $\Phi = \Psi \circ \varsigma$. Поскольку $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ – коммутативная подалгебра в $U(\hat{\mathfrak{g}}_-)$, образ центра $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ при действии Φ является коммутативной подалгеброй $\mathcal{A}(\mathfrak{g})_\chi$ в $U(\mathfrak{g})^{\otimes \ell}$, зависящей от выбранных параметров $z_1, \dots, z_\ell$, но не зависящей от u [4] (см. также работу [3], раздел 2).

Введем стандартные образующие Шевалле $e_i, h_i, f_i, i = 1, \dots, n$, простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ранга n . Элементы h_i образуют базис подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, тогда как e_i и f_i порождают соответственно нильпотентные подалгебры $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$. Пусть $A = [a_{ij}]$ – матрица Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Определяющие соотношения для $\mathfrak{g}$ принимают вид

$$\begin{aligned} [e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_i, & [h_i, h_j] &= 0, \\ [h_i, e_j] &= a_{ij} e_j, & [h_i, f_j] &= -a_{ij} f_j \end{aligned}$$

вместе с соотношениями Серра (см., например, книгу [13]). Модуль Верма M_λ для данного $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ является фактором алгебры $U(\mathfrak{g})$ по левому идеалу, порожденному $\mathfrak{n}_+$ и элементами $h_i - \lambda(h_i), i = 1, \dots, n$. Обозначим образ 1 в M_λ через 1_λ .

Для любых весов $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathfrak{h}^*$ рассмотрим тензорное произведение модулей Верма $M_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes M_{\lambda_\ell}$. Опишем общие собственные векторы коммутативной подалгебры $\mathcal{A}(\mathfrak{g})_\chi$ в тензорном произведении. Для набора различных комплексных чисел $w_1, \dots, w_m$ с $w_i \neq z_j$ и набора (мультимножества) меток $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ введем вектор Бете

$$\phi(w_1^{i_1}, \dots, w_m^{i_m}) \in M_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes M_{\lambda_\ell}$$

с помощью следующей формулы, восходящей к работе [14] (см. также работы [1], [15], [16] и имеющиеся в них ссылки):

$$\phi(w_1^{i_1}, \dots, w_m^{i_m}) = \sum_{(I^1, \dots, I^\ell)} \bigotimes_{k=1}^{\ell} \prod_{s=1}^{a_k} \frac{1}{w_{j_s^k}^k - w_{j_{s+1}^k}^k} \prod_{r \in I^k} f_{i_r} 1_{\lambda_k}, \quad (2.15)$$

где суммирование производится по всем упорядоченным разбиениям $I^1 \cup I^2 \cup \dots \cup I^\ell$ множества $\{1, \dots, m\}$ на упорядоченные подмножества $I^k = \{j_1^k, j_2^k, \dots, j_{a_k}^k\}$, а произведение берется слева направо; в (2.15) $w_{j_{s+1}^k}^k := z_k$ при $s = a_k$.

Предположим, что $\chi \in \mathfrak{h}^*$. Будем считать χ функционалом на $\mathfrak{g}$, который обращается в ноль на $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$. Система уравнений анзаца Бете принимает вид

$$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\langle \check{\alpha}_{i_j}, \lambda_i \rangle}{w_j - z_i} - \sum_{s \neq j} \frac{\langle \check{\alpha}_{i_j}, \alpha_{i_s} \rangle}{w_j - w_s} = \langle \check{\alpha}_{i_j}, \chi \rangle, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.16)$$

где α_i и $\check{\alpha}_i$ означают соответственно простые корни и дуальные простые корни [13].

Теперь мы готовы описать собственные значения гамильтонианов Годена на векторах Бете. Для заданных выше параметров введем гомоморфизм между $U(\hat{\mathfrak{h}}_-)$ и множеством рациональных функций переменной u согласно следующему правилу:

$$\varrho: H[-r-1] \mapsto \frac{\partial_u^r}{r!} \mathcal{H}(u), \quad H \in \mathfrak{h}, \quad r \geq 0, \quad (2.17)$$

где

$$\mathcal{H}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{\lambda_a(H)}{u - z_a} - \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_{i_j}(H)}{u - w_j} - \chi(H).$$

Пусть $S \in \mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})$ – вектор Сигала–Сугавары. Композиция $\varrho \circ f$ этого гомоморфизма и изоморфизма (2.9) переводит S в функцию $\varrho(f(S))$, рациональную по u . Кроме

того, будем считать образ $\Phi(S)$ элемента S при действии антигомоморфизма (2.14) оператором на тензорном произведении модулей Верма $M_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes M_{\lambda_\ell}$. Ниже следующее утверждение является по сути переформулировкой теорем 6.5 и 6.7 из работы [3]; для случая $\chi = 0$ результат был получен в работе [1] (см. теорему 3).

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что выполнены уравнения анзаца Бете (2.16). Если вектор Бете $\phi(w_1^{i_1}, \dots, w_m^{i_m})$ ненулевой, то он является собственным вектором оператора $\Phi(S)$ с собственным значением $\varrho(f(S))$.*

В дальнейшем мы полагаемся на результаты работ [9], [8], [11] и приводим явные формулы для операторов $\Phi(S_i)$ и их собственных значений $\varrho(f(S_i))$ на векторах Бете для полных наборов векторов Сигала–Сугавары $S_1, \dots, S_n$ для всех классических типов.

3. ГАМИЛЬТонианы ГОДЕНА И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Будем использовать расширенную алгебру Ли $\hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}\tau$, где элемент τ удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$[\tau, X[r]] = -rX[r-1], \quad [\tau, K] = 0. \quad (3.1)$$

Рассмотрим расширение изоморфизма (2.9) до изоморфизма

$$f: \mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathbb{C}[\tau] \rightarrow \mathcal{W}({}^L\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[\tau], \quad (3.2)$$

который является тождественным отображением на $\mathbb{C}[\tau]$.

Для произвольной $(N \times N)$ -матрицы $A = [A_{ij}]$ с элементами в некотором кольце определим *столбцовый определитель* $\text{cdet } A$ и *строчный определитель* $\text{rdet } A$:

$$\text{cdet } A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn } \sigma \cdot A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(N)N}, \quad (3.3)$$

$$\text{rdet } A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn } \sigma \cdot A_{1\sigma(1)} \cdots A_{N\sigma(N)}, \quad (3.4)$$

где $\mathfrak{S}_N$ означает симметрическую группу.

3.1. Тип А. Будем работать с редуктивной алгеброй Ли $\mathfrak{gl}_N$ вместо простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_N$ типа А. Пусть E_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$, есть стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$. Обозначим как $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$, порожденные соответственно диагональными, верхне- и нижнетреугольными матрицами, так что $E_{11}, \dots, E_{NN}$ является базисом подалгебры $\mathfrak{h}$.

Для начала вспомним, как строятся некоторые полные наборы векторов Сигала–Сугавары для $\mathfrak{gl}_N$. Для каждого $a \in \{1, \dots, m\}$ введем элемент $E[r]_a$ алгебры

$$\underbrace{\text{End } \mathbb{C}^N \otimes \cdots \otimes \text{End } \mathbb{C}^N}_m \otimes U \quad (3.5)$$

по формуле

$$E[r]_a = \sum_{i,j=1}^N 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(m-a)} \otimes E_{ij}[r], \quad (3.6)$$

где e_{ij} – стандартные матричные единицы и U означает универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{gl}}_N \oplus \mathbb{C}\tau$. Пусть $H^{(m)}$ и $A^{(m)}$ означают соответственно образы нормированного симметризатора и антисимметризатора в групповой алгебре для симметричной группы $\mathfrak{S}_m$ при ее естественном действии на $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$. В частности, $H^{(m)}$ и $A^{(m)}$ – идемпотенты. Мы отождествляем их с элементами $H^{(m)} \otimes 1$ и $A^{(m)} \otimes 1$ алгебры (3.5). Зададим элементы $\varphi_{ma}, \psi_{ma}, \theta_{ma} \in U(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}])$ с помощью разложений

$$\mathrm{tr} A^{(m)}(\tau + E[-1]_1) \dots (\tau + E[-1]_m) = \varphi_{m0}\tau^m + \varphi_{m1}\tau^{m-1} + \dots + \varphi_{mm}, \quad (3.7)$$

$$\mathrm{tr} H^{(m)}(\tau + E[-1]_1) \dots (\tau + E[-1]_m) = \psi_{m0}\tau^m + \psi_{m1}\tau^{m-1} + \dots + \psi_{mm}, \quad (3.8)$$

где следы берутся по всем m копиям алгебры $\mathrm{End} \mathbb{C}^N$ в (3.5) и

$$\mathrm{tr}(\tau + E[-1])^m = \theta_{m0}\tau^m + \theta_{m1}\tau^{m-1} + \dots + \theta_{mm}. \quad (3.9)$$

Выражения типа $\tau + E[-1]$ следует понимать как матрицы, при этом τ означает скалярную матрицу τI . Запишем столбцовый определитель матрицы как полином по τ :

$$\mathrm{cdet}(\tau + E[-1]) = \tau^N + \varphi_1\tau^{N-1} + \dots + \varphi_N, \quad \varphi_m \in U(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]). \quad (3.10)$$

Имеем $\varphi_{mm} = \varphi_m$ для $m = 1, \dots, N$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Элементы φ_{ma}, ψ_{ma} и θ_{ma} принадлежат центру Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$. Кроме того, каждое из семейств*

$$\varphi_1, \dots, \varphi_N, \quad \psi_{11}, \dots, \psi_{NN}, \quad \theta_{11}, \dots, \theta_{NN}$$

является полным набором векторов Сигала–Сугавары для $\mathfrak{gl}_N$.

Эта теорема восходит к работе [7], где впервые были обнаружены элементы φ_m (в несколько иной форме). Прямое доказательство теоремы для коэффициентов полинома (3.10) приводится в работе [9]. Элементы ψ_{ma} можно связать с φ_{ma} с помощью теоремы Мак-Магона [17], а связь между φ_{ma} и θ_{ma} устанавливается с помощью тождества типа Ньютона, которое приводится в работе [18] (см. теорему 15). Заметим, что суперверсии этих соотношений между семействами векторов Сигала–Сугавары для супералгебры Ли $\mathfrak{gl}_{m|n}$ даны в работе [10], где также предложены более простые соображения для чисто четного случая.

Вычислим образы векторов Сигала–Сугавары при действии инволюции (2.13). Распишем ее на алгебру $U(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]) \otimes \mathbb{C}[\tau]$ так, что инволюция на $\mathbb{C}[\tau]$ действует как тождественное отображение.

ЛЕММА 3.1. *Для образов по отношению к инволюции ς имеем*

$$\mathrm{tr} A^{(m)}(\tau + E[-1]_1) \dots (\tau + E[-1]_m) \mapsto \mathrm{tr} A^{(m)}(\tau - E[-1]_1) \dots (\tau - E[-1]_m), \quad (3.11)$$

$$\mathrm{tr} H^{(m)}(\tau + E[-1]_1) \dots (\tau + E[-1]_m) \mapsto \mathrm{tr} H^{(m)}(\tau - E[-1]_1) \dots (\tau - E[-1]_m), \quad (3.12)$$

$$\mathrm{tr}(\tau + E[-1])^m \mapsto \mathrm{tr}(\tau - E^t[-1])^m \quad (3.13)$$

и

$$\mathrm{cdet}(\tau + E[-1]) \mapsto \mathrm{cdet}(\tau - E^t[-1]), \quad (3.14)$$

где t означает обычное транспонирование матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая часть в (3.11) равна линейной комбинации выражений вида

$$\mathrm{tr} A^{(m)} E[r_1]_{a_1} \dots E[r_p]_{a_p} \tau^k, \quad 1 \leq a_1 < \dots < a_p \leq m. \quad (3.15)$$

Однако это выражение не меняется при любых перестановках множителей $E[r_i]_{a_i}$. Это следует из коммутационных соотношений

$$E[r]_a E[s]_b - E[s]_b E[r]_a = P_{ab} E[r+s]_b - E[r+s]_b P_{ab}, \quad a < b,$$

где

$$P_{ab} = \sum_{i,j=1}^N 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(b-a-1)} \otimes e_{ji} \otimes 1^{\otimes(m-b)} \quad (3.16)$$

есть оператор перестановки. Нужно только заметить, что

$$A^{(m)} P_{ab} = P_{ab} A^{(m)} = -A^{(m)},$$

и использовать циклическое свойство следа. Следовательно, образ элемента (3.15) при действии ς равен

$$(-1)^p \mathrm{tr} A^{(m)} E[r_1]_{a_1} \dots E[r_p]_{a_p} \tau^k$$

что подтверждает правило (3.11).

Такое же рассуждение доказывает (3.12). Теперь формула (3.14) вытекает из соотношения

$$\mathrm{cdet}(\tau + E[-1]) = \mathrm{tr} A^{(N)} (\tau + E[-1]_1) \dots (\tau + E[-1]_N), \quad (3.17)$$

которое есть следствие того факта, что $\tau + E[-1]$ – матрица Манина (см. обширный обзор матриц Манина в работе [18]). Действительно, с помощью (3.11) для образа соотношения (3.17) при действии ς получаем

$$\mathrm{tr} A^{(N)} (\tau - E[-1]_1) \dots (\tau - E[-1]_N) = \mathrm{tr} A^{(N)} (\tau - E^t[-1]_1) \dots (\tau - E^t[-1]_N),$$

где мы применили транспонирование $t_1 \dots t_N$ во всех копиях алгебры $\mathrm{End} \mathbb{C}^N$ и использовали инвариантность $A^{(N)}$ относительно такого транспонирования. Поскольку $\tau - E^t[-1]$ также является матрицей Манина, результирующее выражение совпадает с $\mathrm{cdet}(\tau - E^t[-1])$.

Наконец, соотношение (3.13) следует из формулы Ньютона, связывающей коэффициенты полинома в (3.9) с коэффициентами полинома из (3.10) (см. работу [8], формула (3.5)). Лемма доказана.

Выберем параметры так же, как и в разделе 2, и предположим, что χ обращается в ноль на подпространстве $\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$, так что χ можно считать элементом пространства $\mathfrak{h}^*$. Положим

$$E_{ij}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{(E_{ij})_a}{u - z_a} - \chi(E_{ij}) \in U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes \ell}.$$

Рассмотрим строчный определитель $\mathrm{rdet}(\partial_u + E(u))$ матрицы

$$\partial_u + E(u) = [\delta_{ij} \partial_u + E_{ij}(u)]$$

как дифференциальный оператор по ∂_u с коэффициентами в $U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes \ell}$. Кроме того, в соответствии с правилом (2.17) положим

$$\mathcal{E}_{ii}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{\lambda_a(E_{ii})}{u - z_a} - \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_{ij}(E_{ii})}{u - w_j} - \chi(E_{ii}).$$

Во всех последующих формулах для гамильтонианов Годена предполагается справедливость уравнений анзаца Бете (2.16).

ТЕОРЕМА 3.2. *Для оператора $\text{rdet}(\partial_u + E(u))$ собственное значение на векторе Бете (2.15) определяется выражением*

$$\text{rdet}(\partial_u + E(u))\phi(w_1^{i_1}, \dots, w_m^{i_m}) = (\partial_u + \mathcal{E}_{NN}(u)) \dots (\partial_u + \mathcal{E}_{11}(u))\phi(w_1^{i_1}, \dots, w_m^{i_m}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы далее применить теорему 2.1, найдем образ полинома $\text{cdet}(\tau + E[-1])$ при действии антигомоморфизма Φ . Будем считать Φ таким отображением

$$\Phi: U(t^{-1}\mathfrak{gl}_N[t^{-1}]) \otimes \mathbb{C}[\tau] \rightarrow U(\mathfrak{gl}_N)^{\otimes \ell} \otimes \mathbb{C}[\partial_u],$$

что $\tau \mapsto \partial_u$. Заметим, что по определению гомоморфизма (2.12)

$$\Psi: E[-1] \mapsto -E(u)$$

и, таким образом, согласно (3.14)

$$\Phi: \text{cdet}(\tau + E[-1]) \mapsto \text{cdet}(\partial_u + E^t(u)) = \text{rdet}(\partial_u + E(u)). \quad (3.18)$$

Образы элементов φ_i при действии изоморфизма (2.9) для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ легко получить из (3.10), они задаются формулой

$$f: \text{cdet}(\tau + E[-1]) \mapsto (\tau + E_{NN}[-1]) \dots (\tau + E_{11}[-1]). \quad (3.19)$$

Поэтому

$$\varrho \circ f: \text{cdet}(\tau + E[-1]) \mapsto (\partial_u + \mathcal{E}_{NN}(u)) \dots (\partial_u + \mathcal{E}_{11}(u)),$$

что завершает доказательство.

Формулу (3.19) можно обобщить и получить образы Хариш-Чандры полиномов (3.7) и (3.8). Имеем

$$\begin{aligned} f: \text{tr } A^{(m)}(\tau + E[-1]_1) \dots (\tau + E[-1]_m) &\mapsto e_m(\tau + E_{11}[-1], \dots, \tau + E_{NN}[-1]), \\ f: \text{tr } H^{(m)}(\tau + E[-1]_1) \dots (\tau + E[-1]_m) &\mapsto h_m(\tau + E_{11}[-1], \dots, \tau + E_{NN}[-1]), \end{aligned}$$

где использованы стандартные некоммутативные версии полных и элементарных симметрических функций упорядоченных переменных $x_1, \dots, x_p$:

$$h_m(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m}, \quad (3.20)$$

$$e_m(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i_1 > \dots > i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m}. \quad (3.21)$$

Приведенные ниже следствия можно получить из теоремы 3.2 или доказать аналогичным образом с использованием леммы 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Собственные значения на векторе Бете (2.15) для операторов

$$\mathrm{tr} A^{(m)}(\partial_u + E(u)_1) \dots (\partial_u + E(u)_m), \quad \mathrm{tr} H^{(m)}(\partial_u + E(u)_1) \dots (\partial_u + E(u)_m)$$

определяются соответственно формулами

$$e_m(\partial_u + \mathcal{E}_{11}(u), \dots, \partial_u + \mathcal{E}_{NN}(u)), \quad h_m(\partial_u + \mathcal{E}_{11}(u), \dots, \partial_u + \mathcal{E}_{NN}(u)).$$

Согласно работе [9] (см. следствие 6.4) имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}: \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathrm{tr}(\tau + E[-1])^k \mapsto \sum_{i=1}^N (1 - z(\tau + E_{11}[-1]))^{-1} \dots (1 - z(\tau + E_{ii}[-1]))^{-1} \times \\ \times (1 - z(\tau + E_{i-1i-1}[-1])) \dots (1 - z(\tau + E_{11}[-1])), \end{aligned}$$

где z – независимая переменная. Таким образом, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Собственное значение на векторе Бете (2.15) ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathrm{tr}(\partial_u + E^t(u))^k$$

определяется формулой

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (1 - z(\partial_u + \mathcal{E}_{11}(u)))^{-1} \dots (1 - z(\partial_u + \mathcal{E}_{ii}(u)))^{-1} \times \\ \times (1 - z(\partial_u + \mathcal{E}_{i-1i-1}(u))) \dots (1 - z(\partial_u + \mathcal{E}_{11}(u))). \end{aligned}$$

3.2. Типы B и D. Теперь обратимся к ортогональным алгебрам Ли и положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_N$, где $N = 2n$ или $N = 2n + 1$. Это простые алгебры Ли типов соответственно D_n или B_n . Воспользуемся инволюцией, заданной на множестве $\{1, \dots, N\}$ соотношением $i' = N - i + 1$. Подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}_N$, порожденная элементами $F_{ij} = E_{ij} - E_{j'i'}$, $i, j \in \{1, \dots, N\}$, изоморфна ортогональной алгебре Ли $\mathfrak{o}_N$.

Обозначим как $\mathfrak{h}$ подалгебру Картана в $\mathfrak{o}_N$ с базисными элементами $F_{11}, \dots, F_{nn}$. Справедливо треугольное разложение $\mathfrak{o}_N = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, где $\mathfrak{n}_-$ и $\mathfrak{n}_+$ означают подалгебры в $\mathfrak{o}_N$, порожденные соответственно элементами F_{ij} при $i > j$ и элементами F_{ij} при $i < j$.

Воспользуемся элементами $F_{ij}[r] = F_{ij}t^r$ алгебры Ли петель $\mathfrak{o}_N[t, t^{-1}]$. Введем элементы $F[r]_a$ алгебры (3.5):

$$F[r]_a = \sum_{i,j=1}^N 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(m-a)} \otimes F_{ij}[r], \quad (3.22)$$

где U в выражении (3.5) означает теперь универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли $\hat{\mathfrak{o}}_N \oplus \mathbb{C}\tau$.

Рассмотрим операторы P_{ab} при $1 \leq a < b \leq m$, заданные формулой (3.16), и введем операторы

$$Q_{ab} = \sum_{i,j=1}^N 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(b-a-1)} \otimes e_{i'j'} \otimes 1^{\otimes(m-b)}.$$

Положим

$$S^{(m)} = \frac{1}{m!} \prod_{1 \leq a < b \leq m} \left(1 + \frac{P_{ab}}{b-a} - \frac{Q_{ab}}{N/2 + b - a - 1} \right), \quad (3.23)$$

где произведение берется в лексикографическом порядке по парам (a, b) . Данный элемент является образом симметризатора в алгебре Брауэра $\mathcal{B}_m(N)$ при ее действии на векторном пространстве $(\mathbb{C}^N)^{\otimes m}$. В частности, для оператора $S^{(m)}$ при любых $1 \leq a < b \leq m$ имеем

$$S^{(m)} Q_{ab} = Q_{ab} S^{(m)} = 0, \quad S^{(m)} P_{ab} = P_{ab} S^{(m)} = S^{(m)}. \quad (3.24)$$

Симметризатор допускает несколько иных аналогичных выражений [8].

Воспользуемся обозначением

$$\gamma_m(\omega) = \frac{\omega + m - 2}{\omega + 2m - 2} \quad (3.25)$$

и определим элементы $\varphi_{ma} \in U(t^{-1} \mathfrak{o}_N[t^{-1}])$ с помощью разложения

$$\gamma_m(N) \operatorname{tr} S^{(m)}(\tau + F[-1]_1) \dots (\tau + F[-1]_m) = \varphi_{m0} \tau^m + \varphi_{m1} \tau^{m-1} + \dots + \varphi_{mm}, \quad (3.26)$$

где след берется по всем m копиям алгебры $\operatorname{End} \mathbb{C}^N$. Согласно основному результату работы [8] все коэффициенты φ_{ma} принадлежат центру Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{d}}_N)$. В четном ортогональном случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$ в центре существует дополнительный элемент $\varphi'_n = \operatorname{Pf} \tilde{F}[-1]$, который определен как (некоммутативный) пфаффиан кососимметричной матрицы $\tilde{F}[-1] = [\tilde{F}_{ij}[-1]]$:

$$\operatorname{Pf} \tilde{F}[-1] = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \tilde{F}_{\sigma(1) \sigma(2)}[-1] \dots \tilde{F}_{\sigma(2n-1) \sigma(2n)}[-1], \quad (3.27)$$

где $\tilde{F}_{ij}[-1] = F_{ij'}[-1]$. Семейство $\varphi_{22}, \varphi_{44}, \dots, \varphi_{2n, 2n}$ представляет собой полный набор векторов Сигала–Сугавары для $\mathfrak{o}_{2n+1}$, тогда как $\varphi_{22}, \varphi_{44}, \dots, \varphi_{2n-2, 2n-2}, \varphi'_n$ определяет полный набор векторов Сигала–Сугавары для $\mathfrak{o}_{2n}$.

Продолжим инволюцию (2.13) на алгебру $U(t^{-1} \mathfrak{o}_N[t^{-1}]) \otimes \mathbb{C}[\tau]$, задавая ее действие на $\mathbb{C}[\tau]$ как тождественное отображение.

ЛЕММА 3.2. *Элемент (3.26) устойчив при действии инволюции ς . Кроме того, в случае алгебры Ли типа D_n*

$$\varsigma: \operatorname{Pf} \tilde{F}[-1] \mapsto (-1)^n \operatorname{Pf} \tilde{F}[-1]. \quad (3.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соображения, аналогичные тем, что использовались при доказательстве леммы 3.1, показывают, что образ элемента (3.26) при инволюции ς равен

$$\gamma_m(N) \operatorname{tr} S^{(m)}(\tau - F[-1]_1) \dots (\tau - F[-1]_m). \quad (3.29)$$

Действительно, это вытекает из свойств (3.24) и коммутационных соотношений

$$F[r]_a F[s]_b - F[s]_b F[r]_a = (P_{ab} - Q_{ab}) F[r+s]_b - F[r+s]_b (P_{ab} - Q_{ab}), \quad a < b.$$

Применяя одновременное транспонирование $e_{ij} \mapsto e_{j'i'}$ ко всем m копиям алгебры $\text{End } \mathbb{C}^N$, приходим к выводу, что (3.29) совпадает с (3.26), потому что это преобразование переводит каждый множитель $\tau - F[-1]_a$ в $\tau + F[-1]_a$, тогда как оператор $S^{(m)}$ остается инвариантным. Соотношение (3.28) немедленно следует из (3.27). Лемма доказана.

Согласно основному результату работы [11] образ полинома (3.26) при действии изоморфизма (3.2) для типа B_n задается формулой

$$h_m(\tau + F_{11}[-1], \dots, \tau + F_{nn}[-1], \tau - F_{nn}[-1], \dots, \tau - F_{11}[-1]),$$

а для типа D_n — формулой

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} h_m(\tau + F_{11}[-1], \dots, \tau + F_{n-1n-1}[-1], \tau - F_{nn}[-1], \dots, \tau - F_{11}[-1]) + \\ & + \frac{1}{2} h_m(\tau + F_{11}[-1], \dots, \tau + F_{nn}[-1], \tau - F_{n-1n-1}[-1], \dots, \tau - F_{11}[-1]). \end{aligned}$$

Последнюю сумму можно также записать в виде

$$\begin{aligned} & h_m(\tau + F_{11}[-1], \dots, \tau + F_{nn}[-1], \tau - F_{nn}[-1], \dots, \tau - F_{11}[-1]) - \\ & - \sum_{k+l=m-1} h_k(\tau + F_{11}[-1], \dots, \tau + F_{nn}[-1]) \tau h_l(\tau - F_{nn}[-1], \dots, \tau - F_{11}[-1]). \end{aligned}$$

Кроме того, образ элемента φ'_n в случае типа D_n дается выражением

$$(F_{11}[-1] - \tau) \dots (F_{nn}[-1] - \tau) 1, \quad (3.30)$$

где τ следует понимать как дифференциальный оператор, так что $\tau 1 = 0$; прямое вычисление образа Хариш-Чандры для φ'_n приведено в работе [19].

Выберем параметры так же, как в разделе 2, и предположим, что χ обращается в ноль на подпространстве $\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+$ алгебры Ли $\mathfrak{o}_N$, так что можно считать χ элементом пространства $\mathfrak{h}^*$. Положим

$$F_{ij}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{(F_{ij})_a}{u - z_a} - \chi(F_{ij}) \in U(\mathfrak{o}_N)^{\otimes \ell}.$$

В соответствии с (2.17) положим

$$\mathcal{F}_{ii}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{\lambda_a(F_{ii})}{u - z_a} - \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_{ij}(F_{ii})}{u - w_j} - \chi(F_{ii}).$$

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$ определим оператор

$$\text{Pf } \tilde{F}(u) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \text{sgn } \sigma \cdot \tilde{F}_{\sigma(1) \sigma(2)}(u) \dots \tilde{F}_{\sigma(2n-1) \sigma(2n)}(u), \quad (3.31)$$

где $\tilde{F}_{ij}(u) = F_{ij'}(u)$. Как и раньше, предположим справедливость уравнений анзаца Бете (2.16).

ТЕОРЕМА 3.3. *Собственное значение на векторе Бете (2.15) для оператора*

$$\gamma_m(N) \operatorname{tr} S^{(m)}(\partial_u + F(u)_1) \dots (\partial_u + F(u)_m) \quad (3.32)$$

для типа B_n определяется формулой

$$h_m(\partial_u + \mathcal{F}_{11}(u), \dots, \partial_u + \mathcal{F}_{nn}(u), \partial_u - \mathcal{F}_{nn}(u), \dots, \partial_u - \mathcal{F}_{11}(u)),$$

а для типа D_n – формулой

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} h_m(\partial_u + \mathcal{F}_{11}(u), \dots, \partial_u + \mathcal{F}_{n-1n-1}(u), \partial_u - \mathcal{F}_{nn}(u), \dots, \partial_u - \mathcal{F}_{11}(u)) + \\ & + \frac{1}{2} h_m(\partial_u + \mathcal{F}_{11}(u), \dots, \partial_u + \mathcal{F}_{nn}(u), \partial_u - \mathcal{F}_{n-1n-1}(u), \dots, \partial_u - \mathcal{F}_{11}(u)). \end{aligned}$$

Кроме того, собственное значение оператора $\operatorname{Pf} \tilde{F}(u)$ в случае типа D_n дается выражением

$$(\mathcal{F}_{11}(u) - \partial_u) \dots (\mathcal{F}_{nn}(u) - \partial_u) 1. \quad (3.33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова применим теорему 2.1 и будем считать Φ таким отображением

$$\Phi: U(t^{-1} \mathfrak{o}_N[t^{-1}]) \otimes \mathbb{C}[\tau] \rightarrow U(\mathfrak{o}_N)^{\otimes \ell} \otimes \mathbb{C}[\partial_u],$$

что $\tau \mapsto \partial_u$. По определению гомоморфизма (2.12) имеем

$$\Psi: F[-1] \mapsto -F(u).$$

Таким образом, используя эквивалентную формулу (3.29) для полинома (3.26), найдем, что его образ при действии Φ совпадает с оператором (3.32). Доказательство первой части теоремы завершается использованием формул для образов элементов (3.26) при действии изоморфизмов (3.2), упомянутых выше.

Наконец, по лемме 3.2 в случае типа D_n

$$\Phi: \operatorname{Pf} \tilde{F}[-1] \mapsto \operatorname{Pf} \tilde{F}(u),$$

поэтому последнее утверждение доказывается с помощью формулы (3.30) для образа пфаффиана $\operatorname{Pf} \tilde{F}[-1]$ при действии изоморфизма (2.9).

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Собственное значение на векторе Бете (2.15) для производящей функции*

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} (-z)^m \gamma_m(N) \operatorname{tr} S^{(m)}(\partial_u + F(u)_1) \dots (\partial_u + F(u)_m) \right)^{-1} \quad (3.34)$$

в случае типа B_n находится из выражения

$$(1 + (\partial_u - \mathcal{F}_{11}(u))z) \dots (1 + (\partial_u - \mathcal{F}_{nn}(u))z) (1 + (\partial_u + \mathcal{F}_{nn}(u))z) \dots (1 + (\partial_u + \mathcal{F}_{11}(u))z),$$

а в случае типа D_n – из выражения

$$\begin{aligned} & (1 + (\partial_u - \mathcal{F}_{11}(u))z) \dots (1 + (\partial_u - \mathcal{F}_{nn}(u))z) (1 + \partial_u z)^{-1} \times \\ & \times (1 + (\partial_u + \mathcal{F}_{nn}(u))z) \dots (1 + (\partial_u + \mathcal{F}_{11}(u))z). \end{aligned}$$

3.3. Тип C. Отождествим симплектическую алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ с подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{gl}_{2n}$, порожденной элементами $F_{ij} = E_{ij} - \varepsilon_i \varepsilon_j E_{j'i'}$, $i, j \in \{1, \dots, 2n\}$; здесь $i' = 2n - i + 1$, а $\varepsilon_i = 1$ при $i = 1, \dots, n$ и $\varepsilon_i = -1$ при $i = n + 1, \dots, 2n$.

Обозначим как $\mathfrak{h}$ подалгебру Картана в $\mathfrak{sp}_{2n}$, порожденную базисными элементами $F_{11}, \dots, F_{nn}$. Справедливо треугольное разложение $\mathfrak{sp}_{2n} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, где $\mathfrak{n}_-$ и $\mathfrak{n}_+$ – подалгебры в $\mathfrak{sp}_{2n}$, порожденные соответственно элементами F_{ij} при $i > j$ и элементами F_{ij} при $i < j$.

Воспользуемся элементами $F_{ij}[r] = F_{ij}t^r$ алгебры Ли петель $\mathfrak{sp}_{2n}[t, t^{-1}]$. Введем элементы $F[r]_a$ алгебры (3.5),

$$F[r]_a = \sum_{i,j=1}^{2n} 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(m-a)} \otimes F_{ij}[r], \quad (3.35)$$

где U в (3.5) теперь обозначает универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sp}}_{2n} \oplus \mathbb{C}\tau$.

Рассмотрим оператор P_{ab} при $1 \leq a < b \leq m$, заданный формулой (3.16), и введем операторы

$$Q_{ab} = \sum_{i,j=1}^{2n} \varepsilon_i \varepsilon_j 1^{\otimes(a-1)} \otimes e_{ij} \otimes 1^{\otimes(b-a-1)} \otimes e_{i'j'} \otimes 1^{\otimes(m-b)}.$$

Для $1 \leq m \leq n$ положим

$$S^{(m)} = \frac{1}{m!} \prod_{1 \leq a < b \leq m} \left(1 - \frac{P_{ab}}{b-a} - \frac{Q_{ab}}{n-b+a+1} \right), \quad (3.36)$$

где произведение берется в лексикографическом порядке по парам (a, b) . Данный элемент является образом симметризатора в алгебре Брауэра $\mathcal{B}_m(-2n)$ при ее действии на векторном пространстве $(\mathbb{C}^{2n})^{\otimes m}$. Используем обозначение (3.25) и введем следующий полином по переменной τ :

$$\begin{aligned} \gamma_m(-2n) \operatorname{tr} S^{(m)}(\tau + F[-1]_1) \dots (\tau + F[-1]_m) = \\ = \varphi_{m0} \tau^m + \varphi_{m1} \tau^{m-1} + \dots + \varphi_{mm}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где след берется по всем m копиям алгебры $\operatorname{End} \mathbb{C}^{2n}$. Согласно результатам работы [8] значения m в выражении (3.37) можно расширить до интервала $1 \leq m \leq 2n$ (а в действительности и до $m = 2n + 1$) с целью получить корректно определенный полином по τ . Кроме того, семейство $\varphi_{22}, \varphi_{44}, \dots, \varphi_{2n, 2n}$ представляет собой полный набор векторов Сигала–Сугавары для $\mathfrak{sp}_{2n}$.

Продолжим инволюцию (2.13) на алгебру $U(t^{-1}\mathfrak{sp}_{2n}[t^{-1}]) \otimes \mathbb{C}[\tau]$, задавая ее действие на $\mathbb{C}[\tau]$ как тождественное отображение.

ЛЕММА 3.3. *Элемент (3.37) устойчив при действии инволюции ς .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство такое же, как и доказательство леммы 3.2, что приводит к эквивалентной формуле для полинома (3.37): его можно записать как

$$\gamma_m(-2n) \operatorname{tr} S^{(m)}(\tau - F[-1]_1) \dots (\tau - F[-1]_m). \quad (3.38)$$

В соответствии с основным результатом работы [11] образ полинома (3.37) для $1 \leq m \leq 2n + 1$ при действии изоморфизма (3.2) задается формулой

$$e_m(\tau + F_{11}[-1], \dots, \tau + F_{nn}[-1], \tau, \tau - F_{nn}[-1], \dots, \tau - F_{11}[-1]),$$

где использованы обозначения (3.21).

Выберем параметры так же, как в разделе 2, и предположим, что χ обращается в ноль на подпространстве $\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+$ алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$, поэтому можно считать χ элементом пространства $\mathfrak{h}^*$. Положим

$$F_{ij}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{(F_{ij})_a}{u - z_a} - \chi(F_{ij}) \in U(\mathfrak{sp}_{2n})^{\otimes \ell}.$$

Согласно формуле (2.17) введем

$$\mathcal{F}_{ii}(u) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{\lambda_a(F_{ii})}{u - z_a} - \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_{ij}(F_{ii})}{u - w_j} - \chi(F_{ii}).$$

Как и раньше, предположим, что справедливы уравнения анзаца Бете (2.16).

ТЕОРЕМА 3.4. *Для любого $1 \leq m \leq 2n + 1$ собственные значения на векторе Бете (2.15) для оператора*

$$\gamma_m(-2n) \operatorname{tr} S^{(m)}(\partial_u + F(u)_1) \dots (\partial_u + F(u)_m) \quad (3.39)$$

определяются как

$$e_m(\partial_u + \mathcal{F}_{11}(u), \dots, \partial_u + \mathcal{F}_{nn}(u), \partial_u, \partial_u - \mathcal{F}_{nn}(u), \dots, \partial_u - \mathcal{F}_{11}(u)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 3.3, искомое выражение получается из теоремы 2.1 и леммы 3.3.

3.4. Связь с результатами работ [12] и [20]. Теорема 3.2 была доказана ранее в работе [12] (см. теорему 9.2) в несколько иной форме. Установим связь между этими результатами, показав, что один получается из другого путем использования автоморфизма алгебры токов. Обозначения в работе [12] сводятся к нашим (мы используем обозначения из работ [1] и [3]) следующим образом. Старшие веса $\Lambda_k = (\Lambda_k^1, \dots, \Lambda_k^N)$ соответствует нашим λ_k , поэтому $\Lambda_k^i = \lambda_k(E_{ii})$; параметры z_i те же самые. Диагональная матрица $K = \operatorname{diag}[K_1, \dots, K_N]$ соответствует нашему элементу $-\chi$, поэтому $K_i = -\chi(E_{ii})$. Наконец, набор неотрицательных целых чисел $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{N-1})$ порождает наше мультимножество простых корней α_{ij} , где $\alpha_l = \varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}$ берется ξ^l раз для каждого значения $l = 1, \dots, N - 1$. Соответствующие переменные $t_1^1, \dots, t_{\xi^1}^1, \dots, t_1^{N-1}, \dots, t_{\xi^{N-1}}^{N-1}$ отождествляются с нашими параметрами $w_1, \dots, w_m$ при $m = |\xi|$. Дуальные простые корни $\check{\alpha}_l$ совпадают с элементами $E_{ll} - E_{l+1, l+1}$, поэтому уравнения анзаца Бете (9.3) в работе [12] превращаются в уравнения (2.16) настоящей работы.

Используя описанное выше соответствие между параметрами, можно сформулировать теорему 9.2 работы [12] в наших обозначениях как следующее соотношение для собственного значения оператора $\operatorname{cdet}(\partial_u - E(u))$ на векторе Бете (2.15):

$$\operatorname{cdet}(\partial_u - E(u))\phi(w_1^{i_1}, \dots, w_m^{i_m}) = (\partial_u - \mathcal{E}_{11}(u)) \dots (\partial_u - \mathcal{E}_{NN}(u))\phi(w_1^{i_1}, \dots, w_m^{i_m}).$$

Это соотношение вытекает из теоремы 3.2 при скручивании действия $U(\mathfrak{gl}_N)$ на каждом модуле Верма M_{λ_k} с помощью автоморфизма $E_{ij} \mapsto -E_{j'i'}$, где $i' = N - i + 1$. Автоморфизм переводит $\text{rdet}(\partial_u + E(u))$ в $\text{cdet}(\partial_u - E(u))$ и $\mathcal{E}_{ii}(u)$ в $-\mathcal{E}_{i'i'}(u)$.

Установим также связь теорем 3.2–3.4 с формулами для универсальных дифференциальных операторов, соответствующих популяциям критических точек мастер-функций, которые связаны с многообразиями флагов (см. работу [20]). Используя обозначения из работы [12], мы, следуя работе [20], в случае типа A введем полиномы

$$T_a(u) = \prod_{k=1}^{\ell} (u - z_k)^{\Lambda_k^a}, \quad a = 1, \dots, N,$$

$$y_a(u) = \prod_{p=1}^{\xi^a} (u - t_p^a), \quad a = 1, \dots, N - 1.$$

Тогда собственное значение для вектора Бете в теореме 3.2 с $\chi = 0$ совпадает с дифференциальным оператором

$$\overleftarrow{\prod}_{a=1, \dots, N} \left(\partial_u + \ln' \frac{T_a(u) y_{a-1}(u)}{y_a(u)} \right), \quad (3.40)$$

переписанным в наших обозначениях, где мы положили $y_0(u) = y_N(u) = 1$ (см. работу [20], раздел 5.2).

Используя аналогичные обозначения, в случае типа B положим

$$T_a^B(u) = \prod_{k=1}^{\ell} (u - z_k)^{\Lambda_k^a}, \quad y_a^B(u) = \prod_{p=1}^{\xi^a} (u - t_p^a), \quad a = 1, \dots, n. \quad (3.41)$$

Тогда коэффициент перед z^{2n} в собственном значении (см. следствие 3.3) совпадает с (3.40), если взять $N = 2n$ и положить

$$y_a(u) = y_{2n-a}(u) = y_a^B(u), \quad T_a(u) = T_{2n-a+1}(u)^{-1} = T_a^B(u), \quad a = 1, \dots, n$$

(ср. с работой [20], раздел 7.1).

В случае типа C , вводя $T_a^C(u)$ и $y_a^C(u)$ для $a = 1, \dots, n$ по формулам (3.41), найдем, что при $m = 2n + 1$ собственное значение оператора в теореме 3.4 дается выражением (3.40) с $N = 2n + 1$, где мы положили

$$y_a(u) = y_{2n-a+1}(u) = \begin{cases} y_a^C(u) & \text{при } a = 1, \dots, n-1, \\ y_a^C(u)^2 & \text{при } a = n; \end{cases}$$

$$T_a(u) = T_{2n-a+2}(u)^{-1} = \begin{cases} T_a^C(u) & \text{при } a = 1, \dots, n, \\ 1 & \text{при } a = n+1 \end{cases}$$

(ср. с работой [20], раздел 7.2).

4. ОТ Q -ХАРАКТЕРОВ К КЛАССИЧЕСКИМ $\mathcal{W}$ -АЛГЕБРАМ

Образы Хариш-Чандры элементов Сигала–Сугавары (3.26) и (3.37) в алгебрах Ли типов B , C и D были найдены в работе [11] путем взятия классического предела некоторых характеров янгiana (или q -характеров). Целью данного раздела является доказательство общих результатов по установлению связи между кольцами q -характеров и соответствующими классическими $\mathcal{W}$ -алгебрами. Пользуясь основными определениями и свойствами q -характеров, мы полагаемся на оригинальную работу [21]; см. также работу [22]. Но при этом мы используем эквивалентную аддитивную версию кольца характеров, как в работе [23] с соответствующей заменой обозначений (см. ниже замечания 4.1 и 4.2). Хотя эту версию можно ввести независимо с помощью теории представлений янгiana, мы не прибегаем к прямому использованию янгiana, которые появляются только в обозначении $\text{Rep } Y(\mathfrak{g})$ кольца характеров (ср. с работой [11]).

Скриннинговые операторы для классических $\mathcal{W}$ -алгебр строятся как пределы при $\kappa \rightarrow -\hbar^\vee$ некоторых сплетающих операторов, действующих между $\hat{\mathfrak{g}}_\kappa$ -модулями на уровне κ (см. книгу [6], раздел 7). Их также можно получить, применяя аналогии теоремы Шевалле, к $\mathcal{W}$ -алгебрам, определенным в контексте классических гамильтоновых редукций (см., например, работу [24]). В статье [21] была выдвинута гипотеза, доказанная в [22], что кольцо характеров можно ввести как пересечение ядер скриннинговых операторов. При выводе скриннинговых операторов, характеризующих элементы $\mathcal{W}$ -алгебры, мы применяем процедуру перехода к классическому пределу (ср. с работой [21], раздел 8). В доказательстве сюръективности процедуры важную роль играет основной результат работы [11].

4.1. Тип А. Введем алгебру полиномов по переменным $\lambda_i(a)$,

$$\mathcal{L} = \mathbb{C}[\lambda_i(a) \mid i = 1, \dots, N, a \in \mathbb{C}].$$

Для каждого $i \in \{1, \dots, N-1\}$ рассмотрим свободный левый $\mathcal{L}$ -модуль $\tilde{\mathcal{L}}_i$ с образующими $\sigma_i(a)$, где a пробегает поле $\mathbb{C}$, и обозначим как $\mathcal{L}_i$ его фактор по модулю соотношений

$$\lambda_i(a) \sigma_i(a) = \lambda_{i+1}(a) \sigma_i(a+1), \quad a \in \mathbb{C}. \quad (4.1)$$

Определим линейный оператор $\tilde{S}_i: \mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_i$ с помощью формулы

$$\tilde{S}_i: \lambda_j(a) \mapsto \begin{cases} \lambda_i(a) \sigma_i(a) & \text{при } j = i, \\ -\lambda_{i+1}(a) \sigma_i(a+1) & \text{при } j = i+1, \\ 0 & \text{при } j \neq i, i+1 \end{cases} \quad (4.2)$$

и правила Лейбница

$$\tilde{S}_i(AB) = B\tilde{S}_i(A) + A\tilde{S}_i(B). \quad (4.3)$$

Тогда i -й скриннинговый оператор $S_i: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_i$ определяется как композиция оператора $\tilde{S}_i$ и проекции $\tilde{\mathcal{L}}_i \rightarrow \mathcal{L}_i$.

Согласно работе [22] (см. теорему 5.1) можно определить подалгебру $\text{Rep } Y(\mathfrak{gl}_N)$ характеров янгiana в $\mathcal{L}$ как пересечение ядер скриннинговых операторов:

$$\text{Rep } Y(\mathfrak{gl}_N) = \bigcap_{i=1}^{N-1} \ker S_i.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Наши переменные $\lambda_i(a)$ и $\sigma_i(a)$ отождествляются соответственно с переменными $\Lambda_{i,q^{2a}}$ и $S_{i,q^{2a+i-1}}$ из работы [21] (ср. с работой [23]).

Напомним определение классической $\mathcal{W}$ -алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$ в терминах скрининговых операторов, данное в [6] (раздел 8.1); см. также работы [11] и [24]. Используя обозначения из п. 3.1, будем считать $U(\hat{\mathfrak{h}}_-)$ алгеброй полиномов по переменным $E_{ii}[r]$, $i = 1, \dots, N$ и $r < 0$. Скрининговые операторы

$$V_i: U(\hat{\mathfrak{h}}_-) \rightarrow U(\hat{\mathfrak{h}}_-), \quad i = 1, \dots, N-1,$$

определяются как

$$V_i = \sum_{r=0}^{\infty} V_{i[r]} \left(\frac{\partial}{\partial E_{ii}[-r-1]} - \frac{\partial}{\partial E_{i+1,i+1}[-r-1]} \right),$$

где коэффициенты $V_{i[r]}$ находятся из разложения формальной производящей функции по переменной z :

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_{i[r]} z^r = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_{ii}[-m] - E_{i+1,i+1}[-m]}{m} z^m.$$

Классическая $\mathcal{W}$ -алгебра $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$ — это подалгебра в $U(\hat{\mathfrak{h}}_-)$, которая определяется как пересечение ядер скрининговых операторов:

$$\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N) = \bigcap_{i=1}^{N-1} \ker V_i.$$

Построим теперь отображение $\mathbf{gr}: \text{Rep } Y(\mathfrak{gl}_N) \rightarrow \mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$ и опишем его свойства. Во-первых, погрузим $\mathcal{L}$ в алгебру формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[\lambda_i^{(r)}]]$ по переменным $\lambda_i^{(r)}$, $i = 1, \dots, N$ и $r = 0, 1, \dots$, положив

$$\lambda_i(a) \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^{(r)}}{r!} a^r. \quad (4.4)$$

Отождествим формальные степенные ряды по $\lambda_i^{(r)}$ с рядами по новым переменным $\mu_i^{(r)}$, заданным формулами

$$\lambda_i^{(0)} = 1 + \mu_i^{(0)}, \quad \lambda_i^{(r)} = \mu_i^{(r)} \quad \text{при } r \geq 1. \quad (4.5)$$

Определим степень новых переменных $\deg \mu_i^{(r)} = -r - 1$. Для заданного $A \in \mathcal{L}$ рассмотрим соответствующий элемент из $\mathbb{C}[[\mu_i^{(r)}]]$ и возьмем его однородную составляющую $\bar{A}$ максимальной степени. Эта составляющая представляет собой полином по переменным $\mu_i^{(r)}$, таким образом, получаем отображение

$$\mathbf{gr}: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}[[\mu_i^{(r)}]], \quad A \mapsto \bar{A}. \quad (4.6)$$

Отметим свойство, которое сразу же следует из определения:

$$\mathbf{gr}(AB) = \mathbf{gr}(A)\mathbf{gr}(B). \quad (4.7)$$

В следующем предложении алгебра $U(\hat{\mathfrak{h}}_-)$ отождествляется с алгеброй полиномов $\mathbb{C}[\mu_i^{(r)}]$ с помощью изоморфизма $E_{ii}[-r-1] \mapsto \mu_i^{(r)}/r!$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Образ сужения отображения (4.6) на алгебру характеров $\text{Rep } Y(\mathfrak{gl}_N)$ содержится в $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$ и, таким образом, задает отображение

$$\mathbf{gr}: \text{Rep } Y(\mathfrak{gl}_N) \rightarrow \mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N).$$

Кроме того, любой однородный элемент алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$ содержится в образе отображения $\mathbf{gr}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично (4.4) введем переменные $\sigma_i^{(r)}$ с помощью разложения

$$\sigma_i(a) \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sigma_i^{(r)}}{r!} a^r \quad (4.8)$$

и положим $\deg \sigma_i^{(r)} = -r - 1$. Считая в формулах (4.1) и (4.2) a формальной переменной, выразим скриннинговый оператор через переменные $\mu_i^{(r)}$. Запишем явные формулы для операторов: при $i = 1, \dots, N - 1$

$$S_i^0: \mathbb{C}[[\mu_j^{(r)}]] \rightarrow \mathbb{C}[[\mu_j^{(r)}, \sigma_i^{(r)}]]/\sim, \quad (4.9)$$

их образы лежат в факторе алгебры $\mathbb{C}[[\mu_j^{(r)}, \sigma_i^{(r)}]]$ по соотношениям (4.1), представленным в терминах $\mu_i^{(r)}$, причем в этих соотношениях a считается переменной. Положим

$$S_i^0: \mu_j^{(0)} \mapsto \begin{cases} (1 + \mu_i^{(0)}) \sigma_i^{(0)} & \text{при } j = i, \\ -(1 + \mu_{i+1}^{(0)}) \sum_{k \geq 0} \frac{\sigma_i^{(k)}}{k!} & \text{при } j = i + 1, \\ 0 & \text{при } j \neq i, i + 1 \end{cases}$$

и

$$S_i^0: \mu_j^{(r)} \mapsto \partial^r (S_i^0(\mu_j^{(0)})), \quad r \geq 1,$$

где производная ∂ действует на переменные по правилу

$$\partial: \mu_j^{(r)} \mapsto \mu_j^{(r+1)}, \quad \sigma_j^{(r)} \mapsto \sigma_j^{(r+1)}, \quad r \geq 0.$$

После этого действие оператора S_i^0 продолжается на всю алгебру $\mathbb{C}[[\mu_j^{(r)}]]$ по правилу Лейбница (4.3).

Предположим теперь, что $A \in \text{Rep } Y(\mathfrak{gl}_N)$, так что $S_i A = 0$ для $i = 1, \dots, N - 1$. Обозначим через A^0 соответствующий элемент алгебры $\mathbb{C}[[\mu_j^{(r)}]]$. По определению операторов S_i^0 их сужение на подалгебру $\mathcal{L}$ совпадает с действием соответствующих операторов S_i . Поэтому $S_i^0 A^0 = 0$. Взяв из A^0 компоненту $\bar{A}$ с наивысшей степенью, можно написать

$$S_i^0 A^0 = \bar{S}_i \bar{A} + \text{члены низших степеней},$$

где оператор $\bar{S}_i$ задан следующим образом:

$$\bar{S}_i: \mu_j^{(r)} \mapsto \begin{cases} \sigma_i^{(r)} & \text{при } j = i, \\ -\sigma_i^{(r)} & \text{при } j = i + 1, \\ 0 & \text{при } j \neq i, i + 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

С другой стороны, из соотношения (4.1) следует, что

$$\mu_i(a) \sigma_i(a) = (1 + \mu_{i+1}(a)) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_i^{(k)}(a)}{k!} - \sigma_i(a), \quad (4.11)$$

где $\sigma_i^{(k)}(a)$ вводится как k -я производная по a от (4.8) и

$$\mu_j(a) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu_j^{(r)}}{r!} a^r.$$

Считая a переменной и собирая коэффициенты перед одинаковыми степенями a , получим из (4.11) ряд соотношений. Компоненты старшей степени в этих соотношениях являются однородными, их можно выразить через производящие функции и представить в виде

$$\sigma'_i(z) = (\mu_i(z) - \mu_{i+1}(z)) \sigma_i(z),$$

поэтому для образов при действии операторов $\bar{S}_i$ имеем

$$\bar{S}_i: \mu_i(z) \mapsto \exp \int (\mu_i(z) - \mu_{i+1}(z)) dz, \quad \mu_{i+1}(z) \mapsto -\exp \int (\mu_i(z) - \mu_{i+1}(z)) dz$$

и $\bar{S}_i: \mu_j(z) \mapsto 0$ при $j \neq i, i+1$. Однако это совпадает с действием оператора V_i на ряд

$$\mu_k(z) = \sum_{r=0}^{\infty} E_{kk}[-r-1] z^r, \quad k = 1, \dots, N.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что если элемент $A \in \mathcal{L}$ обращается в ноль под действием всех операторов S_i , то его образ $\bar{A}$ при отображении (4.6) обращается в ноль под действием операторов V_i , что завершает доказательство первой части предложения.

Вторая часть следует из работы [11], где образующие алгебры $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$ были получены как образы некоторых элементов подалгебры $\mathcal{L}$ при отображении $\mathbf{gr}$.

4.2. Типы B , C и D . Обозначим через $\mathfrak{g}$ ортогональную алгебру Ли $\mathfrak{o}_N$ (при $N = 2n$ или $N = 2n+1$) или симплектическую алгебру Ли $\mathfrak{sp}_N$ (при $N = 2n$). В ортогональном случае введем параметр $\kappa = N/2 - 1$, а в симплектическом положим $\kappa = N/2 + 1$. Пусть, как и раньше, $i' = N - i + 1$.

Рассмотрим алгебру полиномов по переменным $\lambda_i(a)$, $i = 1, \dots, N$, где $a \in \mathbb{C}$, и обозначим через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ ее фактор по соотношениям

$$\lambda_i(a + \kappa - i) \lambda_{i'}(a) = \lambda_{i+1}(a + \kappa - i) \lambda_{(i+1)'}(a), \quad a \in \mathbb{C}, \quad (4.12)$$

где $i = 0, 1, \dots, n-1$, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$ или $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$, и $i = 0, 1, \dots, n$, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n+1}$; при этом $\lambda_0(a) = \lambda_{0'}(a) = 1$.

Рассмотрим свободный левый $\mathcal{L}$ -модуль $\tilde{\mathcal{L}}_i$ с образующими $\sigma_i(a)$, где $i = 1, \dots, n$ и a принимает значения в $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathcal{L}_i$ его фактор по соотношениям

$$\lambda_i(a) \sigma_i(a) = \lambda_{i+1}(a) \sigma_i(a+1), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad a \in \mathbb{C}, \quad (4.13)$$

вместе с соотношениями

$$\begin{aligned}\lambda_n(a) \sigma_n(a) &= \lambda_{n+1}(a) \sigma_n\left(a + \frac{1}{2}\right) && \text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n+1}, \\ \lambda_n(a) \sigma_n(a) &= \lambda_{n+1}(a) \sigma_n(a + 2) && \text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}, \\ \lambda_{n-1}(a) \sigma_n(a) &= \lambda_{n+1}(a) \sigma_n(a + 1) && \text{для } \mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ зададим линейный оператор $\tilde{S}_i: \mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_i$, удовлетворяющий правилу Лейбница (4.3). Для $i = 1, \dots, n-1$ положим

$$\tilde{S}_i: \lambda_j(a) \mapsto \begin{cases} \lambda_i(a) \sigma_i(a) & \text{для } j = i, \\ -\lambda_{i+1}(a) \sigma_i(a + 1) & \text{для } j = i + 1, \\ -\lambda_{i'}(a) \sigma_i(a + \kappa - i + 1) & \text{для } j = i', \\ \lambda_{(i+1)'}(a) \sigma_i(a + \kappa - i) & \text{для } j = (i + 1)', \\ 0 & \text{для } j \neq i, i', i + 1, (i + 1)'. \end{cases} \quad (4.15)$$

Действие оператора $\tilde{S}_n$ зависит от типа алгебры Ли и задается следующим образом.

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n+1}$ имеем $\tilde{S}_n: \lambda_j(a) \mapsto 0$, если $j < n$ или $j > n'$, и

$$\begin{aligned}\lambda_n(a) &\mapsto \lambda_n(a) \left(\sigma_n(a) + \sigma_n\left(a - \frac{1}{2}\right) \right), \\ \lambda_{n+1}(a) &\mapsto \lambda_{n+1}(a) \left(\sigma_n\left(a - \frac{1}{2}\right) - \sigma_n\left(a + \frac{1}{2}\right) \right), \\ \lambda_{n'}(a) &\mapsto -\lambda_{n'}(a) \left(\sigma_n(a) + \sigma_n\left(a + \frac{1}{2}\right) \right).\end{aligned}$$

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ имеем $\tilde{S}_n: \lambda_j(a) \mapsto 0$, если $j < n$ или $j > n'$, и

$$\begin{aligned}\lambda_n(a) &\mapsto \lambda_n(a) \sigma_n(a), \\ \lambda_{n'}(a) &\mapsto -\lambda_{n'}(a) \sigma_n(a + 2).\end{aligned}$$

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$ имеем $\tilde{S}_n: \lambda_j(a) \mapsto 0$, если $j < n-1$ или $j > (n-1)'$, и

$$\begin{aligned}\lambda_{n-1}(a) &\mapsto \lambda_{n-1}(a) \sigma_n(a), \\ \lambda_n(a) &\mapsto \lambda_n(a) \sigma_n(a), \\ \lambda_{n'}(a) &\mapsto -\lambda_{n'}(a) \sigma_n(a + 1), \\ \lambda_{(n-1)'}(a) &\mapsto -\lambda_{(n-1)'}(a) \sigma_n(a + 1).\end{aligned}$$

Соотношения (4.12), как легко видеть, сохраняются при действии операторов $\tilde{S}_i$, поэтому операторы корректно определены на $\mathcal{L}$. Теперь i -й *скрининговый оператор* $S_i: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_i$ определяется как композиция оператора $\tilde{S}_i$ и проекции $\tilde{\mathcal{L}}_i \rightarrow \mathcal{L}_i$.

Используя теорему 5.1 из работы [22], можно задать подалгебру $\text{Rep } Y(\mathfrak{g})$ характеров янгиана в $\mathcal{L}$ как пересечение ядер скрининговых операторов:

$$\text{Rep } Y(\mathfrak{g}) = \bigcap_{i=1}^n \ker S_i.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Переменные $\lambda_i(a)$ и $\sigma_i(a)$ связаны с соответствующими элементами, использованными в работе [21], следующим образом: $\lambda_i(a) = \Lambda_{i,q^{4a}}$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n+1}$ и $\lambda_i(a) = \Lambda_{i,q^{2a}}$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$. Кроме того, для $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n+1}$

$$\sigma_i(a) = S_{i,q^{4a+2i-2}}, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad \sigma_n(a) = S_{n,q^{4a+2n-1}},$$

а для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$

$$\sigma_i(a) = S_{i,q^{2a+i-1}}, \quad i = 1, \dots, n;$$

последнее соотношение при $i = 1, \dots, n-1$ верно также и для $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$, но в этом случае $\sigma_n(a) = S_{n,q^{2a+n-2}}$ (ср. с работой [23]). Заметим также, что соотношения (4.12) были получены в работе [25] (см. предложения 5.2 и 5.14) как условия того, что представления старшего веса янгиана $Y(\mathfrak{g})$ нетривиальны, тогда как (4.13) и (4.14) совместны с условиями конечномерности представления (ср. с теоремой 5.16 из работы [25]).

Введем классическую $\mathcal{W}$ -алгебру $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$, снова следуя книге [6] (раздел 8.1); см. также работы [11] и [24]. Будем считать $U(\hat{\mathfrak{h}}_-)$ алгеброй полиномов по переменным $F_{ii}[r]$, где $i = 1, \dots, n$ и $r < 0$. Скриннинговые операторы

$$V_i: U(\hat{\mathfrak{h}}_-) \rightarrow U(\hat{\mathfrak{h}}_-), \quad i = 1, \dots, n,$$

определим следующим образом. При $i = 1, \dots, n-1$ положим

$$V_i = \sum_{r=0}^{\infty} V_{i[r]} \left(\frac{\partial}{\partial F_{ii}[-r-1]} - \frac{\partial}{\partial F_{i+1i+1}[-r-1]} \right),$$

где коэффициенты $V_{i[r]}$ находятся из разложения формальных производящих функций по переменной z ,

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_{i[r]} z^r = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{ii}[-m] - F_{i+1i+1}[-m]}{m} z^m.$$

Для действия оператора V_n справедливы следующие формулы.

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n+1}$

$$V_n = \sum_{r=0}^{\infty} V_{n[r]} \frac{\partial}{\partial F_n[-r-1]},$$

где

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_{n[r]} z^r = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_n[-m]}{m} z^m.$$

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$

$$V_n = \sum_{r=0}^{\infty} V_{n[r]} \frac{\partial}{\partial F_n[-r-1]},$$

где

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_{n[r]} z^r = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2F_n[-m]}{m} z^m.$$

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$

$$V_n = \sum_{r=0}^{\infty} V_{n[r]} \left(\frac{\partial}{\partial F_{n-1}[-r-1]} + \frac{\partial}{\partial F_n[-r-1]} \right),$$

где

$$\sum_{r=0}^{\infty} V_{n[r]} z^r = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{n-1}[-m] + F_n[-m]}{m} z^m.$$

Классическая $\mathcal{W}$ -алгебра $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ является подалгеброй в $U(\hat{\mathfrak{h}}_-)$, которая задается пересечением ядер скрининговых операторов:

$$\mathcal{W}(\mathfrak{g}) = \bigcap_{i=1}^n \ker V_i.$$

Теперь построим отображение $\mathbf{gr}: \text{Rep } Y(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{W}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ и опишем его свойства. Прежде всего погрузим $\mathcal{L}$ в алгебру формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[\lambda_i^{(r)}]]$ по переменным $\lambda_i^{(r)}$, где $i = 1, \dots, N$ и $r = 0, 1, \dots$, используя правило (4.4) и взяв фактор по соотношениям (4.12). Введем новые переменные $\mu_i^{(r)}$, $i = 1, \dots, n$, по формуле (4.5) и определим их степени $\deg \mu_i^{(r)} = -r-1$. Для заданного элемента $A \in \mathcal{L}$ рассмотрим соответствующий элемент из $\mathbb{C}[[\mu_i^{(r)}]]$ и возьмем его однородную составляющую $\bar{A}$ максимальной степени. Эта составляющая является полиномом от переменных $\mu_i^{(r)}$, таким образом, возникает отображение

$$\mathbf{gr}: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}[\mu_i^{(r)}], \quad A \mapsto \bar{A}. \quad (4.16)$$

Отметим его свойства (4.7). Отождествим $U(\hat{\mathfrak{h}}_-)$ с алгеброй полиномов $\mathbb{C}[\mu_i^{(r)}]$ с помощью изоморфизма $F_{ii}[-r-1] \mapsto \mu_i^{(r)}/r!$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Образ сужения отображения (4.16) на подалгебру характеров $\text{Rep } Y(\mathfrak{g})$ содержится в $\mathcal{W}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$, и, следовательно, определено отображение*

$$\mathbf{gr}: \text{Rep } Y(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{W}(\mathbf{L}\mathfrak{g}).$$

Кроме того, любой однородный элемент из $\mathcal{W}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ содержится в образе отображения $\mathbf{gr}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вполне аналогично доказательству предложения 4.1, поэтому мы только укажем на необходимые изменения. Введем переменные $\sigma_i^{(r)}$ по формулам (4.8) и положим $\deg \sigma_i^{(r)} = -r-1$. Зададим операторы S_i^0 , $i = 1, \dots, n$, как и в (4.9), где факторизация берется по соотношениям (4.13) и (4.14), записанным в терминах $\mu_i^{(r)}$, где a считается переменной. Поскольку соотношения (4.13) идентичны соотношениям (4.1), рассуждения для операторов S_i^0 , $i = 1, \dots, n-1$, можно провести в той же последовательности, что и для типа A . Чтобы закончить доказательство для оператора S_n^0 , рассмотрим три случая отдельно.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n+1}$. Как и в (4.10), оператор $\bar{S}_n$ задается выражением

$$\bar{S}_n: \mu_j^{(r)} \mapsto \begin{cases} 2\sigma_n^{(r)} & \text{при } j = n, \\ 0 & \text{при } j \neq n. \end{cases} \quad (4.17)$$

Отметим формулу

$$\lambda_{n+1}(a) = \frac{\lambda_1(a+n-1)\lambda_2(a+n-2)\dots\lambda_n(a)}{\lambda_1(a+n-1/2)\lambda_2(a+n-3/2)\dots\lambda_n(a+1/2)},$$

которую можно легко вывести из (4.12). Теперь, чтобы получить аналог уравнения (4.11), используем (4.14) и запишем $\lambda_i(a) = 1 + \mu_i(a)$, $i = 1, \dots, n$. В результате получим следующее уравнение:

$$\sigma'_n(z) = 2\mu_n(z)\sigma_n(z).$$

Поэтому для образов при действии операторов $\bar{S}_n$ имеем

$$\bar{S}_n: \mu_n(z) \mapsto 2 \exp \int 2\mu_n(z) dz,$$

и $\bar{S}_n: \mu_j(z) \mapsto 0$ при $j \neq n$. Это совпадает с действием оператора $2V_n$, связанного с алгеброй Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$, на ряд

$$\mu_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} F_{nn}[-r-1]z^r.$$

Следовательно, если элемент $A \in \mathcal{L}$ обращается в ноль под действием всех операторов S_i , то его образ $\bar{A}$ при преобразовании (4.6) обращается в ноль под действием всех операторов V_i , связанных с алгеброй Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$, которая является двойственной по Ленглендсу алгебре Ли $\mathfrak{o}_{2n+1}$.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$. Аналогично формуле (4.17) имеем

$$\bar{S}_n: \mu_j^{(r)} \mapsto \begin{cases} \sigma_n^{(r)} & \text{для } j = n, \\ 0 & \text{при } j \neq n. \end{cases} \quad (4.18)$$

Теперь из соотношений (4.12) следует

$$\lambda_{n+1}(a) = \frac{\lambda_1(a+n)\lambda_2(a+n-1)\dots\lambda_{n-1}(a+2)}{\lambda_1(a+n+1)\lambda_2(a+n)\dots\lambda_n(a+2)}.$$

Положим $\lambda_i(a) = 1 + \mu_i(a)$ для $i = 1, \dots, n$ и используем соотношения (4.14) для вывода уравнения

$$\sigma'_n(z) = \mu_n(z)\sigma_n(z).$$

Следовательно, для образов при действии $\bar{S}_n$ имеем

$$\bar{S}_n: \mu_n(z) \mapsto \exp \int \mu_n(z) dz,$$

и $\bar{S}_n: \mu_j(z) \mapsto 0$ для $j \neq n$. Это совпадает с действием оператора V_n , связанного с алгеброй Ли $\mathfrak{o}_{2n+1}$, на ряд

$$\mu_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} F_{nn}[-r-1]z^r.$$

Поэтому если элемент $A \in \mathcal{L}$ обращается в ноль под действием всех операторов S_i , то его образ $\bar{A}$ при преобразовании (4.6) обращается в ноль под действием всех операторов V_i , связанных с алгеброй Ли $\mathfrak{o}_{2n+1}$, которая является двойственной по Ленглендсу алгебре Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{2n}$. Аналогично формуле (4.10) имеем

$$\bar{S}_n: \mu_j^{(r)} \mapsto \begin{cases} \sigma_n^{(r)} & \text{для } j = n-1, n, \\ 0 & \text{для } j \neq n-1, n. \end{cases} \quad (4.19)$$

Из соотношений (4.12) получаем, что

$$\lambda_{n+1}(a) = \frac{\lambda_1(a+n-2)\lambda_2(a+n-3)\dots\lambda_{n-1}(a)}{\lambda_1(a+n-1)\lambda_2(a+n-2)\dots\lambda_n(a)}.$$

Напишем $\lambda_i(a) = 1 + \mu_i(a)$ для $i = 1, \dots, n$ и используем (4.14) для вывода уравнения

$$\sigma'_n(z) = (\mu_{n-1}(z) + \mu_n(z)) \sigma_n(z).$$

Следовательно, для образов при действии $\bar{S}_n$ имеем

$$\bar{S}_n: \mu_{n-1}(z) \mapsto \exp \int (\mu_{n-1}(z) + \mu_n(z)) dz, \quad \mu_n(z) \mapsto \exp \int (\mu_{n-1}(z) + \mu_n(z)) dz,$$

и $\bar{S}_n: \mu_j(z) \mapsto 0$ для $j \neq n-1, n$. Это совпадает с действием оператора V_n , связанного с алгеброй Ли $\mathfrak{o}_{2n}$, на ряд

$$\mu_i(z) = \sum_{r=0}^{\infty} F_{ii}[-r-1]z^r, \quad i = n-1, n.$$

Таким образом, если элемент $A \in \mathcal{L}$ обращается в ноль под действием всех операторов S_i , то его образ $\bar{A}$ при отображении (4.6) обращается в ноль под действием всех операторов V_i , связанных с алгеброй Ли $\mathfrak{o}_{2n}$, которая является самодуальной по Ленглендсу.

Последняя часть предложения следует из результатов работы [11], где образующие классической $\mathcal{W}$ -алгебры получены как образы характеров янгиана при отображении $\mathbf{gr}$.

Список литературы

- [1] B. Feigin, E. Frenkel, N. Reshetikhin, “Gaudin model, Bethe ansatz and critical level”, *Commun. Math. Phys.*, **166**:1 (1994), 27–62.
- [2] B. Feigin, E. Frenkel, L. Rybnikov, “Opers with irregular singularity and spectra of the shift of argument subalgebra”, *Duke Math. J.*, **155**:2 (2010), 337–363.
- [3] B. Feigin, E. Frenkel, V. Toledano Laredo, “Gaudin models with irregular singularities”, *Adv. Math.*, **223**:3 (2010), 873–948.
- [4] Л. Г. Рыбников, “Метод сдвига инвариантов и модель Годена”, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:3 (2006), 30–43.
- [5] B. Feigin, E. Frenkel, “Affine Kac–Moody algebras at the critical level and Gelfand–Dikii algebras”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **7**, suppl. 1A (1992), 197–215.

- [6] E. Frenkel, *Langlands correspondence for loop groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **103**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [7] A. Chervov, D. Talalaev, *Quantum spectral curves, quantum integrable systems and the geometric Langlands correspondence*, arXiv: hep-th/0604128.
- [8] A. I. Molev, “Feigin–Frenkel center in types B , C and D ”, *Invent. Math.*, **191**:1 (2013), 1–34.
- [9] A. V. Chervov, A. I. Molev, “On higher-order Sugawara operators”, *Int. Math. Res. Notices*, **2009**:9 (2009), 1612–1635.
- [10] A. I. Molev, E. Ragoucy, “The MacMahon master theorem for right quantum superalgebras and higher sugawara operators for $\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n}$ ”, *Mosc. Math. J.*, **14**:1 (2014), 83–119.
- [11] A. I. Molev, E. E. Mukhin, “Yangian characters and classical $\mathcal{W}$ -algebras”, *Conformal Field Theory, Automorphic Forms and Related Topics* (Heidelberg, Germany, September 19–23, 2011), Contributions in Mathematical and Computational Sciences, **8**, eds. W. Kohnen, R. Weissauer, Springer, Berlin, 2014, 287–334.
- [12] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, “Bethe eigenvectors of higher transfer matrices”, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, **2006**:8 (2006), P08002, 44 pp.
- [13] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [14] V. V. Schechtman, A. N. Varchenko, “Arrangements of hyperplanes and Lie algebra homology”, *Invent. Math.*, **106**:1 (1991), 139–194.
- [15] H. M. Babujian, R. Flume, “Off-shell Bethe ansatz equation for Gaudin magnets and solutions of Knizhnik–Zamolodchikov equations”, *Modern Phys. Lett. A*, **9**:22 (1994), 2029–2039.
- [16] E. Mukhin, A. Varchenko, “Norm of a Bethe vector and the Hessian of the master function”, *Compos. Math.*, **141**:4 (2005), 1012–1028.
- [17] S. Garoufalidis, T. T. Q. Lê, D. Zeilberger, “The quantum MacMahon master theorem”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **103**:38 (2006), 13928–13931.
- [18] A. Chervov, G. Falqui, V. Rubtsov, “Algebraic properties of Manin matrices 1”, *Adv. Appl. Math.*, **43**:3 (2009), 239–315.
- [19] N. Rozhkovskaya, “A new formula for the Pfaffian-type Segal–Sugawara vector”, *J. Lie Theory*, **24**:2 (2014), 529–543.
- [20] E. Mukhin, A. Varchenko, “Critical points of master functions and flag varieties”, *Commun. Contemp. Math.*, **6**:1 (2004), 111–163.
- [21] E. Frenkel, N. Reshetikhin, “The q -characters of representations of quantum affine algebras and deformations of $\mathcal{W}$ -algebras”, *Recent Developments in Quantum Affine Algebras and Related Topics* (North Carolina State University, Raleigh, NC, USA, May 21–24, 1998), Contemporary Mathematics, **248**, eds. N. Jing, K. C. Misra, 1999, 163–205.
- [22] E. Frenkel, E. Mukhin, “Combinatorics of q -characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras”, *Commun. Math. Phys.*, **216**:1 (2001), 23–57.
- [23] W. Nakai, T. Nakanishi, “Paths, tableaux and q -characters of quantum affine algebras: the C_n case”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:9 (2006), 2083–2115.
- [24] A. I. Molev, E. Ragoucy, “Classical $\mathcal{W}$ -algebras in types A , B , C , D and G ”, *Commun. Math. Phys.*, **336**:2 (2015), 1053–1084.
- [25] D. Arnaudon, A. Molev, E. Ragoucy, “On the R -matrix realization of Yangians and their representations”, *Ann. H. Poincaré*, **7**:7–8 (2006), 1269–1325.