Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Македонский, Е. Б. Фейгин, Обобщенные модули Вейля для скрученных алгебр токов, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 2, 284–306

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 06:48:40

© 2017 г.

Е. А. Македонский^{*†}, Е. Б. Фейгин^{*‡}

ОБОБЩЕННЫЕ МОДУЛИ ВЕЙЛЯ ДЛЯ СКРУЧЕННЫХ АЛГЕБР ТОКОВ

Вводится понятие обобщенного модуля Вейля для скрученных алгебр токов. Изучаются теоретико-представленческие и комбинаторные свойства этих модулей, а также их связь с несимметрическими полиномами Макдональда. В качестве приложения вычисляется размерность классических модулей Вейля в случае, до сих пор остававшемся неизвестным.

Ключевые слова: модули Вейля, аффинные алгебры.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9305>

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathfrak{g}^{\text{af}}$ – аффинная алгебра Ли. Она естественным образом градуирована группой $\mathbb{Z}$:

$$\mathfrak{g}^{\text{af}} = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{g}(k);$$

в частности, $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$, где $\mathfrak{g}_0$ – конечномерная простая алгебра Ли, K – центральный элемент, d – элемент степени.

Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{g}_{\geq 0}^{\text{af}} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathfrak{g}(k)\right)$ (подалгебра $\mathfrak{g}_{\geq 0}^{\text{af}}$ совпадает с максимальной параболической по модулю K и d). Если $\mathfrak{g}^{\text{af}}$ – нескрученная алгебра, то $\mathfrak{g}_{\geq 0}^{\text{af}}$ является алгеброй Ли полиномиальных токов: $\mathfrak{g}_{\geq 0}^{\text{af}} \simeq \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[t]$. Если $\mathfrak{g}^{\text{af}}$ – скрученная алгебра, то $\mathfrak{g}_{\geq 0}^{\text{af}}$ называется скрученной алгеброй токов.

Пусть Δ – система корней алгебры $\mathfrak{g}_0$, Δ_+ (Δ_-) – множество положительных (отрицательных) корней и δ – базисный мнимый корень. Зафиксируем разложение

Исследование финансировалось в рамках Проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ среди ведущих мировых научно-образовательных центров (5–100). Работа над разделами 1, 2 и 3 была поддержана RSF–DFG (грант 16-41-01013).

^{*}Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия. E-mail: evgfeig@gmail.com, makedonskii_e@mail.ru

[†]Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany

[‡]Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия

Картана $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, где $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана, $\mathfrak{n}_+$ ($\mathfrak{n}_-$) – линейная оболочка положительных (отрицательных) корневых векторов. Тогда все действительные корни алгебры $\mathfrak{g}^{\text{af}}$ имеют вид $l\alpha + k\delta$, где $\alpha \in \Delta$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \{1, 2\}$ (отметим, что $l = 1$, кроме случая, когда $\mathfrak{g}^{\text{af}}$ имеет тип $A_{2n}^{(2)}$).

Зафиксируем вектор e_α из каждого действительного α -корневого пространства. Обозначим через $\mathfrak{h}_{k\delta} \subset \mathfrak{g}^{\text{af}}$ мнимое корневое пространство, соответствующее корню $k\delta$. Классические модули Вейля занумерованы корневыми весами λ алгебры $\mathfrak{g}_0$ (см. работы [1]–[3]). Модуль $W(\lambda)$ определяется как циклический $\mathfrak{g}_{\geq 0}^{\text{af}}$ -модуль с образующим вектором v и следующим набором соотношений:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{k\delta} v &= 0, & k \geq 1, & & hv &= \lambda(h)v \quad \text{для любого } h \in \mathfrak{h}; \\ e_{\alpha+k\delta} v &= 0, & k \geq 0, & & e_{-\alpha}^{(\alpha^\vee, \lambda)+1} v &= 0 \quad \text{для любого } \alpha \in \Delta_+. \end{aligned}$$

Эти модули над нескрученными аффинными алгебрами Ли изучались во многих работах (см., например, [4]–[7]). Для алгебр с простыми связями модули Вейля изоморфны модулям Демазюра уровня 1. Модули Вейля для скрученных алгебр были введены в работе [2].

В статьях [8]–[10] было доказано, что характеры модулей Вейля для алгебр с простыми связями совпадают со специализациями несимметрических полиномов Макдональда в точке $t = 0$ [11], [12]. Мы вводим следующее обобщение модулей Вейля. Обобщенные модули Вейля – это модули над алгеброй $\mathfrak{n}^{\text{af}}$, натянутой на все корневые векторы e_β , соответствующие положительным корням β аффинной алгебры $\mathfrak{g}^{\text{af}}$.

Предположим, что $\mathfrak{g}$ – это алгебра двойственного нескрученного типа, Δ^s (Δ^ℓ) – множество коротких (длинных) корней из Δ . Положим $\text{len}(\alpha) = 1$ для $\alpha \in \Delta^s$ и $\text{len}(\alpha) = j$ для $\alpha \in \Delta^\ell$, где j – отношение квадратов длин длинных и коротких корней. Для элемента σ в группе Вейля W алгебры $\mathfrak{g}_0$ и для $\alpha \in \Delta_+$ определим действие элемента σ на множестве $\Delta_+ \cup (\Delta_-^s + \delta) \cup (\Delta_-^\ell + j\delta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\alpha) &= \begin{cases} \sigma(\alpha), & \text{если } \sigma(\alpha) \in \Delta_+, \\ \sigma(\alpha) + \text{len}(\alpha)\delta, & \text{если } \sigma(\alpha) \in \Delta_-; \end{cases} \\ \hat{\sigma}(-\alpha + \text{len}(\alpha)\delta) &= \begin{cases} \sigma(-\alpha) + \text{len}(\alpha)\delta, & \text{если } \sigma(-\alpha) \in \Delta_-, \\ \sigma(-\alpha), & \text{если } \sigma(-\alpha) \in \Delta_+. \end{cases} \end{aligned}$$

Для $\beta \in \Delta_+ \cup (\Delta_-^s + \delta) \cup (\Delta_-^\ell + j\delta)$ положим $\hat{\sigma}(e_\beta) = e_{\hat{\sigma}(\beta)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть алгебра $\mathfrak{g}^{\text{af}}$ имеет тип, отличный от $A_{2n}^{(2)}$. Для произвольного $\mathfrak{g}_0$ -веса μ положим $\mu = \sigma(\lambda)$, где $\sigma \in W$, λ – антидоминантный вес. Тогда (обобщенный) модуль Вейля W_μ – это циклический $\mathfrak{n}^{\text{af}}$ -модуль с образующим элементом v и следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{k\delta} v &= 0, & k \geq 1; \\ \hat{\sigma}(e_{-\alpha + \text{len}(\alpha)\delta}) v &= 0, & (\hat{\sigma}(e_\alpha))^{-(\alpha^\vee, \lambda)+1} v = 0, & \alpha \in \Delta_+. \end{aligned}$$

Мы также определяем обобщенные модули Вейля в случае $A_{2n}^{(2)}$ (см. ниже определение 3.2). В этом случае существуют два определения классических модулей

Вейля, соответствующие двум естественным выборам максимальной параболической подалгебры (см. работы [1]–[3]). Набор обобщенных модулей Вейля содержит оба типа классических модулей Вейля.

Размерности классических модулей Вейля были найдены в работах [1], [3], [5], [13]. В этих статьях размерности были вычислены с использованием связи классических модулей Вейля с модулями Демазюра. Единственным неизвестным случаем оставался случай, когда алгебра $\mathfrak{g}^{\text{af}}$ имеет тип $A_{2n}^{(2)}$ и $\langle \lambda, \alpha_n \rangle \in 2\mathbb{Z}$. С помощью нашего подхода мы определяем размерность в этом случае.

Теория обобщенных модулей Вейля тесно связана с теорией несимметрических полиномов Макдональда $E_\lambda(x, q, t)$ [14]–[16]. Точнее, мы доказываем следующую теорему (см. работу [17] для нескрученного случая).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть λ – антидоминантный $\mathfrak{g}_0$ -вес, $\sigma \in W$, $\mathfrak{g}^{\text{af}}$ имеет тип, отличный от $A_{2n}^{(2)}$. Тогда:

- 1) $\dim W_{\sigma(\lambda)} = \dim W_\lambda$;
- 2) $\text{ch } W_{w_0\lambda} = w_0 E_\lambda(x, q^{-1}, \infty)$;
- 3) для любого $i = 1, \dots, \text{rk}(\mathfrak{g})$ такого, что $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle < 0$, модуль $W_{\sigma(\lambda)}$ может быть разложен на подфакторы вида $W_{\kappa(\lambda + \omega_i)}$, где $\kappa \in W$. Подфакторы нумеруются некоторыми альковными прогулками, и количество подфакторов равно размерности классического фундаментального модуля Вейля $W(\omega_i)$.

Теорема 1.1 с небольшими изменениями выполняется и для алгебр типа $A_{2n}^{(2)}$. В частности, мы доказываем следующую новую формулу размерности для классических модулей Вейля:

$$\dim W \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i \omega_i + 2m_n \omega_n \right) = \prod_{i=1}^n \binom{2n+1}{i}^{m_i}. \quad (1.1)$$

Отметим, что в настоящей статье рассматриваются только локальные модули Вейля. Однако нетрудно определить глобальные обобщенные модули Вейля над скрученными аффинными алгебрами токов аналогично нескрученному случаю [18]. При помощи результатов настоящей статьи (см. также [19], [20]) эти модули можно исследовать тем же способом, что и модули из работы [18].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем весь необходимый материал об альковных путях [21]–[24] и комбинаторную формулу Орра–Шимозоно [16]. В разделе 3 мы определяем класс обобщенных модулей Вейля над скрученными алгебрами токов и изучаем их свойства. Доказательство главной теоремы сводится к случаям алгебр $\mathfrak{g}_0$ нулевого уровня рангов один и два. В разделе 4 мы изучаем случай алгебр малых рангов.

2. ФОРМУЛА ОРРА–ШИМОЗОНО

2.1. Скрученный квантовый граф Брюа. Пусть $\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$ – система корней и X – решетка весов конечномерной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ с непростыми связями, $W = W(X)$ – ее группа Вейля. Обозначим через α_i и ω_i , $i = 1, \dots, \text{rk}(\mathfrak{g}_0)$, простые корни и фундаментальные веса алгебры $\mathfrak{g}_0$. Мы пишем $X = X_+ \sqcup X_-$, где X_+ – положительный конус, натянутый на ω_i , и $X_- = -X_+$.

Пусть $s_1, \dots, s_n$ – множество простых отражений из W (здесь $n = \text{rk}(\mathfrak{g}_0)$). Для корня α обозначим через s_α отражение в этом корне. Пусть $l(w)$ – длина элемента $w \in W$.

Скрученный квантовый граф Брюа [25], [26] – это ориентированный помеченный граф с множеством вершин W и ребрами $w \xrightarrow{\alpha} ws_\alpha$ такими, что:

$l(ws_\alpha) = l(w) + 1$, и тогда мы имеем ребро в обычном графе Брюа;

$l(ws_\alpha) = l(w) - \langle 2\rho^\vee, \alpha \rangle + 1$, и тогда мы имеем *квантовое ребро*.

Здесь $2\rho^\vee = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha^\vee$ есть сумма положительных корней. Отметим, что это обычный квантовый граф Брюа для двойственной алгебры Ли $\mathfrak{g}_0^\vee$. Разница между обычным и скрученным квантовыми графами Брюа состоит в замене корней на корни во втором соотношении (для квантового графа Брюа второе условие содержит слагаемое $\langle 2\rho, \alpha^\vee \rangle$).

2.2. Альковные пути. Наша первая цель – определить скрученные альковные прогулки. Пусть W^a и W^e – аффинная и расширенная аффинная группы Вейля для $\mathfrak{g}_0^\vee$. В частности, $W^e = W^a \rtimes \Pi$, $\Pi = W^e/W^a$, и мы имеем естественное вложение $X \subset W^e$ (см. работы [16], [17]). Для $\lambda \in X$ мы обозначаем через t_λ соответствующий элемент из W^e . Любой элемент $w \in W^e$ определяет последовательность аффинных корней $\beta_1(w), \dots, \beta_l(w)$, $l = l(w)$. Для данной стартовой точки $u \in W^e$ произвольное подмножество $J \subset \{1, \dots, l\}$ дает альковную прогулку p_J , которая является последовательностью элементов $(\sigma_0, \dots, \sigma_l)$ из W^e , $\sigma_0 = u$. Далее, прогулка p_J определяет альковный путь $(z_0, \dots, z_r)$ (см., например, работу [18], формула (2.3)). В частности, введем обозначения $z_0 = uw$ и $z_r =: \text{end } p_J$. Обозначим получившийся путь тем же символом p_J .

Напомним, что W^a является полупрямым произведением конечной группы Вейля W и решетки X . Для $w \in W^e$ запишем $w = \pi t_{\text{wt}(w)} \text{dir}(w)$, где $\pi \in \Pi$, $\text{dir}(w) \in W$. Поэтому имеем естественную проекцию $\text{dir}: W^e \rightarrow W$.

Определим множество $t\mathcal{QB}(u, w)$ скрученных квантовых альковных путей. Мы говорим, что путь p_J является скрученным квантовым альковным путем, если проекция $\text{dir}(p_J)$ является путем в скрученном квантовом графе Брюа для W . Определим множество $t\mathcal{QB}(u, w)$ для типов $A_{2n}^{(2)}$ и $A_{2n}^{(2)\dagger}$. Обозначим через W группу Вейля типа B_n и рассмотрим скрученный квантовый граф Брюа типа $D_{n+1}^{(2)}$. Скажем, что p_J – скрученный квантовый альковный путь, если проекция на скрученный квантовый граф Брюа типа $D_{n+1}^{(2)}$ является путем в этом графе; при этом для $A_{2n}^{(2)}$ (для $A_{2n}^{(2)\dagger}$) не существует квантовых (обычных) ребер, исходящих из β_i , с нечетной мнимой частью (см. работу [16]). Мы говорим, что путь $p_J \in t\mathcal{QB}(u, w)$, если проекция на скрученный квантовый граф Брюа является путем в развернутом квантовом графе для W (с обращенными стрелками). Пусть $J^- \subset J$ – множество $j_m \in J$ таких, что корень $\text{Re}(z_m \beta_{j_m})$ отрицательный (здесь Re обозначает действительную часть аффинного корня). Отметим, что $j \in J^-$, если и только если соответствующее ребро в квантовом графе Брюа квантовое.

Пусть δ – базисный мнимый корень. Для любого элемента аффинной системы корней $\mu + N\delta$, где $\mu \in X$, положим $\deg(\mu + N\delta) = N$. Пусть $\text{qwt}(p_J) = \sum_{j \in J^-} \beta_j$ для альковного пути p_J .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Для любых $u, w \in W^e$ введем функцию

$$C_u^w(x, q) = \sum_{p_J \in t\mathcal{QB}(u, w)} x^{\text{wt}(\text{end}(p_J))} q^{\deg(\text{qwt}(p_J))}.$$

До конца этого раздела мы будем изучать свойства C_u^w . Имеем $C_{t_\mu u}^w = x^\mu C_u^w$.

ТЕОРЕМА 2.1. [16]. Пусть $\lambda \in X$ – антидоминантный вес. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} E_\lambda(x; q0) &= C_{\text{id}}^{t_\lambda}, \\ E_\lambda(x; q^{-1}, \infty) &= \sum_{p_J \in t\widehat{\mathcal{QB}}(\lambda)} x^{\text{wt}(\text{end}(p_J))} q^{\deg(\text{qwt}(p_J))}, \\ E_\lambda(x; q^{-1}, \infty) &= w_0 C_{w_0}^{t_\lambda}. \end{aligned}$$

Пусть $r_i = l(t_{-\omega_i})$ и пусть $\beta_j^i = \beta_j(t_{-\omega_i})$, $j = 1, \dots, r_i$.

ЛЕММА 2.1. Для любого $\lambda \in X_-$ последовательность корней $\beta_j(t_{\lambda - \omega_i})$ равна

$$\beta_1^i + \langle \beta_1^{i\vee}, \lambda \rangle \delta, \dots, \beta_{r_i}^i + \langle \beta_{r_i}^{i\vee}, \lambda \rangle \delta, \beta_1, \dots, \beta_a,$$

где $\beta_1, \dots, \beta_a$ – последовательность корней для t_λ .

Напомним, что для аффинного корня β мы пишем $\beta = \text{Re}(\beta) + \deg(\beta)\delta$. Для $\gamma \in \Delta$ обозначим через $\text{len}(\gamma)$ нормированную длину корня γ . Таким образом, $\text{len}(\gamma) = 1, 2, 3$ (при этом $\text{len}(\gamma) = 1$ для коротких корней γ).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. 1. Для любого приведенного разложения элемента $t_{-\omega_i}$ корни $\beta_j(t_{-\omega_i})$ удовлетворяют следующим свойствам:

- 1) $\{\text{Re } \beta_j^i\} = \{\gamma \in \Delta_- \mid \langle \gamma^\vee, \omega_i \rangle < 0\}$;
- 2) $|\{j \mid \text{Re } \beta_j^i = \gamma\}| = -\langle \gamma^\vee, \omega_i \rangle$;
- 3) для любого γ множество $\{\beta_j \mid \text{Re } \beta_j^i = \gamma\}$ совпадает со множеством

$$\{\gamma + \text{len}(\gamma)\delta, \dots, \gamma - \text{len}(\gamma)\langle \gamma^\vee, \omega_i \rangle \delta\}.$$

2. Существует приведенное разложение элемента $t_{-\omega_i}$, устанавливающее следующий порядок корней β . Положим $i_1 = i$ и пусть i_k , $k = 2, \dots, n$, – некоторое упорядочение множества $\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Запишем

$$(\beta_j^i)^\vee = -a_{i_1} \alpha_{i_1}^\vee - \dots - a_{i_n} \alpha_{i_n}^\vee + Dd.$$

Тогда порядок корней β задается лексикографическим порядком на векторах

$$\left(\text{len}(\text{Re } \beta_j^i) \frac{a_{i_1}}{D}, \frac{a_{i_2}}{a_{i_1}}, \dots, \frac{a_{i_n}}{a_{i_1}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложения 1.15 в [17].

СЛЕДСТВИЕ 2.1. 1. Имеет место равенство $\beta_1^i = -\alpha_i + \text{len}(\alpha_i)\delta$,

2. Если $\gamma = \tau + \eta$, где $\tau, \eta \in \Delta_+^\vee$, и $(\text{Re } \beta_j^i)^\vee = -\gamma$, то

$$\begin{aligned} |\{k \mid (\text{Re } \beta_k^i)^\vee = -\gamma, k \leq j\}| &= \\ &= |\{k \mid (\text{Re } \beta_k^i)^\vee = -\tau, k \leq j\}| + |\{k \mid (\text{Re } \beta_k^i)^\vee = -\eta, k \leq j\}|. \end{aligned}$$

3. Пусть $\tau, \eta \in \Delta_+^\vee$ – такие корни, что $\tau^\vee + 2\eta^\vee \in \Delta_+^\vee$. Рассмотрим подпоследовательность $\beta_{j_k}^i$, $k = 1, \dots, p$, содержащую все корни, удовлетворяющие свойству $-(\text{Re } \beta_{j_k}^i)^\vee \in \{\tau, \eta, \tau + \eta, \tau + 2\eta\}$ (где $j_k < j_{k+1}$). Тогда подпоследовательность $-(\text{Re } \beta_{j_k}^i)^\vee$, $k = 1, \dots, p$, является последовательной конкатенацией копий следующих двух последовательностей:

$$\tau, \tau + 2\eta, \tau + \eta, \tau + 2\eta \quad \text{и} \quad \eta, \tau + \eta, \tau + 2\eta. \quad (2.1)$$

Напомним обозначение $r = l(t_{-\omega_i})$. Обозначим через $t\mathcal{QB}(u, \lambda, \bar{\beta}^{i, \lambda})$ все альковные пути типа $\bar{\beta}^{i, \lambda} = (\beta_1^i + \text{len}(\text{Re } \beta_1^i) \langle \beta_1^i, \lambda \rangle \delta, \dots, \beta_{r_i}^i + \text{len}(\text{Re } \beta_r^i) \langle \beta_r^i, \lambda \rangle \delta)$, начинающиеся в $ut_{-\omega_i}$. Иными словами, вместо получения последовательности корней β_j из приведенного разложения элемента $t_{-\omega_i}$ мы начинаем с фиксированной последовательности $\bar{\beta}^{i, \lambda}$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\lambda \in -X_+$. Тогда для $u \in W^a$ имеет место следующее соотношение:

$$C_u^{t_{-\omega_i}} = \sum_{p \in t\mathcal{QB}(u, \lambda, \bar{\beta}^{i, \lambda})} q^{\deg(\text{qwt}(p))} C_{\text{end}(p)t_{-\lambda}}^{t_{\lambda}}.$$

Далее, если $u \in W$, то

$$C_u^{t_{-\omega_i}} = \sum_{p \in t\mathcal{QB}(u, \lambda, \bar{\beta}^{i, \lambda})} q^{\deg(\text{qwt}(p))} C_{\text{dir}(\text{end}(p))}^{t_{\lambda}} x^{\text{wt}(\text{end}(p)) - \lambda}.$$

3. ОБОБЩЕННЫЕ МОДУЛИ ВЕЙЛЯ

3.1. Определение и базовые свойства. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная простая алгебра и τ – автоморфизм ее диаграммы Дынкина порядка j . Зафиксируем примитивный корень ε степени j из единицы. Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_{k=0}^{j-1} \mathfrak{g}_k$, $\tau|_{\mathfrak{g}_k} = \varepsilon^k$ и $\mathfrak{g}_{k+j} \simeq \mathfrak{g}_k$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим скрученную алгебру токов

$$\mathfrak{g}[t]^{(j)} = \left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{g}_k \right) \otimes t^k.$$

По определению мы имеем следующее включение:

$$\mathfrak{g}[t]^{(j)} \subset \mathfrak{g}[t]. \quad (3.1)$$

Пространство $\mathfrak{g}_0$ является простой алгеброй Ли. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ – разложение Картана алгебры $\mathfrak{g}_0$. Пусть Δ – система корней алгебры $\mathfrak{g}_0$. Обозначим через Δ^s множество коротких корней и через Δ^ℓ – множество длинных корней из Δ . Пусть $e_\alpha \in \mathfrak{n}_+$ для положительного корня $\alpha \in \Delta_+$ и $f_{-\alpha} \in \mathfrak{n}_-$ – образующие Шевалле. Решетка весов X содержит положительный конус X_+ ; в частности, фундаментальные веса $\omega_1, \dots, \omega_n$ принадлежат X_+ . Для $\lambda \in X_+$ обозначим через V_λ неприводимый $\mathfrak{g}_0$ -модуль со старшим весом λ . Подалгебра

$$\mathfrak{n}^{\text{af}} = \mathfrak{n}_+ \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathfrak{g}_k \otimes t^k \right) \subset \mathfrak{g}[t]$$

будет играть ключевую роль в дальнейших построениях.

Рис. 1. Подалгебры $X_n^0 \subset X_n$.

Приведем список диаграммных автоморфизмов: $\mathfrak{g} = A_{2n-1}$ и $j = 2$, $\mathfrak{g} = D_{n+1}$ и $j = 2$, $\mathfrak{g} = E_6$ и $j = 2$, $\mathfrak{g} = D_4$ и $j = 3$, $\mathfrak{g} = A_{2n}$ и $j = 2$ (см. рис. 1). Во всех случаях, кроме последнего, $\mathfrak{g}_0$ -модуль $\mathfrak{g}_1$ имеет следующее свойство: $\text{wt}_{\mathfrak{h}^0}(\mathfrak{g}_1) = \Delta^s \cup \{0\}$, т. е. множество ненулевых весов $\mathfrak{g}_0$ -модуля $\mathfrak{g}_1$ совпадает со множеством коротких корней алгебры $\mathfrak{g}_0$. Пусть δ – базисный мнимый корень.

Отметим, что $\mathfrak{g}_k$ содержит нетривиальное $k\delta$ -весовое подпространство $\mathfrak{h}_{k\delta}$. Для любого $\alpha \in \Delta$ подпространство $\mathfrak{g}^{(j)}[t]$ веса $\alpha + k\delta$, $k \geq 0$, не более чем одномерно (это подпространство тривиально для длинного корня α и $k \notin j\mathbb{Z}$). Зафиксируем образующий элемент этого пространства (если оно нетривиально) и обозначим его через $e_{\alpha+k\delta}$. Множество корней скрученной аффинной алгебры Ли (кроме типа $A_{2n}^{(2)}$) совпадает с $(\Delta^\ell + j\mathbb{Z}_{\geq 0}\delta) \cup (\Delta^s + \mathbb{Z}_{\geq 0}\delta)$. В случае $\mathfrak{g} = A_{2n}$, $j = 2$ (т. е. в случае алгебры типа $A_{2n}^{(2)}$) $\mathfrak{g}_0$ -модуль $\mathfrak{g}_1$ является модулем со старшим весом $V_{2\omega_1}$.

Множество ненулевых корней есть $\{\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \cup \{2\alpha \mid \alpha \in \Delta^s\}$, т.е. содержит все корни алгебры $\mathfrak{g}_0$ и удвоенные короткие корни алгебры $\mathfrak{g}_0$.

Классические модули Вейля $W(\lambda)$, $\lambda \in X_+$, для скрученных аффинных алгебр Каца–Мури были определены в работе [2]: $W(\lambda)$ – это циклический $\mathfrak{g}[t]^{(j)}$ -модуль с образующим элементом v , удовлетворяющий следующим определяющим соотношениям:

$$hv = 0, \quad h \in \mathfrak{h}_{k\delta}, \quad k \geq 1, \quad hv = \lambda(h)v \quad \text{для всех } h \in \mathfrak{h}; \quad (3.2)$$

$$e_{\alpha+k\delta}v = 0, \quad k \geq 0, \quad f_{-\alpha}^{(\alpha^\vee, \lambda)+1}v = 0 \quad \text{для любого } \alpha \in \Delta_+. \quad (3.3)$$

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра двойственного нескрученного типа. Пусть W – группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}_0$. В дальнейшем мы используем следующие обозначения. Для корня α обозначим через $\text{len}(\alpha)$ его нормированную длину, т.е. $\text{len}(\alpha) = 1$ для короткого корня и $\text{len}(\alpha) = 2$ или $\text{len}(\alpha) = 3$ для длинного. Для элемента $\sigma \in W$ и для $\alpha \in \Delta_+$ определим действие $\hat{\sigma}$ элемента σ на множестве $\Delta_+ \cup (\Delta_-^s + \delta) \cup (\Delta_-^\ell + j\delta)$ следующим образом:

$$\hat{\sigma}(\alpha) = \begin{cases} \sigma(\alpha), & \text{если } \sigma(\alpha) \in \Delta_+, \\ \sigma(\alpha) + \text{len}(\alpha)\delta, & \text{если } \sigma(\alpha) \in \Delta_-; \end{cases}$$

$$\hat{\sigma}(-\alpha + \text{len}(\alpha)\delta) = \begin{cases} \sigma(-\alpha) + \text{len}(\alpha)\delta, & \text{если } \sigma(-\alpha) \in \Delta_-, \\ \sigma(-\alpha), & \text{если } \sigma(-\alpha) \in \Delta_+. \end{cases}$$

Зададим также действие на корневых векторах e_β , $\beta \in \Delta_+ \cup (\Delta_-^s + \delta) \cup (\Delta_-^\ell + j\delta)$, как $\hat{\sigma}e_\beta = e_{\hat{\sigma}(\beta)}$ и на основе него определим обобщенные модули Вейля двойственных нескрученных типов по аналогии с нескрученными типами [17], [27].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Для $\mu \in X$ запишем $\mu = \sigma(\lambda)$, где $\sigma \in W$, $\lambda \in X_-$. Тогда (обобщенный) модуль Вейля W_μ – это циклический $\mathfrak{n}^{\text{af}}$ -модуль с образующим элементом v и следующими соотношениями:

$$hv = 0, \quad h \in \mathfrak{h}_{k\delta}, \quad k \geq 1; \quad (3.4)$$

$$(\hat{\sigma}(e_{-\alpha + \text{len}(\alpha)\delta})v = 0, \quad (3.5)$$

$$(\hat{\sigma}(e_\alpha))^{-\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + 1}v = 0 \quad (3.6)$$

для любого $\alpha \in \Delta_+$.

3.2. Смешанный тип. В этом пункте мы рассматриваем алгебры типа $A_{2n}^{(2)}$. В этом случае $\mathfrak{g}_0$ имеет тип B_n . Тогда действительные корни, записанные в терминах ортогональных векторов $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, имеют вид

$$\pm\epsilon_i + k\delta, \quad \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j + k\delta, \quad \pm 2\epsilon_i + (2k+1)\delta, \quad i, j \in 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть Δ – система корней типа B_n . Определим действие группы Вейля на множестве $\Delta_+ \cup (\Delta_-^\ell + \delta) \cup (2\Delta_-^s + \delta)$, т.е. на следующем множестве:

$$\{\epsilon_i\} \cup \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i > j\} \cup \{-\epsilon_i \mp \epsilon_j + \delta \mid i > j\} \cup \{-2\epsilon_i + \delta\}.$$

Действие определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\epsilon_i \pm \epsilon_j) &= \begin{cases} \sigma(\epsilon_i \pm \epsilon_j) + \delta, & \text{если } \sigma(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \in \Delta_-, \\ \sigma(\epsilon_i \pm \epsilon_j), & \text{если } \sigma(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \in \Delta_+; \end{cases} \\ \hat{\sigma}(-\epsilon_i \mp \epsilon_j + \delta) &= \begin{cases} \sigma(-\epsilon_i \mp \epsilon_j) + \delta, & \text{если } \sigma(-\epsilon_i \mp \epsilon_j) \in \Delta_-, \\ \sigma(-\epsilon_i \mp \epsilon_j), & \text{если } \sigma(-\epsilon_i \mp \epsilon_j) \in \Delta_+; \end{cases} \\ \hat{\sigma}(\epsilon_i) &= \begin{cases} 2\sigma(\epsilon_i) + \delta, & \text{если } \sigma(\epsilon_i) \in \Delta_-, \\ \sigma(\epsilon_i), & \text{если } \sigma(\epsilon_i) \in \Delta_+; \end{cases} \\ \hat{\sigma}(-2\epsilon_i + \delta) &= \begin{cases} -2\sigma(\epsilon_i) + \delta, & \text{если } \sigma(-\epsilon_i) \in \Delta_-, \\ \sigma(-\epsilon_i), & \text{если } \sigma(-\epsilon_i) \in \Delta_+. \end{cases}\end{aligned}$$

Положим $\hat{\sigma}e_\beta = e_{\hat{\sigma}(\beta)}$ для $\beta \in \Delta_+ \cup (\Delta_-^\ell + \delta) \cup (2\Delta_-^s + \delta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Для $\mu \in X$ запишем $\mu = \sigma(\lambda)$, $\sigma \in W$, $\lambda \in X_-$. Тогда (обобщенный) модуль Вейля W_μ – это циклический $\mathfrak{n}^{\text{af}}$ -модуль с образующим элементом v и следующими соотношениями:

$$hv = 0, \quad h \in \mathfrak{h}_{k\delta}, \quad k \geq 1; \quad (3.7)$$

$$(\hat{\sigma}(e_{-\alpha+\delta}))v = 0, \quad \alpha \in \Delta_+^\ell \cup 2\Delta_+^s, \quad (3.8)$$

$$(\hat{\sigma}(e_\alpha))^{-\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + 1}v = 0, \quad \alpha \in \Delta_+^\ell, \quad (3.9)$$

$$(\hat{\sigma}(e_\alpha))^{-\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle + 1}v = 0, \quad \alpha \in \Delta_+^s \text{ и } \sigma(\alpha) \in \Delta_+, \quad (3.10)$$

$$(\hat{\sigma}(e_\alpha))^{[-\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle / 2] + 1}v = 0, \quad \alpha \in \Delta_+^s \text{ и } \sigma(\alpha) \in \Delta_-. \quad (3.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Ограничение $W(\lambda)$ на $\mathfrak{n}_+^{\text{af}}$ изоморфно $W_{-\lambda}$ с $\lambda \in X_+$ (потому что $w_0\lambda = -\lambda$ для алгебр с непростыми связями).

3.3. Двойственный смешанный тип. Рассмотрим диаграмму Дынкина аффинного типа $A_{2n}^{(2)}$:

$$\alpha_0 \Longrightarrow \alpha_1 \text{ --- } \alpha_2 \text{ --- } \alpha_3 \cdots \alpha_{n-3} \text{ --- } \alpha_{n-2} \text{ --- } \alpha_{n-1} \Longrightarrow \alpha_n.$$

Существуют два естественных варианта выбора специальной вершины. Если мы назовем специальной левую вершину, то мы получим обычную $A_{2n}^{(2)}$ -картину с $\mathfrak{g}_0 = B_n$. Обозначим через Δ систему корней этой алгебры нулевого уровня. Если назвать специальной правую вершину, то подлежащая простая алгебра Ли имеет тип C_n и обозначается как $\mathfrak{g}_0^\dagger$. Соответствующая скрученная алгебра токов изучалась в работе [1] (эта алгебра называется гиперспециальной параболической подалгеброй). Во втором случае мы имеем, что $\mathfrak{g}_1^\dagger \simeq V_{\omega_1}$, $\mathfrak{g}_2^\dagger \simeq V_{\omega_2}$, $\mathfrak{g}_3^\dagger \simeq V_{\omega_1}$, $\mathfrak{g}_{i+4}^\dagger \simeq \mathfrak{g}_i^\dagger$ как $\mathfrak{g}_0^\dagger$ -модули.

Пусть $\Delta^\dagger$ – система корней алгебры $\mathfrak{g}_0^\dagger$. Тогда веса V_{ω_1} могут быть отождествлены с половинами длинных корней алгебры $\mathfrak{g}_0^\dagger$, а веса V_{ω_2} – с короткими корнями

алгебры $\mathfrak{g}_0^\dagger$. Следовательно, корни аффинной алгебры можно записать следующим образом:

$$\{\Delta^\dagger + 4\mathbb{Z}\delta\} \cup \{\Delta^{\dagger s} + (2 + 4\mathbb{Z})\delta\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\Delta^{\dagger \ell} + (1 + 2\mathbb{Z})\delta \right\}.$$

Для доминантного веса λ обозначим через $W^\dagger(\lambda)$ гиперспециальный модуль Вейля из работы [1]. При этом $W^\dagger(\lambda)$ – циклический модуль со следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{k\delta}v &= 0, & k &\geq 1; \\ e_{\alpha+4k\delta}v &= 0, & e_{1/2\alpha+(1+2k)\delta}v &= 0, & \alpha &\in \Delta_+^\ell, & k &\geq 0; \\ e_{\alpha+2k\delta}v &= 0, & \alpha &\in \Delta_+^s, & k &\geq 0; \\ f_{-\alpha}^{(\alpha,\lambda)+1}v &= 0, & \alpha &\in \Delta_-. \end{aligned}$$

В этом случае можно также определить обобщенные модули Вейля. Однако в этом нет необходимости, потому что обобщенные модули Вейля двойственного смешанного типа изоморфны обобщенным модулям Вейля смешанного типа. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим элемент $w^\dagger$ группы Вейля типа B_n , посылающий α_i в α_{n-i} , $1 \leq i \leq n-1$; пусть также $w^\dagger \alpha_n = -\alpha_1 - \dots - \alpha_n$ (элемент $w^\dagger$ посылает ϵ_i в $-\epsilon_{n+1-i}$).

Пусть $[x]$ – целая часть числа x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть

$$\lambda = -\sum_{i=1}^n m_i \omega_i, \quad \lambda^\dagger = -\sum_{i=1}^{n-1} m_i \omega_{n-i} - \left[\frac{m_n}{2} \right] \omega_0.$$

Тогда $W_{w^\dagger(\lambda)} \simeq W^\dagger(-\lambda^\dagger)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем $\alpha_0 = -2(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) + \delta$ и $\alpha_0 = \widehat{w^\dagger}(\alpha_n)$. Более того, $\Delta_+^\dagger = \widehat{w^\dagger}(\Delta_+)$ и $\widehat{w^\dagger}(\alpha_i) = \alpha_{n-i}$, $i = 1, \dots, n-1$. Используя соотношения (3.11), получаем $e_{\alpha_0}^{[m_n/2]+1}v = 0$. Этим доказательство предложения завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Некоторые авторы применяют обратные обозначения, они пишут $A_{2n}^{(2)\dagger}$, когда мы пишем $A_{2n}^{(2)}$, и наоборот. Мы используем обозначения из работы [16].

3.4. Свойства модуля $W_{\sigma(\lambda)}$. Несложно видеть, что обобщенные модули Вейля корректно определены, т.е. W_μ не зависит от выбора σ и λ таких, что $\sigma(\lambda) = \mu$ (см. лемму 2.2 в [17]).

Отметим, что алгебра $\mathfrak{n}^{\text{af}}$ не содержит конечную подалгебру Картана $\mathfrak{h}$. Однако иногда имеет смысл рассматривать дополнительные операторы из $\mathfrak{h}$, действующие на W_μ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Для $\nu \in X$ определим W_μ^ν как $\mathfrak{n}^{\text{af}} \oplus \mathfrak{h}$ -модуль, где действие алгебры $\mathfrak{h}$ задано как $hv = \nu(h)v$ для всех $h \in \mathfrak{h}$ и циклического вектора v . Если $\nu = \mu$, мы опускаем верхний индекс и пишем W_μ вместо W_μ^μ .

Модули W_μ^ν естественно градуированы действием подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ и имеют дополнительную градуировку степенью, определенную следующими соотношениями: $\deg(v) = 0$ и операторы $e_{\gamma+k\delta}$ повышают степень на k . Определим характер формулой

$$\text{ch } W_\mu^\nu = \sum \dim W_\mu^\nu[\gamma, k] x^\gamma q^k,$$

где $W_\mu^\nu[\gamma, k]$ состоит из векторов степени k и $\mathfrak{g}_0$ -веса γ . В частности, $\text{ch } W_\mu = \text{ch } W_\mu^\mu$.

3.5. Фьюжн-подобная конструкция. Нашей первой целью является определение действия алгебры $\mathfrak{n}^{\text{af}}$ на модуле Вейля соответствующей нескрученной алгебры $\mathfrak{g}[t]$. Пусть λ – антидоминантный вес алгебры $\mathfrak{g}$ и пусть $W(\bar{w}_0\lambda)$ – классический модуль Вейля над $\mathfrak{g}[t]$ с младшим весовым вектором v (где $\bar{w}_0$ – самый длинный элемент группы Вейля алгебры $\mathfrak{g}$).

Напомним включение (3.1). Пусть z – некоторое ненулевое комплексное число. Для $u \in W(\bar{w}_0\lambda)$, $e_\alpha \otimes t^k \in \mathfrak{g}[t]^{(j)}$ рассмотрим сдвинутое действие:

$$e_\alpha \otimes t^k . u = e_\alpha \otimes (t + z)^k u.$$

Пусть σ – элемент группы Вейля алгебры $\mathfrak{g}_0$. Так как $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$, группа Вейля $\mathfrak{g}_0$ проективно действует на $\mathfrak{g}$ -модуле $V_\lambda \subset W(\bar{w}_0\lambda)$. Мы рассматриваем вектор $\sigma v \in W(\bar{w}_0\lambda)$, определенный с точностью до скаляра. Нетрудно показать, используя определитель Вандермонда, что циклический $\mathfrak{n}^{\text{af}}$ -подмодуль $U(\mathfrak{n}^{\text{af}})\sigma(v)$ совпадает со всем модулем $W(\bar{w}_0\lambda)$. Рассмотрим следующую фильтрацию на этом модуле: $F_0 = \mathbb{C}\sigma(v)$ и

$$F_r = \text{span}\{(x_1 \otimes t^{s_1} \cdots x_l \otimes t^{s_l}).\sigma(v)\}, \quad s_1 + \cdots + s_l \leq r, \quad x_a \otimes t^{s_a} \in \mathfrak{n}^{\text{af}}\}.$$

Пусть $W_{\sigma, \lambda}^*$ – соответствующий градуированный модуль.

Чтобы различать веса алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_0$, мы обозначаем через ω_i фундаментальные веса для $\mathfrak{g}$ и через ω_{0i} , фундаментальные веса для $\mathfrak{g}_0$ (здесь $i = 1, \dots, n$, $n = \text{rk}(\mathfrak{g}_0)$). Эти обозначения применяются только в этом разделе.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\lambda = -\sum_{i=1}^n m_i \omega_i$ – антидоминантный вес алгебры $\mathfrak{g}$ и $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^n m_i \omega_{0i}$ для двойственных нескрученных алгебр и как $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^{n-1} m_i \omega_{0i} - 2m_n \omega_{0n}$ для алгебр типов $A_{2n}^{(2)}$ (см. нумерацию на рис. 1). Рассмотрим $\mathfrak{g}[t]$ -модуль $W(\bar{w}_0\lambda)$. Тогда для любого элемента σ группы Вейля W алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$

$$\dim W_{\sigma(\lambda_0)} \geq \dim W(\bar{w}_0\lambda). \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем, что существует эпиморфизм $W_{\sigma(\lambda_0)} \rightarrow W_{\sigma, \lambda}^*$. Для этого нужно доказать, что все определяющие соотношения для модуля $W_{\sigma(\lambda_0)}$ выполняются в модуле $W_{\sigma, \lambda}^*$. Для диаграмного автоморфизма τ и простого корневого вектора e_i , кроме вектора e_n для $A_{2n}^{(2)}$, мы имеем $[e_i, \tau e_i] = 0$ (см. рис. 1). В случае типов $A_{2n}^{(2)}$ векторы $e_n, \tau e_n, [e_i, \tau e_i]$ образуют алгебру Гейзенберга.

Пусть v – младший весовой вектор модуля $W(\bar{w}_0\lambda)$. Отметим, что любая орбита группы, порожденной τ , содержит в точности один элемент e_i такой, что $i \leq n$. Мы

имеем $\hat{\sigma}(e_{\alpha+\delta}).\sigma(v) = 0$, $\alpha \in \Delta_-$. Во всех случаях, кроме $i = n$ в алгебрах типа $A_{2n}^{(2)}$, выполняется равенство

$$\left(\frac{\sum_{k=0}^{j-1} \tau^k e_i}{j} \right)^{m_i+1} .v = 0.$$

Аналогично, для типа $A_{2n}^{(2)}$ выполняется равенство $(e_n + \tau e_n)^{2m_n+1}.v = 0$. Поэтому для любого положительного корня $\alpha \in \Delta_+$

$$e_{\alpha}^{-\langle \lambda_0, \alpha^{\vee} \rangle + 1}.v = 0.$$

Таким образом, применяя действие группы Вейля, мы получаем

$$e_{\sigma(\alpha)}^{-\langle \lambda_0, \alpha^{\vee} \rangle + 1}.\sigma(v) = 0.$$

Вычисления в ранге 1 дают

$$\hat{\sigma}(e_{\alpha})^{-\langle \lambda_0, \alpha^{\vee} \rangle + 1}.\sigma(v) = 0, \quad \hat{\sigma}(e_{\alpha})^{[-\langle \lambda_0, \alpha^{\vee} \rangle / 2] + 1}.\sigma(v) = 0,$$

если $\mathfrak{g}$ имеет тип $A_{2n}^{(2)}$, α – короткий корень и $\sigma(\alpha) \in \Delta_-$.

Итак, мы доказали, что определяющие соотношения для $W_{\sigma(\lambda_0)}$ выполняются в модуле $W(\bar{w}_0\lambda)$ со сдвинутым действием. Следовательно, они также выполняются в $W_{\sigma, \lambda}^*$. Этим доказательство леммы завершено.

3.6. Скрученный квантовый граф Брюа и модули Вейля. В следующей лемме мы даем критерий существования ребер в скрученном квантовом графе Брюа. Во втором утверждении леммы длинным называется такой корень, для которого существует корень короче.

ЛЕММА 3.2. *Рассмотрим двойственный нескрученный тип. Для $\sigma \in W$, $\gamma \in \Delta_+$ два следующих утверждения эквивалентны:*

- 1) *в скрученном квантовом графе Брюа существует ребро $\sigma \xrightarrow{\gamma} \sigma s_{\gamma}$;*
- 2) *не существует элементов $\alpha, \beta \in \Delta_+$ таких, что*

$$\alpha, \beta \neq \gamma, \quad \alpha + \beta = 2 \frac{\langle \alpha, \gamma \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle} \gamma, \quad \hat{\sigma}(\alpha) + \hat{\sigma}(\beta) = 2 \frac{\langle \alpha, \gamma \rangle}{\langle \gamma, \gamma \rangle} \hat{\sigma}(\gamma);$$

если $\sigma\gamma \in \Delta_-$, то дополнительно γ не является длинным непростым корнем, содержащимся в подалгебре ранга 2, порожденной корнями из Δ_+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично нескрученному случаю, если заменить кокорни на корни (см. работу [17], лемма 2.12).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ есть последовательность аффинных корней. Тогда обобщенный модуль Вейля с характеристиками $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}, m)$, где $m = 0, 1, \dots, r$, является циклическим $\mathfrak{n}^{\text{af}}$ -модулем с порождающим элементом v и следующими соотношениями: $hv = 0$ для $h \in \mathfrak{h}_{k\delta}$ и $k \geq 1$; $\hat{\sigma}(e_{-\alpha+\delta})v = 0$ для $\alpha \in \Delta_+$; $\hat{\sigma}(e_{\alpha})^{[l_{\alpha, m/2}] + 1}v = 0$, если алгебра $\mathfrak{g}$ имеет тип $A_{2n}^{(2)}$ и $\sigma(\alpha) \in \Delta_-$, где α – короткий корень; $\hat{\sigma}(e_{\alpha})^{l_{\alpha, m} + 1}v = 0$ в остальных случаях. Здесь

$$l_{\alpha, m} = -\langle \alpha^{\vee}, \lambda \rangle - |\{\beta_i \mid \text{Re } \beta_i = -\alpha, i \leq m\}|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Если $m = 0$, то $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}, 0) \simeq W_{\sigma(\lambda)}$. Теперь предположим, что $m = l(t_{-\omega_i})$ и последовательность корней β получается из приведенного разложения для $t_{-\omega_i}$. Тогда в соответствии с первым утверждением предложения 2.1 мы имеем изоморфизм

$$W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}, m) \simeq W_{\sigma(\lambda+\omega_i)}.$$

Пусть $\tau_1, \tau_2 \in \Delta_+$ – два корня из системы корней алгебры $\mathfrak{g}_0$. Пусть L_2 – полупростая алгебра Ли с системой корней $\Delta' \subset \Delta$, натянутой на корни τ_1, τ_2 . Пусть $(\mathfrak{n}^{\text{af}})'$ – подалгебра в $\mathfrak{n}^{\text{af}}$, порожденная элементами вида $e_{\gamma+k\delta} \in \mathfrak{n}^{\text{af}}$, где $\gamma \in \Delta' \cup 2\Delta'$, $k \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Множество $2\Delta'$ возникает только в случае $A_{2n}^{(2)}$.

ЛЕММА 3.3. Для $\mathfrak{n}^{\text{af}}$ -модуля $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}, m)$ определим $(\mathfrak{n}^{\text{af}})'$ -подмодуль

$$M_2 = U((\mathfrak{n}^{\text{af}})')v \subset W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}, m),$$

где v – циклический вектор и для m выполнено $\sigma(\text{Re } \beta_{m+1}) \in \mathbb{Z}\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$. Тогда M_2 – подмодуль некоторого $(\mathfrak{n}^{\text{af}})'$ -модуля вида $W_{\tilde{\sigma}(\tilde{\lambda})}(\tilde{\beta}, \tilde{m})$, где $\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}, \tilde{\beta}, \tilde{m}$ являются параметрами для $(\mathfrak{n}^{\text{af}})'$. Кроме того, $\sigma \text{Re } \beta_{m+1} = \tilde{\sigma} \text{Re } \tilde{\beta}_{\tilde{m}+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не теряя общности, предположим, что τ_1, τ_2 – базис множества $\Delta' = \mathbb{Z}\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \cap \Delta$. Мы имеем несколько возможных случаев для Δ' и $(\mathfrak{n}^{\text{af}})'$. Первый случай имеет место, когда Δ' – система корней типа $A_1 \oplus A_1$ (это выполняется, когда τ_1 ортогонален к τ_2 и $[e_{\tau_1}, e_{\tau_2}] = 0$). В этом случае утверждение очевидно. Второй случай – это $L_2 \simeq G_2$ и алгебра $(\mathfrak{n}^{\text{af}})'$ изоморфна положительной аффинной нильпотентной алгебре типа $D_4^{(3)}$. Тогда $\mathfrak{n}^{\text{af}} = (\mathfrak{n}^{\text{af}})'$, и доказывать нечего. Третий случай реализуется, когда Δ' имеет тип A_2 ; тогда $(\mathfrak{n}^{\text{af}})'$ – положительная аффинная нильпотентная алгебра типа $A_2^{(1)}$. Этот случай рассмотрен в работе [17] (см. лемму 2.17). Два оставшихся случая – это $A_3^{(2)}$ и $A_4^{(2)}$ (значит, Δ' имеет тип C_2 или B_2). Случай $A_3^{(2)}$ эквивалентен нескрученному случаю типа C_2 из [17]. Единственное отличие заключается в том, что мы применяем третье утверждение следствия 2.1 к корням вместо кокорней. Наконец, последний случай $A_4^{(2)}$ эквивалентен $A_3^{(2)}$ благодаря рецепту из работы [16] (см. также п. 2.2).

3.7. Процедура разборки. Для описания структуры обобщенных модулей Вейля мы применяем тот же подход, что и в работе [17]. А именно, мы рассматриваем последовательность сюръекций

$$W_{\sigma(\lambda)} = W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, 0) \rightarrow W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, 1) \rightarrow \dots \rightarrow W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, r) = W_{\sigma(\lambda+\omega_i)},$$

где $\bar{\beta}^i = \bar{\beta}(t_{-\omega_i})$, $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \neq 0$, и описываем их коядра. Структура модуля описывается в терминах скрученного квантового графа Брюа для скрученной аффинной алгебры Каца–Мути.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Тип $A_{2n}^{(2)}$ очень специальный. Во-первых, скрученный квантовый граф Брюа в этом случае имеет тип $D_{n+1}^{(2)}$. Во-вторых, нас интересуют пути вдоль ребер скрученного квантового графа Брюа. Точнее, для его вершины σ и для аффинного корня β мы проверяем наличие ребра $\sigma \rightarrow \sigma s_{\text{Re } \beta}$. Существование такого ребра позволяет двигаться по графу. Однако только в алгебрах типа $A_{2n}^{(2)}$ есть

дополнительное ограничение [16]. Точнее, даже если ребро существует, им нельзя воспользоваться, когда ребро является квантовым и $\deg \beta_{m+1}^i + \langle \beta_{m+1}^{i\vee}, \lambda + \omega_i \rangle$ есть нечетное число (см. п. 2.2, лемма 2.1).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\bar{\beta}^i = (\beta_1^i, \dots, \beta_r^i)$ – последовательность корней β для некоторого приведенного разложения элемента $t_{-\omega_i}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если не существует ребра $\sigma \xrightarrow{\text{Re } \beta_{m+1}^i} \sigma s_{\text{Re } \beta_{m+1}}$ или, в случае $A_{2n}^{(2)}$, если ребро $\sigma \xrightarrow{\text{Re } \beta_{m+1}^i} \sigma s_{\text{Re } \beta_{m+1}^i}$ квантовое и $\deg \beta_{m+1}^{i, \lambda + \omega_i} = \deg \beta_{m+1}^i + \langle \beta_{m+1}^{i\vee}, \lambda + \omega_i \rangle$ нечетно, то

$$W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m) \simeq W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1).$$

2. Допустим, что существует ребро $\sigma \xrightarrow{\text{Re } \beta_{m+1}^i} \sigma s_{\text{Re } \beta_{m+1}}$. Тогда существует точная последовательность

$$W_{\sigma s_{\text{Re } \beta_{m+1}}(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1) \rightarrow W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m) \rightarrow W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1) \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в работе [17], мы сводим доказательство к случаю алгебры ранга 2, пользуясь леммами 3.2 и 3.3.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{ch } W_{\sigma(\lambda - \omega_i)} &\leq \sum_{p \in \mathcal{QB}(\sigma, \lambda, \bar{\beta}^i, \lambda)} q^{\deg(\text{qwt}(p))} \text{ch } W_{\frac{\text{wt end}(p)}{\text{dir}(\text{end}(p))}(\lambda)}, \\ \text{ch } W_{\sigma(\lambda)} &\leq C_{\sigma}^{t_{\lambda}}, \end{aligned}$$

где неравенства следует понимать как покоэффициентные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО точно такое же, как и доказательство следствия 2.19 из работы [17].

ТЕОРЕМА 3.2. Неравенства из следствия 3.1 в действительности являются равенствами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом результатов работы [9] в двойственных нескрученных типах $\dim W_{-\omega_i} = E_{-\omega_i}(1, 1, 0)$ для всех фундаментальных весов ω_i . В случае типа $A_{2n}^{(2)}$, опираясь на работу [9], можно получить, что $\dim W_{-w^\dagger \omega_i} = E_{-\omega_{n-i}}(1, 1, 0)$ при $i \neq n$ и $\dim W_{-w^\dagger 2\omega_n} = E_{-\omega_0}(1, 1, 0)$. Тогда доказательство проходит абсолютно параллельно доказательствам из [17]. Единственный особый случай – это $A_{2n}^{(2)}$ и $i = n$. Тогда неравенство (3.12) верно только для веса λ такого, что $\langle \lambda, \alpha_n^\vee \rangle$ – нечетное число. Поэтому мы вынуждены применить процедуру разложения дважды (т. е. мы рассматриваем такую фильтрацию, что все подмодули изоморфны $W_{\kappa(\lambda + 2\omega_n)}$). Однако, так как мы знаем, что неравенства из следствия 3.1 становятся равенствами после двойного применения процедуры разборки, мы получаем равенства после каждого применения.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть λ – антидоминантный вес и $\sigma \in W$. Тогда $\text{ch } W_{\sigma(\lambda)} = C_{\sigma}^{t_{\lambda}}$. Кроме того, последовательность

$$0 \rightarrow W_{\sigma s_{\text{Re } \beta_{m+1}}(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1) \rightarrow W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m) \rightarrow W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1) \rightarrow 0$$

точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2.21 из работы [17] по модулю следующего равенства:

$$\text{len}(\text{Re } \beta_{m+1}^i) l_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i, m} = \deg \beta_{m+1}^i \quad (3.13)$$

(в нескрученном случае множитель $\text{len}(\text{Re } \beta_{m+1}^i)$ в левой части отсутствует).

Как следствие мы получаем альтернативное доказательство следующего утверждения (см. [10]).

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть λ – доминантный вес. Тогда для любой скрученной алгебры токов $E_{-\lambda}(x, q, 0) = \text{ch } W(\lambda)$.

Мы также получаем теоретико-представленческую интерпретацию специализации несимметрических многочленов Макдональда в точке $t = \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Если λ – антидоминантный вес, то $E_{\lambda}(x, q^{-1}, \infty) = \text{ch } W_{-\lambda}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы применяем второе утверждение теоремы 2.1 и следующий результат (см., например, [28]): элемент $w_0 \in W$ разворачивает стрелки в скрученном квантовом графе Брюа.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Рассмотрим скрученную алгебру токов типа $A_{2n}^{(2)}$. Тогда для любого $\sigma \in W$

$$\dim W_{\sigma(\sum_{i=1}^{n-1} m_i \omega_i + 2m_n \omega_n)} = \prod_{i=1}^n \binom{2n+1}{i}^{m_i}.$$

В частности, мы можем вычислить размерности (1.1) для классических модулей Вейля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании процедуры разборки заключаем, что

$$\dim W_{\sigma(\sum_{i=1}^{n-1} m_i \omega_i + 2m_n \omega_n)} = (\dim W_{-2w^\dagger \omega_n})^{m_n} \prod_{i=1}^{n-1} (\dim W_{-w^\dagger \omega_i})^{m_i}.$$

Применяя предложение 3.1 и теорему 3 из статьи [1], получаем

$$\dim W_{-w^\dagger \omega_i} = \binom{2n+1}{i} \quad \text{при } i < n, \quad \dim W_{-2w^\dagger \omega_n} = \binom{2n+1}{n}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Допустим, что $\langle \lambda, \alpha_n^\vee \rangle \in 2\mathbb{Z} + 1$. Тогда размерность модуля $W_{\sigma\lambda}$ зависит от σ (это происходит уже в типе $A_2^{(2)}$, см. п. 4.1). Для $\sigma = \text{id}$ эта размерность известна [3].

4. СЛУЧАИ МАЛЫХ РАНГОВ

В этом разделе мы рассматриваем подалгебру нулевого уровня ранга 2. Соответствующие скрученные аффинные алгебры имеют типы $A_2^{(2)}$, $D_3^{(2)}$, $A_4^{(2)}$ и $D_4^{(3)}$. Приведем для начала ряд утверждений, которые будут использоваться в доказательствах.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В дальнейшем мы применяем соотношение, которое справедливо для $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m)$: при любом $\alpha \in \Delta_+$ и при $n \geq 0$

$$e_{\hat{\sigma}(\alpha)+n\delta}^{l_{\alpha,m}+1}v = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли и $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ – ее нильпотентная подалгебра. Пусть V – циклический $\mathfrak{n}$ -модуль с циклическим вектором v таким, что $e_{\alpha_i}^{m_i+1}v = 0$ для любого простого корня α_i , $m_i \geq 0$. Тогда для любого положительного корня α имеем $e_{\alpha}^{(\sum m_i \omega_i, \alpha^\vee)+1}v = 0$.

ЛЕММА 4.1. 1. Пусть $\mathfrak{g}$ имеет произвольный тип. Пусть τ – положительный корень и $\eta = -\operatorname{Re} \beta_{m+1}^i$ для $m \geq 0$. Предположим, что корни η и $s_\eta \tau$ простые. Тогда $m = 0$ и

$$\widehat{\sigma s_\eta}(e_\tau)^{l_{\tau,m+1}+1} \hat{\sigma}(e_\eta)^{l_{\eta,m}}v = 0. \quad (4.1)$$

2. Если $m = 0$ и существует подалгебра $N \subset \mathfrak{n}^{\text{af}}$, изоморфная конечномерной нильпотентной подалгебре $\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{g}_0$, содержащей η и $s_\eta \tau$, то выполняются соотношения (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение леммы. Рассмотрим подалгебру, натянутую на $\hat{\sigma}(e_\eta)$ и $\hat{\sigma}(e_{s_\eta \tau})$. Тогда эта подалгебра изоморфна $\mathfrak{n}_0$, и мы получаем необходимые соотношения, потому что модуль, порожденный $\hat{\sigma}(e_\eta)$ и $\hat{\sigma}(e_{s_\eta \tau})$ из v , изоморфен ограничению простого модуля над $\mathfrak{g}_0$. Таким образом, мы завершаем доказательство первого утверждения леммы.

Доказательство второго утверждения абсолютно аналогично.

4.1. Тип $A_2^{(2)}$. В этом пункте мы рассматриваем случай скрученной аффинной алгебры типа $A_2^{(2)}$. Положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ и рассмотрим скрученную алгебру токов $\mathfrak{g}[t]^{(2)}$. Система корней алгебры $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_3$ совпадает с $\Delta = \{\alpha, -\alpha\}$, и действительные корни алгебры $\mathfrak{g}[t]^{(2)}$ имеют вид $\pm\alpha + k\delta$ и $\pm 2\alpha + (2k+1)\delta$, где $k \geq 0$. Мнимые корни имеют вид $k\delta$, и любое весовое пространство $\mathfrak{h}_{k\delta}$ одномерно. Скрученный квантовый граф Брюа содержит две вершины, обозначаемые как id и s , и два ребра, направленные в двух направлениях. Элемент $\hat{s}$ действует как перестановка корней α и $-2\alpha + \delta$ и корневых векторов e_α и $e_{-2\alpha+\delta}$.

Последовательность $\bar{\beta}^1$ состоит из одного элемента, т. е. $\bar{\beta}^1 = (\beta)$ и $\beta = -\alpha + \delta$. В частности, $\deg \beta = 1$. Для антидоминантного веса $\lambda = -m\omega$ имеем $\deg \beta^{1,\lambda} = \deg \beta + \langle -\alpha, m\omega \rangle = m$. Для $m \geq 0$ определяющие соотношения для модуля $W_{-m\omega}$ суть

$$\begin{aligned} hv &= 0, & h &\in \mathfrak{h}_{k\delta}, & k &\geq 1; \\ e_{-\alpha+k\delta}v &= 0, & e_{-2\alpha+(2k-1)\delta}v &= 0 & \text{при } k > 0, & e_\alpha^{m+1}v &= 0. \end{aligned}$$

Определяющие соотношения для модуля $W_{m\omega} = W_{s(-m\omega)}$ таковы:

$$\begin{aligned} hv &= 0, & h &\in \mathfrak{h}_{k\delta}, & k &\geq 1; \\ e_{\alpha+k\delta}v &= 0, & e_{2\alpha+(2k+1)\delta}v &= 0 & \text{при } k \geq 0, & e_{-2\alpha+\delta}^{[m/2]+1}v &= 0. \end{aligned}$$

По определению $W_{2k\omega} \simeq W_{(2k+1)\omega}$. Это доказывает первое утверждение теоремы 3.1, так как ребро из s в id квантовое, а согласно замечанию 3.5 $W_{s(\lambda)} \simeq W_{s(\lambda+\omega)}$, если $\deg \beta^{1,\lambda}$ нечетно (т. е. $\lambda = (-2k-1)\omega$ для некоторого k).

Докажем теперь второе утверждение теоремы 3.1. Пусть v – образующий элемент модуля $W_{-m\omega}$, $m \geq 0$. Тогда прямые вычисления дают

$$\begin{aligned} (e_{-2\alpha+\delta})^{m/2} e_{\alpha}^m v &= 0 \quad \text{при четном } m, \\ (e_{-2\alpha+\delta})^{(m+1)/2} e_{\alpha}^m v &= 0 \quad \text{при нечетном } m. \end{aligned}$$

Теперь пусть v – образующий элемент модуля $W_{m\omega}$, $m > 0$. Тогда

$$e_{\alpha}^m (e_{-2\alpha+\delta})^{[m/2]} v = 0.$$

Это завершает доказательство второго утверждения теоремы 3.1.

Приведем характеры некоторых первых модулей Вейля ($x = x^{\omega}$):

$$\begin{aligned} \text{ch } W_0 &= 1, & \text{ch } W_{\omega} &= x, & \text{ch } W_{-\omega} &= x^{-1} + x, & \text{ch } W_{2\omega} &= x^2 + q + qx^2, \\ \text{ch } W_{-2\omega} &= x^{-2} + 1 + x^2, & \text{ch } W_{3\omega} &= x \text{ ch } W_{2\omega}, \\ \text{ch } W_{-3\omega} &= x^{-3} + x^{-1}(1+q) + x(1+q) + x^3, \\ \text{ch } W_{4\omega} &= x^4 + (q+q^2)x^2 + q + q^2 + q^3 + (q^2+q^3)x^{-2} + q^2x^{-4}, \\ \text{ch } W_{-4\omega} &= x^{-4} + x^{-2}(1+2q) + (1+q) + x^2(1+q) + x^4, \\ \text{ch } W_{5\omega} &= x \text{ ch } W_{4\omega}. \end{aligned}$$

Размерности обобщенных модулей Вейля даются формулой

$$\dim W_{m\omega} = \begin{cases} 3^{m/2}, & \text{если } m \text{ четное и неотрицательное,} \\ 3^{-m/2}, & \text{если } m \text{ четное и отрицательное,} \\ 3^{(m-1)/2}, & \text{если } m \text{ нечетное и положительное,} \\ 2 \cdot 3^{(-m+1)/2}, & \text{если } m \text{ нечетное и неотрицательное.} \end{cases}$$

4.2. Тип $D_3^{(2)}$. Целью данного пункта является доказательство теоремы 3.1 для алгебры $\mathfrak{g}$ типа $D_3^{(2)}$.

Обозначим через α_1 короткий простой корень, через α_2 – длинный простой корень, при этом $\Delta_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_2 + 2\alpha_1\}$ и множество соответствующих корней – это $\{\alpha_1^{\vee}, \alpha_2^{\vee}, 2\alpha_2^{\vee} + \alpha_1^{\vee}, \alpha_2^{\vee} + \alpha_1^{\vee}\}$. Имеем следующие последовательности β :

$$\begin{aligned} \beta_1^1 &= -\alpha_1 + \delta, & \beta_2^1 &= -2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\delta, & \beta_3^1 &= -\alpha_1 - \alpha_2 + \delta; \\ \beta_1^2 &= -\alpha_2 + 2\delta, & \beta_2^2 &= -\alpha_1 - \alpha_2 + 2\delta, & \beta_3^2 &= -2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\delta, & \beta_4^2 &= -\alpha_1 - \alpha_2 + \delta. \end{aligned}$$

Скрученный квантовый граф Брюа приведен на рис. 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\bar{\beta}^i$ – последовательность корней β для некоторого приведенного разложения элемента $t_{-\omega_i}$, $i = 1, 2$. Если не существует ребра

$$\sigma \xrightarrow{\text{Re } \beta_{m+1}} \sigma s_{\text{Re } \beta_{m+1}}, \text{ то}$$

$$W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m) \simeq W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1).$$

 Рис. 2. Скрученный квантовый граф Брюа типа $D_3^{(2)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – циклический вектор модуля $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m)$. Мы должны доказать соотношение

$$(\hat{\sigma}e_{-\operatorname{Re} \beta_{m+1}})^{l-\operatorname{Re} \beta_{m+1}, m} v = 0 \quad (4.2)$$

в предположении, что не существует ребра $\sigma \xrightarrow{\operatorname{Re} \beta_{m+1}} \sigma s_{\operatorname{Re} \beta_{m+1}}$.

Лемма 3.2 говорит нам, что необходимо рассмотреть два случая. Предположим, что существуют элементы $\tau, \eta \in \Delta_+$, такие что

$$\begin{aligned} \tau, \eta &\neq -\operatorname{Re} \beta_{m+1}, \\ \tau + \eta &= 2 \frac{\langle \tau, \operatorname{Re} \beta_{m+1} \rangle}{\langle \operatorname{Re} \beta_{m+1}, \operatorname{Re} \beta_{m+1} \rangle} \operatorname{Re} \beta_{m+1}, \\ \hat{\sigma}(\tau) + \hat{\sigma}(\eta) &= 2 \frac{\langle \tau, \operatorname{Re} \beta_{m+1} \rangle}{\langle \operatorname{Re} \beta_{m+1}, \operatorname{Re} \beta_{m+1} \rangle} \hat{\sigma} \operatorname{Re} \beta_{m+1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тогда $-\operatorname{Re} \beta_{m+1}$ совпадает с $\alpha_2 + \alpha_1$ или $\alpha_2 + 2\alpha_1$.

Пусть $-\operatorname{Re} \beta_{m+1} = \alpha_2 + \alpha_1$. Тогда мы имеем два случая: $\tau = \alpha_1$, $\eta = \alpha_2$ или $\tau = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $\eta = \alpha_2$. Рассмотрим первый из них, тогда $e_{\hat{\sigma}(-\operatorname{Re} \beta_{m+1})}$ – элемент алгебры Ли с простыми корнями $e_{\hat{\sigma}(\alpha_1)}$, $e_{\hat{\sigma}(\alpha_2)}$. Применяя п. 3 следствия 2.1, получаем $l_{\operatorname{Re} \beta_{m+1}, m} > l_{\alpha_2, m} + 2l_{\alpha_1, m}$. Рассмотрим алгебру Ли, натянутую на векторы $e_{\hat{\sigma}(\alpha_2)}$, $e_{\hat{\sigma}(\alpha_1)}$, $e_{\hat{\sigma}(\alpha_1 + \alpha_2)}$, $[e_{\hat{\sigma}(\alpha_1 + \alpha_2)} e_{\hat{\sigma}(\alpha_1)}]$. Эта подалгебра изоморфна конечномерной борелевской подалгебре типа C_2 . Поэтому, применяя замечание 4.2, получаем $\hat{\sigma}(e_{\operatorname{Re} \beta_{m+1}})^{l_{\alpha_2, m} + 2l_{\alpha_1, m} + 1} v = 0$. Второй случай ($\tau = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $\eta = \alpha_2$) может быть исследован аналогичным образом с помощью прямого вычисления.

Теперь предположим, что $-\operatorname{Re} \beta_{m+1} = \alpha_2 + 2\alpha_1$. Тогда $\tau = \alpha_1$, $\eta = \alpha_2 + \alpha_1$. Кроме того, линейная оболочка векторов $\hat{\sigma}e_{\alpha_1}$, $\hat{\sigma}e_{\alpha_2 + 2\alpha_1}$, $\hat{\sigma}e_{\alpha_2 + \alpha_1}$, $\hat{\sigma}e_{\alpha_2}$ или линейная оболочка векторов $\hat{\sigma}e_{\alpha_1}$, $\hat{\sigma}e_{\alpha_2 + 2\alpha_1}$, $\hat{\sigma}e_{\alpha_2 + \alpha_1}$, $\hat{\sigma}e_{-\alpha_2 + \delta}$ замкнута относительно скобки

Ли. Если подпространство, натянутое на $\hat{\sigma}e_{\alpha_1}$, $\hat{\sigma}e_{\alpha_2+2\alpha_1}$, $\hat{\sigma}e_{\alpha_2+\alpha_1}$, $\hat{\sigma}e_{\alpha_2}$, замкнуто относительно скобки Ли, то мы можем аналогично предыдущему случаю применить замечание 4.2.

Обратно, если подпространство, натянутое на элементы

$$\hat{\sigma}e_{\alpha_1}, \quad \hat{\sigma}e_{\alpha_2+2\alpha_1}, \quad \hat{\sigma}e_{\alpha_2+\alpha_1}, \quad \hat{\sigma}e_{-\alpha_2+\delta},$$

замкнуто относительно скобки Ли, то доказываемые соотношения эквивалентны равенству

$$(\hat{\sigma}e_{-\alpha_2+\delta})^{l_{\alpha_2,m}+l_{\alpha_1,m}+1}(\hat{\sigma}e_{\alpha_2+\alpha_1})^{l_{\alpha_2+\alpha_1,m}+1}v = 0.$$

Рассмотрим оставшийся случай $\hat{\sigma}(-\operatorname{Re} \beta_{m+1}) \in \Delta_-$, $-\operatorname{Re} \beta_{m+1} = 2\alpha_1 + \alpha_2$. При этом $\hat{\sigma}(2\alpha_1 + \alpha_2) = \hat{\sigma}(\alpha_1 + \alpha_2) + \hat{\sigma}\alpha_1$ или $\hat{\sigma}(2\alpha_1 + \alpha_2) = \hat{\sigma}(\alpha_1 + \alpha_2) + \hat{\sigma}\alpha_1 + \delta$. В первом случае, если $\hat{\sigma}(2\alpha_1 + \alpha_2) = \hat{\sigma}(\alpha_1 + \alpha_2) + \hat{\sigma}\alpha_1$, то мы находимся в условиях предыдущих рассуждений. Теперь предположим, что $\hat{\sigma}(2\alpha_1 + \alpha_2) = \hat{\sigma}(\alpha_1 + \alpha_2) + \hat{\sigma}\alpha_1 + \delta$. Мы знаем, что ровно один из элементов $\sigma(\alpha_1)$ и $\sigma(\alpha_1 + \alpha_2)$ отрицательный. Рассмотрим случай $\sigma(\alpha_1) \in \Delta_+$, второй случай абсолютно аналогичен.

Предположим, что $\sigma(\alpha_1) \in \Delta_+$, $\sigma(\alpha_1 + \alpha_2) \in \Delta_-$. Тогда подалгебра $\mathfrak{n}^{\text{af}}$, порожденная корневыми векторами, соответствующими корням

$$\sigma(\alpha_2) + 2\delta, \quad \hat{\sigma}(\alpha_1 + \alpha_2) + \delta, \quad \hat{\sigma}(2\alpha_1 + \alpha_2), \quad \hat{\sigma}(\alpha_1),$$

изоморфна нильпотентной подалгебре типа C_2 . Теперь искомое соотношение (4.2) следует из замечания 4.1 и замечания 4.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\bar{\beta}^i$ – последовательность корней β для некоторого приведенного разложения элемента $t_{-\omega_i}$, $i = 1, 2$. Положим $\eta = -\operatorname{Re} \beta_{m+1}$. Если существует ребро $\sigma \xrightarrow{\eta} \sigma s_\eta$, то имеется сюръекция

$$W_{\sigma s_\eta(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{n}^{\text{af}})\hat{\sigma}(e_\eta)^{l_{\eta,m}}v.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны доказать следующее соотношение:

$$\widehat{\sigma s_\eta}(e_\tau)^{l_{\tau,m}+1}\hat{\sigma}(e_\eta)^{l_{\eta,m}}v = 0. \quad (4.4)$$

Сначала отметим, что если оба корня η и τ длинные, то $\mathbb{Z}\langle\eta, \tau\rangle \simeq A_1 \oplus A_1$. Поэтому мы можем применить лемму 3.3.

Если η и $s_\eta\tau$ простые, то мы получаем требуемое соотношение в силу леммы 4.1.

Предположим теперь, что η – короткий простой корень и τ – короткий непростой корень. Тогда единственные случаи, которые не покрываются п. 2 леммы 4.1, суть $\sigma = s_\alpha$ и $\sigma = w_0$. При этом $[\hat{\sigma}(e_{-\alpha_2+\delta}), \hat{\sigma}(e_{\alpha_1+\alpha_2})] = \hat{\sigma}(e_{\alpha_1})$. Применяя операторы $\hat{\sigma}(e_{\alpha_1+\alpha_2})\hat{\sigma}(e_{-\alpha_2+\delta})$ и $\hat{\sigma}(e_{\alpha_1})$ к вектору $\hat{\sigma}(e_{\alpha_1+\alpha_2})^{m_1+m_2+1}v$, мы получаем, что векторы $\hat{\sigma}(e_{\alpha_1+\alpha_2})^{m_1+m_2+1}\hat{\sigma}(e_{\alpha_1})v$ и $\hat{\sigma}(e_{\alpha_1+\alpha_2})^{m_1+m_2}\hat{\sigma}(e_{2\alpha_1+\alpha_2})v$ равны нулю. Продолжая данные вычисления, получаем требуемые соотношения. Тем же способом мы получаем требуемые соотношения в оставшихся случаях, а именно, когда оба корня η и τ простые.

Пусть η – непростой корень. Тогда мы выводим искомые соотношения из весовых соображений. Рассмотрим детально один случай, остальные абсолютно аналогичны.

Пусть $\eta = 2\alpha_1 + \alpha_2$ и $\tau = \alpha_1 + \alpha_2$. Тогда

$$\text{wt}(\hat{\sigma}(e_\tau)^{l_{\tau,m}+1}\hat{\sigma}(e_\eta)^{l_{\eta,m}}v) = \sigma(\lambda) + l_{2\alpha_1+\alpha_2,m}\sigma(2\alpha_1 + \alpha_2) + l_{\alpha_1+\alpha_2,m}\sigma(-\alpha_1). \quad (4.5)$$

Однако мы знаем, что такого весового пространства в $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m)$ не существует. Точнее, модуль $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m)$ порожден $\mathfrak{n}^{\text{af}}$ из вектора v . Максимальное количество раз, когда мы можем применить $\hat{\sigma}(\alpha_2)$, равно $l_{\alpha_2,m}$. Поэтому все веса модуля $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m)$ имеют вид

$$\sigma(\lambda) + k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_1 + \alpha_2)$$

(для некоторых целых k_1 и k_2) с $k_1 \geq -l_{\alpha_2,m}$. Но правая часть равенства (4.5) не удовлетворяет этому соотношению, потому что $l_{\alpha_1+\alpha_2,m} \geq l_{2\alpha_1+\alpha_2,m} + l_{\alpha_2,m}$.

4.3. Тип $A_4^{(2)}$. Рассмотрим теперь тип $A_4^{(2)}$. В этом случае квантовый граф Брюа и последовательности $\bar{\beta}^1, \bar{\beta}^2$ те же, что и в типе $D_3^{(2)}$. Зафиксируем антидоминантный вес λ и $i = 1, 2$ так, что $\langle \lambda, \alpha_i \rangle < 0$.

Пусть $\hat{\sigma}(-\text{Re } \beta_{m+1}^i)$ – отрицательный короткий корень и $\deg \beta_{m+1}^{i,\lambda+\omega_i} = l$ (нечетное число). Напомним соотношение (3.13), согласно которому $l = l_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i, m}$. Поэтому по определению единственное различие между модулями $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1)$ и $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m)$ состоит в том, что в первом случае имеем $(\hat{\sigma}e_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i})^{[(l-1)/2]+1}v = 0$ вместо $(\hat{\sigma}e_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i})^{[l/2]+1}v = 0$. Однако для нечетного l равенства совпадают. Таким образом, если $\hat{\sigma}(-\text{Re } \beta_{m+1}^i)$ – отрицательный короткий корень и $\deg \beta_{m+1}^{i,\lambda+\omega_i} = l$ нечетно, то $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1) \simeq W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m)$.

Все остальные соотношения первого утверждения теоремы 3.1 доказываются прямым вычислением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Второе утверждение теоремы 3.1 выполняется для скрученной алгебры токов типа $A_4^{(2)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если корень $-\text{Re } \beta_{m+1}^i$ непростой, то аналогично типу $D_3^{(2)}$ мы получаем необходимый результат по весовым причинам. Поэтому нам необходимо рассмотреть только случай $m = 0$. Положим $\eta = -\text{Re } \beta_{m+1}^i$. Если $\eta = \alpha_2$ и $\tau = \alpha_2 + 2\alpha_1$, то мы можем применить лемму 3.3 для завершения доказательства. Отметим, что векторы $\hat{\sigma}(e_{\alpha_1})$ и $\hat{\sigma}(e_{\alpha_2})$ порождают алгебру Ли, изоморфную нильпотентной подалгебре типа C_2 (короткие и длинные корни переставлены). Следовательно, если $s_\eta(\tau)$ простой, то мы можем применить замечание 4.2. Все оставшиеся случаи могут быть получены прямым вычислением.

4.4. Тип $D_4^{(3)}$. Пусть $\mathfrak{g}^{\text{af}}$ – аффинная алгебра Ли типа $D_4^{(3)}$. Тогда подалгебра $\mathfrak{g}_0$ имеет тип G_2 . Обозначим через α_1 короткий простой корень и через α_2 – длинный простой корень алгебры $\mathfrak{g}_0$. Скрученный квантовый граф Брюа типа G_2 можно получить из квантового графа Брюа типа G_2 (см., например, работу [29], рис. 2) заменой s_1 на s_2 , а s_2 на s_1 в отметках всех вершин (сохраняя все ребра неизменными). То есть скрученный квантовый граф Брюа имеет следующий вид: существует обычное ребро из любого элемента длины p в любой элемент длины $p+1$, $0 \leq p \leq 5$. Имеется квантовое ребро из произвольного элемента с приведенным разложением $(\prod s_{i_k})s_j$ в элемент $(\prod s_{i_k})$, $j, i_k \in \{1, 2\}$, из произвольного элемента с приведенным

разложением $(\prod s_{i_k})s_2s_1s_2$ в элемент $(\prod s_{i_k})$ и из произвольного элемента с приведенным разложением $(\prod s_{i_k})s_1s_2s_1s_2s_1$ в элемент $(\prod s_{i_k})$.

Применяя предложение 2.1, мы получаем следующие последовательности $\bar{\beta}^1, \bar{\beta}^2$:

$$\begin{aligned}\beta_1^1 &= -\alpha_1 + \delta, & \beta_2^1 &= -3\alpha_1 - \alpha_2 + 3\delta, & \beta_3^1 &= -2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\delta, \\ \beta_4^1 &= -3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\delta, & \beta_5^1 &= -\alpha_2 - \alpha_1 + \delta, & \beta_6^1 &= -2\alpha_1 - \alpha_2 + \delta, \\ \beta_1^2 &= -\alpha_2 + 3\delta, & \beta_2^2 &= -\alpha_2 - \alpha_1 + 3\delta, \\ \beta_3^2 &= -3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6\delta, & \beta_4^2 &= -\alpha_2 - 2\alpha_1 + 3\delta, \\ \beta_5^2 &= -\alpha_2 - \alpha_1 + 2\delta, & \beta_6^2 &= -3\alpha_1 - \alpha_2 + 3\delta, & \beta_7^2 &= -2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\delta, \\ \beta_8^2 &= -3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\delta, & \beta_9^2 &= -\alpha_2 - \alpha_1 + \delta, & \beta_{10}^2 &= -2\alpha_1 - \alpha_2 + \delta.\end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть существует ребро $w \xrightarrow{\alpha} ws_{\text{Re } \beta_{m+1}^i}$. Тогда

$$W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m) \simeq W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 3.2 говорит нам, что необходимо рассмотреть два случая. Предположим, что найдутся элементы $\tau, \eta \in \Delta_+$, такие что при $\beta_{m+1} = \beta_{m+1}^i$ выполнены условия (4.3). Тогда имеем два случая:

$$\tau + \eta = -\text{Re } \beta_{m+1}^i, \quad \hat{\sigma}(\tau) + \hat{\sigma}(\eta) = -\hat{\sigma} \text{Re } \beta_{m+1}^i$$

и

$$\tau + \eta = -3 \text{Re } \beta_{m+1}^i, \quad \hat{\sigma}(\tau) + \hat{\sigma}(\eta) = -3\hat{\sigma} \text{Re } \beta_{m+1}^i.$$

Рассмотрим первый случай (во втором случае корень β_{m+1}^i короткий непростой, и этот случай можно исследовать прямым вычислением). Предположим, что

$$-\text{Re } \beta_{m+1}^i = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Тогда $m > 0$ и $l_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i, m} > 3l_{\alpha_2, m} + l_{\alpha_1, m}$. Но, опираясь на замечание 4.2, мы имеем

$$(\hat{\sigma}(e_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i}))^{3l_{\alpha_1, m} + l_{\alpha_2, m} + 1} v = 0.$$

Теперь предположим, что $-\text{Re } \beta_{m+1}^i = 2\alpha_1 + \alpha_2$. Тогда $l_{\beta_{m+1}^i, m} > l_{\alpha_1 + \alpha_2, m} + l_{\alpha_2, m}$. Если $[\hat{\sigma}(f_{\alpha_2}), \hat{\sigma}(f_{\alpha_1})] = \hat{\sigma}(f_{\alpha_1 + \alpha_2})$, то, применяя замечание 4.2, имеем

$$(\hat{\sigma}(e_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i}))^{l_{\alpha_1 + \alpha_2, m} + l_{\alpha_2, m}} v = 0.$$

Обратно, заметим, что $[(e_{\hat{\sigma}(-\alpha_1 + \delta)}), \hat{\sigma}(e_{\alpha_1 + \alpha_2})] = \hat{\sigma}(e_{\alpha_2})$. С помощью этого факта получаем, что

$$\hat{\sigma}(e_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i})^{l_{\alpha_1 + \alpha_2, m} + l_{\alpha_2, m} + 1} v = 0.$$

Аналогично разбирается случай $-\text{Re } \beta_{m+1}^i = \alpha_1 + 3\alpha_2$ или $-\text{Re } \beta_{m+1}^i = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$.

Теперь предположим, что не существует таких τ и η , что $-\text{Re } \beta_{m+1}^i$ — непростой длинный корень и $\hat{\sigma}(-\text{Re } \beta_{m+1}^i) \in \Delta_-$. Тогда единственные оставшиеся случаи — это $\sigma = w_0$ или $\sigma = s_{2\alpha_1 + 3\alpha_2}$. Прямым вычислением мы получаем, что $(\hat{\sigma}e_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i})^{l_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i, m}}$ лежит в левом идеале, порожденном $(\hat{\sigma}e_{\alpha})^{l_{\alpha, m}}$ с $\alpha \neq -\text{Re } \beta_{m+1}^i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Рассмотрим модуль $W_{\sigma(\lambda)}(\bar{\beta}^i, m)$. Если в квантовом графе Брюа существует ребро

$$\sigma \xrightarrow{\text{Re } \beta_{m+1}^i} \sigma s_{\text{Re } \beta_{m+1}^i},$$

то $U(\mathfrak{n}^{\text{af}})\hat{\sigma}(e_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i})^{l-\text{Re } \beta_{m+1}^i, m}v$ – фактормодуль модуля $W_{\sigma s_{\text{Re } \beta_{m+1}^i}(\lambda)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_1 = \hat{\sigma}(e_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i})^{l-\text{Re } \beta_{m+1}^i, m}v$. Если $\langle \text{Re } \beta_{m+1}^i, \eta \rangle = 0$, то легко проверить, что $[e_{-\text{Re } \beta_{m+1}^i}, e_\eta] = 0$ и, следовательно, $\mathbb{Z}\langle \text{Re } \beta_{m+1}^i, \tau \rangle \cap \Delta$ – система корней типа $A_1 \oplus A_1$. Поэтому утверждение является следствием леммы 3.3.

Если корень $\text{Re } \beta_{m+1}^i$ длинный, то для длинного корня $\tau \neq -\text{Re } \beta_{m+1}^i$ мы получаем, что $\mathbb{Z}\langle \text{Re } \beta_{m+1}^i, \tau \rangle \cap \Delta$ – система корней типа A_2 . Действительно, подалгебра, натянутая на длинные корни алгебры типа G_2 , изоморфна алгебре типа A_2 . Поэтому утверждение является следствием леммы 3.3.

Рассмотрим следующие случаи:

$$\begin{aligned} -\text{Re } \beta_{m+1}^i &= \alpha_2 + 2\alpha_1, & -\text{Re } \beta_{m+1}^i &= 2\alpha_2 + 3\alpha_1, \\ -\text{Re } \beta_{m+1}^i &= \alpha_2 + \alpha_1, \quad \tau \neq \alpha_1, & -\text{Re } \beta_{m+1}^i &= \alpha_2 + 3\alpha_1, \quad \tau \neq \alpha_2. \end{aligned}$$

Тогда необходимые условия выполняются по весовым причинам аналогично случаю $D_3^{(2)}$.

Теперь предположим, что $-\text{Re } \beta_{m+1}^i = \alpha_2$. Тогда $m = 0$. Отметим, что случаи длинного корня τ или τ , ортогонального к α_1 , уже разобраны. Случай $\tau = \alpha_1 + \alpha_2$ доказывается на основании замечания 4.2. Кроме того, $2\alpha_1 + \alpha_2$ ортогонален к α_2 . Значит, остается только $\tau = \alpha_1$. Мы должны доказать следующие равенства:

$$\hat{\sigma}(e_{\alpha_1 + \alpha_2})^{m_1+1}\hat{\sigma}(e_{\alpha_2})^{m_2}v = 0.$$

Этот и все оставшиеся случаи получаются прямым вычислением.

Благодарности. Мы благодарны Джислану Фурье и Дэниэлу Орру за полезные замечания и обсуждения.

Список литературы

- [1] V. Chari, B. Ion, D. Kus, “Weyl modules for the hyperspecial current algebra”, *Internat. Math. Res. Notices*, **2015**:15 (2015), 6470–6515.
- [2] V. Chari, G. Fourier, P. Senesi, “Weyl modules for the twisted loop algebras”, *J. Algebra*, **319**:12 (2008), 5016–5038.
- [3] G. Fourier, D. Kus, “Demazure and Weyl modules: the twisted current case”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365**:11 (2013), 6037–6064.
- [4] V. Chari, A. Pressley, “Weyl modules for classical and quantum affine algebras”, *Represent. Theory*, **5** (2001), 191–223.
- [5] V. Chari, S. Loktev, “Weyl, Demazure and fusion modules for the current algebra of $\mathfrak{sl}_{r+1}$ ”, *Adv. Math.*, **207**:2 (2006), 928–960.
- [6] G. Fourier, P. Littelmann, “Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions”, *Nagoya Math. J.*, **182** (2006), 171–198.
- [7] G. Fourier, P. Littelmann, “Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions”, *Adv. Math.*, **211**:2 (2007), 566–593.

- [8] Y. Sanderson, “On the connection between Macdonald polynomials and Demazure characters”, *J. Algebraic Combin.*, **11**:3 (2000), 269–275.
- [9] B. Ion, “Nonsymmetric Macdonald polynomials and Demazure characters”, *Duke Math. J.*, **116**:2 (2003), 299–318.
- [10] V. Chari, B. Ion, “BGG reciprocity for current algebras”, *Compos. Math.*, **151**:7 (2015), 1265–1287.
- [11] И. Макдональд, *Симметрически функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.
- [12] I. G. Macdonald, “Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials”, *Séminaire Bourbaki* (1994–1995), *Astérisque*, **37**, Exp. № 797, Société Mathématique de France, Paris, 1996, 189–207.
- [13] K. Naoi, “Weyl modules, Demazure modules and finite crystals for non-simply laced type”, *Adv. Math.*, **229**:2 (2012), 875–934.
- [14] I. Cherednik, “Nonsymmetric Macdonald polynomials”, *Internat. Math. Res. Notices*, **1995**:10 (1995), 483–515.
- [15] I. Cherednik, *Double Affine Hecke Algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **319**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [16] D. Orr, M. Shimozono, *Specializations of nonsymmetric Macdonald–Koornwinder polynomials*, arXiv: 1310.0279.
- [17] E. Feigin, I. Makedonskyi, *Generalized Weyl modules, alcove paths and Macdonald polynomials*, arXiv: 1512.03254.
- [18] E. Feigin, I. Makedonskyi, D. Orr, *Generalized Weyl modules and nonsymmetric q -Whittaker functions*, arXiv: 1605.01560.
- [19] I. Cherednik, D. Orr, “Nonsymmetric difference Whittaker functions”, *Math. Z.*, **279**:3–4 (2015), 879–938.
- [20] I. Cherednik, D. Orr, “One-dimensional nil-DAHA and Whittaker functions. II”, *Transform. Groups*, **18**:1 (2013), 23–59.
- [21] A. Ram, M. Yip, “A combinatorial formula for Macdonald polynomials”, *Adv. Math.*, **226**:1 (2011), 309–331.
- [22] S. Gaussent, P. Littelmann, “LS galleries, the path model, and MV cycles”, *Duke Math. J.*, **127**:1 (2005), 35–88.
- [23] S. Naito, D. Sagaki, “Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and specializations of Macdonald polynomials”, *Math. Z.*, **283**:3 (2016), 937–978, arXiv: 1404.2436.
- [24] S. Naito, F. Nomoto, D. Sagaki, *Specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = \infty$ and Demazure submodules of level-zero extremal weight modules*, arXiv: 1511.07005.
- [25] G. Lusztig, “Hecke algebras and Jantzen’s generic decomposition patterns”, *Adv. Math.*, **37**:2 (1980), 121–164.
- [26] F. Brenti, S. Fomin, A. Postnikov, “Mixed Bruhat operators and Yang–Baxter equations for Weyl groups”, *Internat. Math. Res. Notices*, **1999**:8 (1999), 419–441.
- [27] E. Feigin, I. Makedonskyi, *Weyl modules for $\mathfrak{osp}(1, 2)$ and nonsymmetric Macdonald polynomials*, arXiv: 1507.01362, to appear in *Math. Res. Lett.*
- [28] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, M. Shimozono, “A uniform model for Kirillov–Reshetikhin crystals I: Lifting the parabolic quantum Bruhat graph”, *Internat. Math. Res. Notices*, **2015**:7 (2015), 1848–1901.
- [29] C. Lenart, A. Lubovsky, *A uniform realization of the combinatorial R -matrix*, arXiv: 1503.01765.