Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Э. Деркачёв, А. В. Иванов, Л. Д. Фаддеев, Сценарий для перенормировки в квантовой теории Янга–Миллса в четырехмерном пространстве-времени, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 2, 227–234

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9306>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:24:26

© 2017 г. С. Э. Деркачев*, А. В. Иванов*, Л. Д. Фаддеев*

СЦЕНАРИЙ ДЛЯ ПЕРЕНОРМИРОВКИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Рассмотрена перенормировка теории Янга–Миллса в четырехмерном пространстве-времени в формализме внешнего поля.

Ключевые слова: квантовая теория полей Янга–Миллса, эффективное действие, перенормировка.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9306>

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория полей Янга–Миллса в четырехмерном пространстве-времени имеет две замечательные особенности: асимптотическая свобода и размерная трансмутация. Однако в описании процедуры перенормировки в монографиях, посвященных этой теории, используется традиционная парадигма квантовой теории поля, и эти черты не привлекают достаточно внимания. В настоящей работе мы предлагаем проект описания перенормировки, в котором эти уникальные свойства квантовой теории Янга–Миллса используются в полной мере. Наше предложение имеет чисто методическое значение. Большая часть наших формул в той или иной мере известна, так что мы, скорее, предлагаем естественный порядок их изложения. Данный текст основан на предварительном предложении одного из авторов [1].

В качестве основного объекта мы используем функционал внешнего поля или эффективное действие. Формализм фонового поля хорошо развит [2]–[4], мы используем его в формулировке, предложенной в работах [5]–[7], где он интерпретируется как производящий функционал для S -матрицы. Мы будем использовать регуляризацию, основанную на введении импульса обрезания. Эта процедура до сих пор не разработана в полной форме, поэтому мы назвали наше предложение сценарием. Размерная регуляризация будет рассмотрена в отдельной работе.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00598).

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: derkach@pdmi.ras.ru, regul1@mail.ru

Рис. 1. Элементы диаграммной техники.

2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ МЕТОДА ФОНОВОГО ПОЛЯ

Будем обозначать через $B_\mu(x)$ фоновое поле Янга–Миллса и через $W(B)$ эффективное действие, имеющее представление теории возмущений:

$$W(B) = \frac{1}{\alpha} W_{-1}(B) + W_0(B) + \sum_{n \geq 1} \alpha^n W_n(B).$$

Здесь α – константа связи, $W_{-1}(B)$ – классическое действие

$$W_{-1}(B) = \int \text{tr} F_{\mu\nu}^2 d^4x,$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu].$$

Однопетлевое слагаемое W_0 имеет представление

$$W_0 = -\frac{1}{2} \det M_1 + \det M_0,$$

где M_0 и M_1 – скалярный и векторный дифференциальные операторы

$$M_0 = \nabla_\mu^2, \quad M_1 = \nabla_\sigma^2 \delta_{\mu\nu} + 2[F_{\mu\nu}, \cdot],$$

где $\nabla_\mu = \partial_\mu + B_\mu$. Наконец, W_n соответствует вкладу вакуумных сильно связанных диаграмм с $n + 1$ петлями.

Элементами диаграммной техники являются функции Грина G_1 и G_0 – интегральные операторы, обратные к M_1 и M_0 , и вершины, соответствующие функционалам от векторных полей a_μ и скалярных фермионных полей $\bar{c}$, c (см. рис. 1),

$$\begin{aligned} \Gamma_1(B, a) &= -\frac{1}{g} \int \text{tr}(a_\nu \nabla_\mu F_{\mu\nu}) d^4x, \\ \Gamma_3(B, a) &= g \int \text{tr}([a_\mu, a_\nu] \nabla_\mu a_\nu) d^4x, \\ \Gamma_4(B, a) &= \frac{g^2}{4} \int \text{tr}([a_\mu, a_\nu]^2) d^4x, \\ \Omega(\bar{c}, c) &= g \int \text{tr}(\nabla_\mu \bar{c} [a_\mu, c]) d^4x, \end{aligned} \tag{1}$$

где $g = \sqrt{\alpha}/2$. Диаграммное представление для W_1 показано на рис. 2.

Рис. 2. Диаграммное представление для W_1 .

Функционал $W(B)$ имеет смысл производящего функционала для S -матрицы. При этом фоновое поле $B_\mu(x)$ должно удовлетворять квантовому уравнению движения, и $W(B)$ становится функционалом от функций, параметризующих соответствующие решения. Однако для обсуждения расходимостей в $W(B)$ можно считать $B_\mu(x)$ произвольным полем. Более того, мы допустим использование евклидова пространства-времени, так что M_1 и M_0 становятся эллиптическими операторами.

3. ОДНОПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Для вычисления используется метод собственного времени Фока [8]:

$$\frac{\det A}{A_0} = - \int_0^\infty \text{tr}(e^{-As} - e^{-A_0s}) \frac{ds}{s}.$$

В случае наших операторов $M_0(B)$ и $M_1(B)$ роль вторых слагаемых играют соответствующие операторы при нулевом поле $B_\mu(x)$, дающие (расходящийся) постоянный вклад в $W(B)$, которым мы пренебрегаем.

Для интегральных операторов $D_1(x, y, s)$ и $D_0(x, y, s)$, соответствующих e^{-M_1s} и e^{-M_0s} , известно поведение при малых s . Для нужного нам выражения

$$T(s) = -\frac{1}{2} \text{tr} e^{-M_1s} + \text{tr} e^{-M_0s}$$

с точностью до константы имеем

$$T(s) = T_0(s) + T_1(s),$$

где $T_0 = \beta_1 W_{-1}/2$, β_1 – знаменитая отрицательная константа, определяющая асимптотическую свободу, а $T_1(s)$ исчезает при $s = 0$. Таким образом,

$$W_0 = \int_0^\infty T(s) \frac{ds}{s}$$

имеет логарифмическую расходимость и необходима регуляризация. Мы регуляризуем W_0 обрезанием интеграла от T_0 при малых s :

$$W_0^{\text{reg}}(B, \Lambda) = \int_0^{1/\Lambda^2} T_1(s) \frac{ds}{s} + \int_{1/\Lambda^2}^\infty T(s) \frac{ds}{s}.$$

Перенормируемость означает, что мы можем подобрать зависимость константы связи α от Λ так, что

$$W_{\text{one loop}}(B, \Lambda) = \frac{1}{\alpha(\Lambda)} W_{-1} + W_0^{\text{reg}}(B, \Lambda)$$

не содержит расхождений при $\Lambda \rightarrow \infty$. Пусть

$$\frac{1}{\alpha(\Lambda)} = -\beta_1 \ln \frac{\Lambda}{m},$$

где m – фиксированный параметр. Тогда мы видим, что

$$\frac{d}{d\Lambda} W_{\text{one loop}}(B, \Lambda) = 0.$$

Более того, мы можем вообще явно исключить зависимость $W_{\text{one loop}}$ от Λ . Для этого введем импульс нормировки μ и запишем

$$\begin{aligned} W_0^{\text{reg}}(B, \Lambda) &= \int_0^{1/\mu^2} T_1(s) \frac{ds}{s} + \int_{1/\mu^2}^{\infty} T(s) \frac{ds}{s} + \int_{1/\Lambda^2}^{1/\mu^2} T_0(s) \frac{ds}{s} = \\ &= W_{0,0}(B, \mu) + \beta_1 \ln \frac{\Lambda}{\mu} W_{-1}, \end{aligned}$$

так что

$$W_{\text{one loop}}(B, \mu) = \frac{1}{\alpha_r(\mu)} W_{-1} + W_{0,0}(B, \mu),$$

и зависимость от Λ пропадает:

$$\frac{1}{\alpha_r(\mu)} = -\beta_1 \ln \frac{\mu}{m}.$$

Величина μ иногда называется бегущим импульсом, а $\alpha_r(\mu)$ – бегущей константой связи. Мы видим, что $\alpha(\Lambda)$ и $\alpha_r(\mu)$ являются решением одного и того же уравнения

$$x \frac{\alpha(x)}{x} = \beta_1 \alpha^2(x),$$

а размерный параметр m играет роль интеграла движения. Заметим, что для положительности константы связи должно выполняться условие $\mu > m$. Подобно $W_{\text{one loop}}(B, \Lambda)$ выражение $W_{\text{one loop}}(B, \mu)$ не зависит от μ . Соблазнительно заметить, что при $\mu = m$ выражение для $W_{\text{one loop}}$ примет вид

$$W_{\text{one loop}} = \int_0^{1/m^2} T_1(s) \frac{ds}{s} + \int_{1/m^2}^{\infty} T(s) \frac{ds}{s},$$

так что константа связи вообще пропадает из теории, в которой, однако, появляется размерная величина m . Это знаменитая размерная трансмутация. Безразмерная константа связи α заменяется на параметр m , имеющий размерность массы. Однако роль m много проще, чем роль α . Действительно, m можно исключить преобразованием подобия

$$x \rightarrow mx, \quad B_\mu \rightarrow \frac{1}{m} B_\mu(mx),$$

так что m играет всего лишь роль масштаба.

4. СТАРШИЕ ПЕТЛИ

Естественным обобщением формул предыдущего раздела является следующее представление для полного эффективного действия $W_{\text{reg}}(B, \alpha, \Lambda)$:

$$W_{\text{reg}}(B, \alpha, \Lambda) = \frac{1}{\alpha(\Lambda)} W_{-1} + W_{0,0} + W_{0,1} L + \sum_{n \geq 1} \alpha^n(\Lambda) (W_{n,0} + W_{n,1} L + \dots + W_{n,n} L^n), \quad (2)$$

где коэффициенты $W_{i,k}$ $i, k = 0, 1, \dots, k \leq i$, являются функциями от B , μ и $L = \ln(\Lambda/\mu)$. Перенормируемость означает, что функцию $\alpha(\Lambda)$ можно подобрать таким образом, что в выражении $W_{\text{reg}}(B, \alpha(\Lambda), \Lambda)$ зависимость от Λ пропадет. Функция $\alpha(\Lambda)$ удовлетворяет уравнению Гелл-Манна–Лоу

$$\Lambda \frac{d\alpha(\Lambda)}{d\Lambda} = \beta(\alpha(\Lambda)), \quad (3)$$

где правая часть не зависит от Λ явно, а бета-функция $\beta(\alpha)$ задается разложением в ряд

$$\beta(\alpha) = \sum_{n \geq 1} \beta_n \alpha^{n+1} = \beta_1 \alpha^2 + \beta_2 \alpha^3 + \dots \quad (4)$$

Условие независимости $W_{\text{reg}}(B, \alpha(\Lambda), \Lambda)$ от Λ эквивалентно уравнению

$$\frac{dW_{\text{reg}}(B, \alpha(\Lambda), \Lambda)}{d\Lambda} = 0, \quad (5)$$

из которого получается система рекуррентных соотношений для коэффициентов $W_{i,k}$, где $i \geq 1$, $i \geq k \geq 1$. Решение этой системы рекуррентных соотношений приводится в приложении. Все коэффициенты выражаются через младшие коэффициенты $W_{i,0}$ при конечных частях в $W(B)$, и выражение для $W_{\text{reg}}(B, \alpha(\Lambda), \Lambda)$ принимает следующий вид:

$$W_{\text{reg}}(B, \alpha(\Lambda), \Lambda) = \left(\frac{1}{\alpha(\Lambda)} + \sum_{i \geq 1} \Phi_{-1,i}(\alpha(\Lambda)) L^i \right) W_{-1} + \\ + W_{0,0}(B, \mu) + \sum_{n \geq 1} W_{n,0}(B, \mu) \left(\alpha^n(\Lambda) + \sum_{k \geq 1} \Phi_{n,k}(\alpha(\Lambda)) L^k \right),$$

где коэффициенты $\Phi_{-1,i}(\alpha(\Lambda))$ и $\Phi_{n,k}(\alpha(\Lambda))$ не зависят от L . В приложении доказана рекуррентная связь коэффициентов $\Phi_{-1,k}(\alpha)$ и $\Phi_{i,k}(\alpha)$:

$$\Phi_{i,k+1}(\alpha) = -\frac{\beta(\alpha)}{k+1} \frac{d}{d\alpha} \Phi_{i,k}(\alpha), \\ \Phi_{-1,k+1}(\alpha) = -\frac{\beta(\alpha)}{k+1} \frac{d}{d\alpha} \Phi_{-1,k}(\alpha). \quad (6)$$

В результате $W_{\text{reg}}(B, \alpha(\Lambda), \Lambda)$ представляется в виде

$$W_{\text{reg}}(B, \alpha(\Lambda), \Lambda) = \frac{1}{\alpha_r(\mu)} W_{-1} + W_{0,0} + \sum_{n \geq 1} \alpha_r^n(\mu) W_{n,0},$$

где

$$\alpha_r(\mu) = e^{-L\beta(\alpha)} \partial_\alpha \alpha|_{\alpha=\alpha(\Lambda)}. \quad (7)$$

Выражение для перенормированной константы связи $\alpha_r(\mu)$ имеет явный групповой характер, причем векторное поле $X = \beta(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha}$ играет роль соответствующего генератора. Нам представляется, что это является наиболее ясным определением группы перенормировок.

Ввиду ее групповой природы формула (7) справедлива для произвольной функции:

$$F(\alpha_r(\mu)) = e^{-L\beta(\alpha)} \partial_\alpha F(\alpha)|_{\alpha=\alpha(\Lambda)}. \quad (8)$$

Используя этот факт, легко доказать, что $\alpha_r(\mu)$ удовлетворяет тому же уравнению Гелл-Манна-Лоу, что и $\alpha(\Lambda)$:

$$\mu \frac{d\alpha_r(\mu)}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} e^{-L\beta(\alpha)} \partial_\alpha \alpha = e^{-L\beta(\alpha)} \partial_\alpha \beta(\alpha) \partial_\alpha \alpha = e^{-L\beta(\alpha)} \partial_\alpha \beta(\alpha) = \beta(\alpha_r(\mu)), \quad (9)$$

так что

$$\mu \frac{d\alpha_r(\mu)}{d\mu} = \beta(\alpha_r(\mu)). \quad (10)$$

Мы пришли к соотношениям

$$\begin{aligned} W_{\text{reg}}(B, \mu) &= W_{\text{reg}}(B, \Lambda)|_{\Lambda=\mu}, \\ \alpha_r(\mu) &= \alpha(\Lambda)|_{\Lambda=\mu}, \end{aligned}$$

это показывает, что исходная гипотеза для $W_{\text{reg}}(B, \Lambda)$ оказалась самосогласованной.

В заключение отметим одно важное обстоятельство. В выражении для эффективного действия

$$\begin{aligned} W_{\text{reg}}(B, \alpha, \Lambda) &= \frac{1}{\alpha(\Lambda)} W_{-1} + W_{0,0} + W_{0,1} L + \\ &+ \sum_{n \geq 1} \alpha^n(\Lambda) (W_{n,0} + W_{n,1} L + \dots + W_{n,n} L^n) \end{aligned} \quad (11)$$

коэффициент $W_{0,1} = \beta_1 W_{-1}$ определяет лидирующий вклад в асимптотику $L \rightarrow \infty$ функции $\alpha(\Lambda)$. Легко вычислить сумму вкладов, содержащих $\alpha^n(\Lambda) L^n$ и определяющих следующий за лидирующим вклад в асимптотику $L \rightarrow \infty$ функции $\alpha(\Lambda)$. Явное выражение для коэффициента $W_{n,n}$ выведено в приложении и имеет простой вид:

$$W_{n,n} = W_{-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \beta_2 \beta_1^{n-1}. \quad (12)$$

Суммирование нужных вкладов дает логарифм:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n L^n W_{n,n} = W_{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \alpha^n L^n}{n} \beta_2 \beta_1^{n-1} = W_{-1} \frac{\beta_2}{\beta_1} \ln(1 + \alpha \beta_1 L), \quad (13)$$

так что при больших L

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} \ln(1 + \alpha \beta_1 L) = \frac{\beta_2}{\beta_1} \left(\ln L + \ln \left(\frac{1}{L} + \alpha \beta_1 \right) \right) \rightarrow \frac{\beta_2}{\beta_1} \ln L, \quad (14)$$

и в итоге, с учетом лидирующего однопетлевого вклада, получаем

$$\frac{1}{\alpha_r} = \frac{1}{\alpha} + \beta_1 L + \frac{\beta_2}{\beta_1} \ln L. \quad (15)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Требование независимости от Λ (5) эффективного действия, представленного рядом (11), и уравнение Гелл-Манна–Лоу (3) приводят к системе рекуррентных соотношений для коэффициентов ряда

$$\begin{aligned} W_{j,1} &= W_{-1}\beta_{j+1} - \sum_{n=0}^{j-1} n\beta_{j-n}W_{n,0}, \quad j \geq 1, \\ W_{j,p+1} &= -\frac{1}{p+1} \sum_{n=p}^{j-1} n\beta_{j-n}W_{np}, \quad p \geq 1, \quad j \geq p+1. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, все коэффициенты $W_{i,k}$ выражаются через коэффициенты $W_{i,0}$, $i \geq 0$, и W_{-1} и можно вывести явные формулы для решения полученной системы рекуррентных соотношений. При помощи индукции нетрудно показать, что выражения для коэффициентов $\Phi_{k,m}(\alpha)$ при $L^m W_{k,0}$, $k \geq 0$, и для коэффициентов $\Phi_{-1,m}(\alpha)$ при $L^m W_{-1}$ имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{k,m}(\alpha) &= \frac{k(-1)^m}{m!} \sum_{j_m=2+(m-1)+(k-1)}^{\infty} \alpha^{j_m} \sum_{j_{m-1}=2+(m-2)+(k-1)}^{j_m-1} \dots \\ &\quad \dots \sum_{j_1=2+(k-1)}^{j_2-1} \beta_{j_1-1-(k-1)} \beta_{j_2-j_1} \dots \beta_{j_m-j_{m-1}} j_1 j_2 \dots j_{m-1}, \\ \Phi_{-1,m}(\alpha) &= \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{j_m=m-1}^{\infty} \alpha^{j_m} \sum_{j_{m-1}=m-2}^{j_m-1} \dots \\ &\quad \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \beta_{j_1+1} \beta_{j_2-j_1} \dots \beta_{j_m-j_{m-1}} j_1 j_2 \dots j_{m-1}. \end{aligned}$$

С помощью этих формул легко проверяются формулы сдвига (6).

Приведем также явные формулы, которые позволяют выразить старшие коэффициенты через конечные части:

$$W_{m,n} = W_{-1}V_{n,-1,m-n+1} + \sum_{i=0}^{m-n} W_{i,0}V_{n,i,m-n-i}, \quad m \geq 1, \quad m \geq n \geq 1, \quad (17)$$

где коэффициенты $V_{n,k,i}$ имеют вид

$$\begin{aligned} V_{n,k,i} &= \frac{k(-1)^n}{n!} \sum_{j_{n-1}=0}^i \dots \sum_{j_1=0}^{j_2} \beta_{j_1+1} \beta_{j_2-j_1+1} \dots \beta_{i-j_{n-1}+1} \times \\ &\quad \times (j_1 + 2 + (k-1)) \dots (j_{n-1} + 2 + (n-2) + (k-1)). \end{aligned}$$

Отметим, что выражение для коэффициента $W_{n,n}$ дается следующей простой формулой:

$$W_{n,n} = W_{-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \beta_2 \beta_1^{n-1}. \quad (18)$$

Список литературы

- [1] L. D. Faddeev, “Scenario for the renormalization in the 4D Yang–Mills theory”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **31**:1 (2016), 1630001, 5 pp., arXiv: 1509.06186.
- [2] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. II. The manifestly covariant theory”, *Phys. Rev.*, **162**:5 (1967), 1195–1239; “Quantum theory of gravity. III. Applications of the covariant theory”, *Ibid*, 1239–1256.
- [3] G. 't Hooft, “The background field method in gauge field theories”, *Functional and Probabilistic Methods in Quantum Field Theory* (Karpacz, 1975), Acta Universitatis Wratislaviensis, **1**, ed. B. Jancewicz, Wroclaw Univ., Wroclaw, 1976, 345–369.
- [4] L. F. Abbott, “Introduction to the background field method”, *Acta Phys. Polon. B*, **13**:1–2 (1982), 33–50.
- [5] И. Я. Арефьева, А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, “Производящий функционал для S -матрицы в калибровочно-инвариантных теориях”, *ТМФ*, **21**:3 (1974), 311–321.
- [6] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М., 1978.
- [7] L. D. Faddeev, “Mass in Quantum Yang–Mills theory (comment on a Clay millenium problem)”, *Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.)*, **33**:2 (2002), 201–212, arXiv: 0911.1013.
- [8] В. А. Фок, “Собственное время в классической и квантовой механике”, *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, **4–5** (1937), 551–568.