Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Э. Деркачёв, Л. Д. Фаддеев, Замечание о коэффициенте отражения в модели Лиувилля, *ТМФ*, 2017, том 192, номер 2, 221–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:36:18

© 2017 г.

С. Э. Деркачев*, Л. Д. Фаддеев*

ЗАМЕЧАНИЕ О КОЭФФИЦИЕНТЕ ОТРАЖЕНИЯ В МОДЕЛИ ЛИУВИЛЛЯ

Показано, что коэффициенты отражения в квантовой теории модели Лиувилля, вычисленные в рамках бутстрапного и гамильтонова подходов, различаются фазовым множителем и просто дают разные нормировки вертексных операторов.

Ключевые слова: квантовая модель Лиувилля, конформный бутстрап, конформная теория поля.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9307>

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой теории модели Лиувилля важную роль играет коэффициент отражения $R(p)$. В бутстрапном подходе [1] он осуществляет эквивалентность вертексных операторов $W_\alpha(z)$. В физической области

$$\alpha = \frac{Q}{2} + ip, \quad p \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $Q = b + b^{-1}$ и b играет роль константы связи,

$$W_\alpha(z) = R(p)W_{Q-\alpha}(z), \quad |R(p)| = 1. \quad (2)$$

В операторном подходе $R(p)$ [2]–[5] определяет гильбертово пространство нулевых мод P , Q как подпространство в $L_2(\mathbb{R})$, состоящее из функций

$$\psi(p) = R(p)\psi(-p). \quad (3)$$

В работах [4], [5] используются обозначения, принятые в теории автоморфных функций. Если в работе [1] параметр q квантовой группы обозначен как

$$q = e^{i\pi b^2},$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00598).

* Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: derkach@pdmi.ras.ru

то в [4] используется каноническое обозначение

$$q = e^{i\pi\tau}$$

с модулярным параметром τ , представленным в виде отношения полупериодов ω и ω'

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}, \quad \omega\omega' = -\frac{1}{4}.$$

Положительному τ соответствуют ω и ω' на положительной части мнимой оси, так что

$$b = \frac{2\omega'}{i}, \quad \frac{1}{b} = \frac{2\omega}{i},$$

$$Q = \frac{2(\omega' + \omega)}{i} = \frac{2\omega''}{i}, \quad \omega'' = \omega' + \omega.$$

Если $\alpha = Q/2 + ip$, то $Q - \alpha = Q/2 - ip$, т. е. замене $\alpha \rightarrow Q - \alpha$ соответствует замена $p \rightarrow -p$. В работах [1] и [4], [5] приведены явные выражения для $R(p)$.

В рамках бутстрапного подхода коэффициент отражения выражается в терминах гамма-функции Эйлера:

$$R_{ZZ}(p) = -\mu^{-2ip} \frac{\Gamma(2ipb)\Gamma(2ipb^{-1})}{\Gamma(-2ipb)\Gamma(-2ipb^{-1})} = \frac{Z(-p)}{Z(p)}, \quad (4)$$

$$Z(p) = \mu^{ip} \frac{ip}{\pi} \Gamma(-2ipb)\Gamma(-2ipb^{-1}), \quad \overline{Z(p)} = Z(-p), \quad (5)$$

а в рамках операторного подхода в терминах другой специальной функции – квантового дилогарифма:

$$R_{FV}(p) = e^{-4\pi ip\omega''} \frac{\gamma(-2p - \omega'')}{\gamma(2p - \omega'')} = \frac{M(-p)}{M(p)}, \quad (6)$$

$$M(p) = ce^{-2\pi ip(p - \omega'')}\gamma(2p - \omega''), \quad (7)$$

где функция $\gamma(x)$ определяется при помощи формулы

$$\gamma(x) = \exp \left[-\frac{1}{4} \int_C \frac{dt}{t} \frac{e^{itx}}{\sin(t\omega)\sin(t\omega')} \right].$$

Контур C идет вдоль вещественной оси и обходит точку $t = 0$ сверху. Константа c выбирается следующим образом:

$$c = e^{i\beta + i\pi/4}, \quad \beta = \frac{\pi}{12} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} \right).$$

При таком выборе константы c выполняется соотношение

$$\overline{M(p)} = M(-p),$$

которое может быть легко проверено при помощи формул комплексного сопряжения и отражения для квантового дилогарифма

$$\overline{\gamma(x)} = \frac{1}{\gamma(\overline{x})}, \quad \gamma(x)\gamma(-x) = e^{i\beta} e^{i\pi x^2} \quad (8)$$

и очевидных соотношений

$$c^2 = e^{-i\beta} e^{-i\pi\omega''^2}, \quad \bar{c} = c^{-1}. \quad (9)$$

На первый взгляд, формулы (4) и (6) совсем не похожи, и несколько лет оставалась неясной причина такого расхождения бутстрапного и гамильтонова подходов. Мы покажем, что на самом деле $R_{ZZ}(p)$ и $R_{FV}(p)$ различаются фазовым множителем и просто дают разные нормировки операторов $W_\alpha(z)$.

2. ПЕРЕНОРМИРОВКА

Если изменить нормировку $W'_\alpha(z) = \lambda(p)W_\alpha(z)$, то для перенормированного вертексного оператора получим

$$W'_\alpha(z) = R'(p)W'_{Q-\alpha}(z), \quad (10)$$

$$R'(p) = \frac{\lambda(p)}{\lambda(-p)} R(p), \quad (11)$$

т. е. коэффициент отражения при перенормировке изменяется по простому закону. Мы хотим найти функцию $\lambda(p)$, связывающую коэффициенты отражения в двух подходах:

$$R_{FV}(p) = \frac{\lambda(p)}{\lambda(-p)} R_{ZZ}(p),$$

или, явным образом,

$$\frac{\lambda(p)}{\lambda(-p)} = \frac{M(-p)Z(p)}{M(p)Z(-p)}.$$

Самое простое решение имеет вид

$$\lambda(p) = \frac{M(-p)}{Z(-p)}, \quad \overline{\lambda(p)} = \lambda(-p),$$

и удовлетворяет дополнительному ограничению

$$\overline{\lambda(p)}\lambda(p) = \lambda(p)\lambda(-p) = \frac{M(-p)M(p)}{Z(-p)Z(p)} = 1,$$

справедливость которого следует из тождества

$$Z(p)Z(-p) = M(p)M(-p) = -\frac{1}{4\sin(2\pi ipb)\sin(2\pi ipb^{-1})}.$$

Вычисление первого произведения сводится к использованию соотношения отражения для гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)},$$

так что получаем

$$\begin{aligned} Z(p)Z(-p) &= \frac{p^2}{\pi^2} \Gamma(-2ipb)\Gamma(2ipb)\Gamma(-2ipb^{-1})\Gamma(2ipb^{-1}) = \\ &= -\frac{1}{4\sin(2\pi ipb)\sin(2\pi ipb^{-1})}. \end{aligned}$$

При вычислении второго произведения используется соотношение

$$\frac{\gamma(x + \omega'')}{\gamma(x - \omega'')} = -4e^{2\pi i x \omega''} \sin\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2\omega'}\right), \quad (12)$$

которое легко выводится из определяющих функциональных уравнений для квантового дилогарифма

$$\frac{\gamma(x + \omega')}{\gamma(x - \omega')} = 1 + e^{-(i\pi/\omega)x}, \quad \frac{\gamma(x + \omega)}{\gamma(x - \omega)} = 1 + e^{-(i\pi/\omega')x}. \quad (13)$$

При помощи формулы отражения (8) и соотношений (12), (9) получаем

$$\begin{aligned} M(p)M(-p) &= c^2 e^{-4\pi i p^2} \gamma(2p - \omega'') \gamma(-2p - \omega'') = \\ &= c^2 e^{-4\pi i p^2} e^{i\beta} e^{i\pi(2p + \omega'')^2} \frac{\gamma(2p - \omega'')}{\gamma(2p + \omega'')} = -\frac{1}{4 \sin(\pi p/\omega) \sin(\pi p/\omega')}. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты отражения в двух подходах связаны соотношением

$$R_{FV}(p) = \lambda^2(p) R_{ZZ}(p), \quad (14)$$

где

$$\lambda(p) = \frac{M(-p)}{Z(-p)}, \quad |\lambda(p)|^2 = \lambda(p)\lambda(-p) = 1, \quad (15)$$

т. е. просто различаются фазовым множителем.

2.1. Коэффициент отражения и двухточечная функция Грина. Рассмотрим связь коэффициента отражения с двухточечной функцией Грина. С точностью до общей нормировки $N(p)$ двухточечная функция Грина имеет вид

$$\langle W_\alpha(z_1) W_{\alpha'}(z_2) \rangle = \frac{N(p)}{|z_1 - z_2|^{2\Delta(p)}} (\delta(p + p') + R(p) \delta(p - p')), \quad (16)$$

где $\Delta(p)$ – конформная размерность оператора $W_\alpha(z)$,

$$\Delta(p) = \alpha(Q - \alpha) = \frac{Q^2}{4} + p^2. \quad (17)$$

Формула (16) диктуется глобальной конформной инвариантностью. Глобальные конформные преобразования – это преобразования из группы Мёбиуса или группы дробно-линейных преобразований. Зависимость от z_1 и z_2 однозначно определяется требованиями трансляционной и масштабной инвариантности, а инвариантность относительно инверсий приводит к тому, что рассматриваемая функция Грина отлична от нуля только при совпадении конформных размерностей полей $\Delta(p) = \Delta(p')$. Явное представление для коэффициента в формуле (16) – следствие соотношения (10) и дополнительного требования, чтобы коэффициент при $\delta(p + p')$ был равен единице.

Если изменить нормировку $W'_\alpha = \lambda(p)W_\alpha$, то для функций Грина новых полей получим

$$\langle W'_\alpha(z_1)W'_{\alpha'}(z_2) \rangle = \frac{N(p)}{|z_1 - z_2|^{2\Delta(p)}} (\lambda(p)\lambda(-p)\delta(p+p') + R(p)\lambda^2(p)\delta(p-p')).$$

Таким образом, преобразование перенормировки, которое связывает коэффициенты отражения $R_{ZZ}(p)$ и $R_{FV}(p)$,

$$R_{FV}(p) = \lambda^2(p)R_{ZZ}(p), \quad |\lambda(p)|^2 = \lambda(p)\lambda(-p) = 1,$$

не меняет общее выражение для двухточечной функции Грина (16), преобразуя лишь коэффициент отражения $R(p)$ из $R_{ZZ}(p)$ в $R_{FV}(p)$.

В заключение отметим, что коэффициенты отражения в двух подходах могут быть выражены при помощи гамма-функции Барнса

$$\Gamma_b(x) = \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\frac{e^{-tx} - e^{-tQ/2}}{(1 - e^{-tb})(1 - e^{-tb^{-1}})} - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{2} - x \right) e^{-t} - \left(\frac{Q}{2} - x \right) \frac{1}{t} \right] \right\}. \quad (18)$$

Функция $\Gamma_b(x)$ является решением системы функциональных уравнений

$$\frac{\Gamma_b(x+b)}{\Gamma_b(x)} = \frac{(2\pi)^{1/2} b^{xb-1/2}}{\Gamma(xb)}, \quad \frac{\Gamma_b(x+b^{-1})}{\Gamma_b(x)} = \frac{(2\pi)^{1/2} b^{-xb^{-1}+1/2}}{\Gamma(xb^{-1})}, \quad (19)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. При помощи формулы

$$\frac{\Gamma_b(z+Q)}{\Gamma_b(z)} = \frac{2\pi}{z} \frac{b^{z(b-b^{-1})}}{\Gamma(zb^{-1})\Gamma(zb)}, \quad (20)$$

являющейся непосредственным следствием соотношений (19), легко вывести следующее представление для коэффициента отражения (4) (с учетом (1)):

$$R_{ZZ}(\alpha) = [\mu b^{-2(b-b^{-1})}]^{Q-2\alpha} \frac{\Gamma_b(2\alpha-Q)\Gamma_b(2Q-2\alpha)}{\Gamma_b(2\alpha)\Gamma_b(Q-2\alpha)}. \quad (21)$$

Квантовый дилогарифм можно представить в виде отношения двух функций Барнса,

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma_b(Q/2 - ix)}{\Gamma_b(Q/2 + ix)}, \quad \gamma(2p - \omega'') = \frac{\Gamma_b(Q - 2\alpha)}{\Gamma_b(2\alpha)},$$

так что для коэффициента отражения (6) получаем

$$R_{FV}(\alpha) = e^{\pi i(Q-2\alpha)^2} \frac{\Gamma_b(2\alpha)\Gamma_b(2\alpha-Q)}{\Gamma_b(Q-2\alpha)\Gamma_b(2Q-2\alpha)}. \quad (22)$$

Выражения (21) и (22) сразу подсказывают выбор нормировки:

$$R_{FV}(\alpha) = \lambda^2(\alpha)R_{ZZ}(\alpha), \quad \lambda(\alpha) = [e^{\pi i(2\alpha-Q)}\mu b^{-2(b-b^{-1})}]^{\alpha-Q/2} \frac{\Gamma_b(2\alpha)}{\Gamma_b(2Q-2\alpha)}. \quad (23)$$

Список литературы

- [1] A.B. Zamolodchikov, A.I. Zamolodchikov, “Conformal bootstrap in Liouville field theory”, *Nucl. Phys. B*, **477**:2 (1996), 577–605; *Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory*, arXiv: hep-th/9506136.
- [2] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, “Liouville model on the lattice”, *Field Theory, Quantum Gravity and Strings* (Observatoire de Meudon, and LPTHE, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1984–1985), Lecture Notes in Physics, **246**, eds. H. J. de Vega, N. Sanchez, Springer, Berlin, 1986, 166–179.
- [3] J. Teschner, “Liouville theory revisited”, *Class. Quantum Grav.*, **18**:23 (2001), R153–R222, arXiv: hep-th/0104158.
- [4] L.D. Faddeev, A.Yu. Volkov, “Discrete evolution for the zero-modes of the quantum Liouville model”, *J. Phys. A*, **41**:19 (2008), 194008, 12 pp., arXiv: 0803.0230.
- [5] Л. Д. Фаддеев, “Нулевые моды для квантовой модели Лиувилля”, *Функци. анализ и его прил.*, **48**:3 (2014), 14–23, arXiv: 1404.1713.