Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Свешников, П. К. Силаев, Трехфазовая модель кирального кваркового мешка, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 2, 263–299

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf931>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:50:07

© 1998 г.

К. А. Свешников*, П. К. Силаев*

ТРЕХФАЗОВАЯ МОДЕЛЬ КИРАЛЬНОГО КВАРКОВОГО МЕШКА

Предложена трехфазовая модификация модели гибридного кирального кваркового мешка. Помимо фазы асимптотически свободных токовых кварков и полностью бесцветной мезонной фазы, модель содержит еще и промежуточную фазу, включающую массивные составляющие кварки. Для $(1 + 1)$ -мерного случая найдено самосогласованное решение уравнений модели с учетом вклада от «моря Дирака». В аналитической и численной форме подробно исследована зависимость характеристик мешка от параметров теории.

1. ВВЕДЕНИЕ

Область низких энергий в квантовой хромодинамике (КХД) характеризуется существенно нелинейным взаимодействием кварков и глюонов, когда стандартная пертурбативная теория возмущений не работает. Считается, что кварки находятся в фазе конфайнмента. Однако, в отличие от свойства асимптотической свободы кварков на малых расстояниях, которое доказано строго, конфайнмент кварков до сих пор рассматривается лишь как непротиворечивая гипотеза. В такой ситуации оказываются весьма полезными модельные представления о структуре адронов как о кварковых «мешках» [1]. Кварки при этом рассматриваются как релятивистские частицы со спином $1/2$, находящиеся в ограниченном объеме – мешке, размеры которого должны соответствовать характерному масштабу конфайнмента. Внутри мешка кварки можно считать свободными в соответствии со свойством асимптотической свободы, а их невылетание обеспечивается соответствующими граничными условиями [2, 3]. Такой подход позволяет обеспечить выполнение основного свойства адронной материи при низких энергиях – наличия конфайнмента и, следовательно, рассчитывать на успех при исследовании различных характеристик адронов и процессов с их участием в низкоэнергетической области.

Наилучшие результаты среди различных вариантов моделей кварковых мешков получены для так называемых гибридных моделей [4, 5], объединивших в себе положительные качества MIT-модели мешка [2] и скирмионной модели барионов [6–8]. Такое объединение обеспечивает последовательный учет как киральной симметрии – одной из наиболее существенных симметрий для сильных взаимодействий при низких энергиях,

*Физический факультет и Институт теоретических проблем микромира Московского государственного университета, Москва, Россия

так и механизмов ее спонтанного нарушения, что полностью отсутствовало в исходной модели MIT. Кварковый мешок при этом рассматривается как дефект в киральной сигма-модельной полевой конфигурации, которая описывает облако виртуальных голдстоуновских мезонов вокруг адрона. В качестве такой конфигурации можно, в частности, рассматривать “ежовую” π -мезонную конфигурацию типа скирмиона или более сложную, содержащую поля векторных ρ - и ω -мезонов. Типичная лагранжева плотность, описывающая подобный гибридный мешок для нестранных барионов, без учета векторных мезонов имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{НСВ}} = & (\bar{\psi} i \hat{\partial} \psi - B) \theta_V - \frac{1}{2} \bar{\psi} \exp\left(\frac{i \vec{\tau} \vec{\phi} \gamma_5}{f_\pi}\right) \psi \delta_V + \\ & + \left(-\left(\frac{f_\pi^2}{4}\right) \text{tr}[U^{-1} \partial_\mu U U^{-1} \partial^\mu U] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{32e^2}\right) \text{tr}[U^{-1} \partial_\mu U, U^{-1} \partial^\mu U]^2\right) \theta_{\bar{V}}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где θ_V , $\theta_{\bar{V}}$ обозначают внутреннюю и внешнюю части мешка, δ_V задает его границу, ψ описывает изодублет легких кварков, а $\vec{\phi}$ – изотриплет пионов. Несмотря на относительную простоту лагранжиана (1.1), на основе таких гибридных моделей удастся воспроизвести, хотя и с относительно большой погрешностью в численных значениях, статические характеристики нуклонов типа масс и магнитных моментов и качественно восстановить основные параметры их взаимодействия [5].

В то же время гибридные модели вида (1.1) имеют ряд принципиальных недостатков, которые требуют серьезной коррекции всего формализма. Первый из них состоит в проблеме выбора граничных условий и определения размеров мешка (его радиуса R). Расчеты, проведенные на основе лагранжиана (1.1), показывают, что в ряде случаев наблюдаемые характеристики такого мешка зависят от R достаточно слабо либо не зависят вообще. В частности, такая топологическая характеристика мешка, как его барионный заряд, не будет зависеть от R , если его определить как сумму топологического заряда скирмиона во внешней области и поляризации кваркового моря, вычисляемой через η -инвариант [9]. Такой результат интерпретируется как наличие сильной корреляции между поведением кварковых полей внутри мешка и мезонов во внешней области за счет кирального $\pi q q$ -взаимодействия на его поверхности. Это дало основание предположить [10], что при доминирующей роли такой корреляции все физические характеристики мешка должны были бы полностью не зависеть от R . В этом случае мешок можно рассматривать не как физическую реальность, а лишь как некоторый способ разбиения пространства на “внутреннюю” и “внешнюю” части, что и составляет суть “принципа Чеширского Кота” (ПЧК): мешка, по сути дела, нет, но можно пользоваться соответствующим формализмом [4, 10].

Однако реализация ПЧК основана на бозонизации фермионов, которая на данный момент является хорошо разработанной процедурой только в $(1+1)$ -измерениях [11]. При большем числе пространственных измерений ситуация становится значительно сложнее из-за наличия спина. Имеются лишь отдельные результаты [12] для массивной модели Тирринга. В общем случае открытой является сама постановка задачи, не говоря уже о явном ее решении. Об этом свидетельствует и то, что при учете следую-

щих порядков квазиклассического разложения зависимость от R появляется и в модели (1.1) [5, 13].

Основная проблема, однако, состоит в том, что вся феноменология сильных взаимодействий при низких энергиях показывает, что у конфайнмента должен быть характерный масштаб порядка 0.5 фм. Поэтому даже если бы точная бозонизация в $(3 + 1)$ -мерном случае была возможна, для реальных адронов ПЧК должен быть весьма сильно нарушенным, так чтобы существовало оптимальное значение размера мешка порядка масштаба конфайнмента. Как следствие возникает принципиальный вопрос о выборе граничных условий для полей на поверхности между фазами. Суть проблемы состоит в том, что в гибридных моделях, основанных на ПЧК, граничные условия на поверхности мешка уже с самого начала были однозначно фиксированы уравнениями бозонизации [10]. Однако если исходить не из ПЧК, как того требует феноменология, то в определении граничных условий на поля возникает существенный произвол, который не фиксируется условием лоренц- и киральной симметрий, требованием перенормируемости и т.д., а должен устраняться из дополнительных физических соображений.

Другая фундаментальная проблема, перед которой мы тут же окажемся, если не будем предполагать справедливость ПЧК для гибридных моделей, – это нарушение пространственно-временной симметрии теории из-за наличия в лагранжиане (1.1) явных функций координат θ_V , $\theta_{\overline{V}}$ и δ_V , выделяющих внутреннюю и внешнюю части мешка и границу между ними. Подчеркнем, что речь идет не о спонтанном нарушении симметрии при неинвариантности основного состояния, а о явном нарушении за счет наличия явных функций координат в исходном лагранжиане. Если бы имела место точная бозонизация, то ковариантность теории обеспечивалась бы автоматически в силу эквивалентности обеих фаз, в том числе и совпадения плотностей тензоров энергии-импульса во всех точках пространства-времени (что и составляет суть ПЧК). Однако по указанным выше причинам такая ситуация вряд ли имеет место в реальности. Между тем требование явной лоренц-ковариантности является обязательным для расчетов наблюдаемых динамических характеристик адрона как локализованного частицеподобного кластера: только явно ковариантные результаты могут иметь однозначную физическую интерпретацию. Это особенно важно, когда по параметрам такой модели извлекается информация о структуре кварковых и глюонных вакуумных конденсатов КХД $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, $\langle F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \rangle$, которые являются ковариантными величинами как характеристики самой КХД. Кроме того, существенно-релятивистский и непертурбативный (с учетом вклада аксиальной аномалии) подход необходим для решения проблемы распределения спина между составляющими нуклона (так называемый “спиновый кризис”) [14].

Следующим деликатным местом в модели (1.1) является то обстоятельство, что связь между полями внутри и вне мешка осуществляется в ней через нефизическую бесконечно тонкую граничную поверхность. Это не играет никакой роли для моделей, в которых выполняется ПЧК, поскольку в таких моделях эта же связь между полями в виде соотношений бозонизации имеет место во всех точках пространства-времени, а мешка, по существу, нет. Однако если кварковый мешок – это реальный объект, то из достаточно очевидных физических соображений его граница должна иметь конечную протяженность, что косвенно подтверждается, в частности, значительным разбросом в значениях различных среднеквадратичных радиусов для одного и того же адрона. Кроме того, если

фазы внутри и вне мешка не являются эквивалентными (в смысле бозонизации) теориями, то корреляция между ними может достигаться только за счет имеющего реальный статус взаимодействия в промежуточной области ненулевой радиальной протяженности, которая оказывается тем самым естественным кандидатом на роль условной “размытой” границы такого мешка.

Наличие такой промежуточной “пограничной” фазы является предпочтительным еще и по той причине, что она до некоторой степени оказывается фазой составляющих кварков, тогда как в модели (1.1) с бесконечно тонкой границей для составляющих кварков просто нет места. Между тем концепция составляющих кварков весьма удовлетворительно зарекомендовала себя в спектроскопии адронов [15]. Поэтому и с этой точки зрения модель (1.1) нуждается в явной модификации. Действительно, физически гораздо более приемлемым вариантом мешка была бы конфигурация, в которой на предельно малых расстояниях, соответствующих большим Q^2 , имелись бы квазисвободные и (почти) безмассовые голые токовые кварки, которые при переходе к большим расстояниям трансмутировались бы сначала в одетые за счет взаимодействия массивные составляющие кварки, обладающие теми же квантовыми числами цвета, флейвора и спина, а только потом возникала бы чисто бесцветная мезонная фаза. Первым приближением к такому варианту мешка является трехфазовая гибридная модель с промежуточной фазой вместо границы нулевой радиальной протяженности.

В этой работе мы, не претендуя на описание реалистической ситуации, рассмотрим основные принципы построения такой трехфазовой модификации кирального мешка, которая в определенной степени оказывается свободной от упомянутых выше трудностей.

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, КОВАРИАНТНОСТЬ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ФАЗА В ГИБРИДНЫХ МОДЕЛЯХ

Отождествление граничных условий с поверхностными членами в лагранжиане, что является краеугольным камнем в “моделях Чепирского Кота” (МЧК) типа (1.1), на самом деле не вполне корректно. Такие поверхностные члены означают лишь появление соответствующих δ -образных источников в полевых уравнениях движения, которые могут приводить к разрывам в производных или даже в самих функциях (что вполне допустимо при разбиении пространства на части), но никак не к граничным условиям на поля.

Проиллюстрируем это на следующем примере, ограничившись для простоты скалярным полем в одном измерении. Пусть действие поля имеет вид (здесь и далее производная по аргументу обозначается штрихом $\varphi' \equiv \partial_x \varphi$)

$$A = \int_{-\infty}^{x_0} dx \left[\frac{1}{2} \varphi'^2 + V(\varphi) \right] + F(\varphi(x_0)), \quad (2.1)$$

где внеинтегральный член $F(\varphi(x_0))$ играет роль поверхностного действия в точке x_0 . Из (2.1) с помощью стандартной вариационной процедуры получаем уравнение движения

$$-\varphi'' + V'(\varphi) + [\varphi'(x_0 - 0) + F'(\varphi(x_0))] \delta(x - x_0) = 0. \quad (2.2)$$

Левая производная $\varphi'(x_0 - 0)$ появляется от поверхностного члена, возникающего при вариации интеграла $\int_{-\infty}^{x_0}$, в который входят только поля с аргументами из интервала $(-\infty, x_0)$.

В традиционном подходе, принятом в моделях мешков, в уравнении (2.2) разные слагаемые имеют различный статус: первые два дают собственно уравнение движения поля, а коэффициент при δ -функции становится граничным условием для этого уравнения. Это, однако, отнюдь не есть общее решение для уравнения (2.2). Действительно, если рассматривать его на всей оси, а не только на интервале $(-\infty, x_0)$, то получаем хорошо известное в математической физике уравнение с δ -образным источником, где роль последнего сводится к появлению разрыва у производной $\varphi'(x)$ в точке x_0 , именно

$$\varphi'(x_0 + 0) = 2\varphi'(x_0 - 0) + F'(\varphi(x_0)). \quad (2.3)$$

Если теперь потребовать дополнительно, чтобы $\varphi'(x)$ было непрерывно при $x = x_0$, т.е. $\varphi'(x_0 - 0) = \varphi'(x_0 + 0)$, то из последнего уравнения получим

$$\varphi'(x_0) + F'(\varphi(x_0)) = 0, \quad (2.4)$$

что действительно имеет смысл граничного условия в точке x_0 , но только на классе непрерывных с производной функций $\varphi(x)$. Однако по физическому смыслу на границе мешка как на границе между различными фазами поля вполне могут быть разрывы. Поэтому ограничение только непрерывными с производными полями в данном случае нанесло бы ущерб физическому содержанию теории. Поля же со скачком производной в точке x_0 являются решениями уравнения (2.2), у которых значения $\varphi(x_0)$ и $\varphi'(x_0 - 0)$ произвольны, поскольку роль “граничного условия” в точке x_0 теперь играет соотношение (2.3), в которое входит и правая производная $\varphi'(x_0 + 0)$.

Чтобы установить еще более близкую аналогию с гибридными моделями, рассмотрим “двухфазовую” систему с действием

$$A = \int_{-\infty}^{x_0} dx \left[\frac{1}{2} \varphi'^2 + V(\varphi) \right] + \int_{x_0}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \chi'^2 + W(\chi) \right] + \varphi'(x_0 - 0) [\chi(x_0) - \varphi(x_0)]. \quad (2.5)$$

Поверхностный член в действии (2.5) выбран в точной аналогии с работами [10]. При этом левая производная $\varphi'(x_0 - 0)$ снова означает, что изначально поле $\varphi(x)$ определено слева от x_0 , а производная поля в точке x_0 может иметь разрыв. Кроме того, дополнительно предполагается, что поля $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ непрерывны в точке x_0 , так что множитель $(\chi - \varphi)(x_0)$ в поверхностном члене в (2.5) определен однозначно. Теперь варьируем A и будем искать решения уравнений движения на классе полей, для которых $\chi(x_0) = \varphi(x_0)$, так чтобы сразу избавиться от членов с $\delta'(x - x_0)$. Уравнения Лагранжа–Эйлера принимают вид

$$\begin{aligned} -\varphi'' + V'(\varphi) + [\varphi'(x_0 - 0) - \chi'(x_0 - 0)]\delta(x - x_0) &= 0, \\ -\chi'' + W'(\chi) + [\varphi'(x_0 - 0) - \chi'(x_0 + 0)]\delta(x - x_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Опять, продолжая уравнения (2.6) за точку x_0 , получим уравнения для скачка производных в виде

$$2\varphi'(x_0 - 0) = \chi'(x_0 - 0) + \varphi'(x_0 + 0), \quad 2\chi'(x_0 + 0) = \chi'(x_0 - 0) + \varphi'(x_0 - 0). \quad (2.7)$$

Если предположить, что хотя бы одно из полей непрерывно в точке x_0 с производной, например $\varphi'(x_0 - 0) = \varphi'(x_0 + 0) = \varphi'(x_0)$, то из (2.7) сразу получаем, что и другое поле непрерывно в этой точке с производной: $\chi'(x_0 - 0) = \chi'(x_0 + 0) = \chi'(x_0)$, при этом

$$\varphi'(x_0) = \chi'(x_0). \quad (2.8)$$

В совокупности с принятым нами дополнительным условием $\chi(x_0) = \varphi(x_0)$ условие (2.8) есть в точности утверждение работ [10] и действительно может рассматриваться как граничное условие, но только на классе непрерывных с производной полей, когда оно просто обращает в нуль коэффициенты при δ -функциях в уравнениях (2.6). Однако если отказаться от условия непрерывности производных, что является более естественным для поведения полей на границе между фазами, то вместо (2.8) мы получаем гораздо более слабые соотношения (2.7), которые лишь связывают между собой левые и правые производные полей. При этом $\varphi'(x_0 - 0)$, $\varphi(x_0)$ и $\chi'(x_0 + 0)$, $\chi(x_0)$ оказываются независимыми начальными данными для уравнений $-\varphi'' + V'(\varphi) = 0$ слева от точки x_0 и $-\chi'' + W'(\chi) = 0$ справа от точки x_0 , соответственно.

Окончательный вывод состоит в том, что граничные условия типа (2.4) или (2.8) не являются обязательным следствием наличия локальных поверхностных членов в действии системы, а возникают лишь при дополнительных условиях непрерывности производной, накладываемых на решения в точке x_0 . Эти условия, однако, в моделях мешков могут и не выполняться, т.к. на границе между различными фазами вполне допустимы разрывы. Как уже говорилось выше, с математической точки зрения ситуация вообще достаточно проста, т.к. локальному поверхностному члену в действии соответствует δ -образный источник в уравнениях движения, который может приводить к скачку в производной, но не к граничным условиям, для этого он, образно говоря, слишком слаб. Граничные условия в задачах математической физики всегда имеют “рукотворное происхождение” в том смысле, что для их появления нужны гораздо более сильные воздействия на систему, например наличие бесконечно высоких барьеров конечной протяженности.

Теперь перейдем к проблеме нарушения ковариантности в гибридных моделях. В МЧК, построенных на основе точных уравнений бозонизации, граница между фазами есть не более чем условность, т.к. точная эквивалентность фаз имеет место во всех точках пространства-времени. Лоренц-ковариантность теории, в частности наличие всех необходимых интегралов движения, обеспечивается при этом равенством плотностей тензоров энергии-импульса и момента фаз во всех точках. Однако вне рамок таких моделей, что, по-видимому, более оправдано с точки зрения феноменологии, граница между фазами перестает быть условностью и становится фактически реальным внешним полем, явно зависящим от координат, на фоне которого эволюционируют квантовые поля. Интересно отметить, что до некоторой степени это обстоятельство имеет место и в МЧК. В частности, в работах [10] был построен сохраняющийся оператор полного импульса, который транслирует поля, но оставляет границу на месте. В результате при пересечении границы фермионы становятся бозонами и наоборот. Это замечательно демонстрирует суть бозонизации, но одновременно лишает мешок его физической сущности в качестве модели протяженной частицы (адрона), способной двигаться как единое целое вместе со всем своим содержимым с произвольной скоростью. В МЧК это обстоятельство оказывается в значительной степени завуалированным упоминавшимся ранее

свойством точной бозонизации: плотность тензоров энергии-импульса для обеих фаз совпадает, и при сдвиге полей относительно границы с наблюдаемыми величинами ничего не происходит. Однако если точной эквивалентности фаз нет, то при наличии границы между ними пространственно-временная симметрия оказывается явно нарушенной.

В модели мешков MIT [2] эта проблема решалась путем снабжения граничной поверхности мешка своими собственными динамическими степенями свободы. Однако такая теория оказывается изначально существенно нелокальной. Чтобы избежать этого недостатка, мы будем использовать метод работ [3, 16], когда мешок реализуется в рамках локальной полевой теории, в которой, помимо кварков и глюонов внутри мешка и мезонов во внешней области, имеется еще и вспомогательное поле (или поля) $\theta(x)$. Роль этого поля (или полей) состоит в том, что оно обладает солитонным решением типа доменной стенки, которое интерполирует между своими вакуумными значениями в очень узкой (в пределе бесконечно узкой) области пространства. Области, где это решение принимает различные вакуумные значения, сопоставляются различным фазам состояния материальных полей, а промежуточная область соответствует границе между фазами. Чтобы понять, как работает такой механизм, рассмотрим модельный пример, когда имеется одно материальное поле $\varphi(x)$, две различные фазы которого включаются-выключаются с помощью поля $\theta(x)$. Лагранжиан такой системы имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \theta V(\varphi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta)^2 - W(\theta). \quad (2.9)$$

Сразу заметим, что поле θ включает-выключает только самодействие поля φ , а не всю лагранжеву плотность

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi).$$

Это сделано для того, чтобы избежать неприятностей с квантованием. Для лагранжиана (2.9) канонический импульс поля φ стандартным образом связан с производной, $\pi = \partial_t \varphi$, тогда как при связи $\theta \mathcal{L}(\varphi)$ мы имели бы $\pi = \theta \partial_t \varphi$, что неизбежно привело бы к проблемам при квантовании, когда θ обращается в нуль. Более того, как мы увидим далее, такого включения-выключения взаимодействия оказывается вполне достаточно, чтобы реализовать всю необходимую атрибутику гибридного мешка.

Собственно механизм включения-выключения фаз поля φ работает следующим образом. Рассмотрим уравнения движения для полей, следующие из лагранжиана (2.9):

$$\square \varphi + \theta V'(\varphi) = 0, \quad (2.10a)$$

$$\square \theta + W'(\theta) + V(\varphi) = 0. \quad (2.10b)$$

Поскольку в системе центра масс мешка пространственная картина распределения фаз предполагается, по крайней мере в первом приближении, стационарной, то нам достаточно ограничиться стационарными полями $\theta(x)$. Предположим теперь, что самодействие θ -поля характеризуется большой константой связи

$$W(\theta) = g^2 \widetilde{W}(\theta), \quad (2.11)$$

где $g \gg 1$ (фактически мы будем полагать $g \rightarrow \infty$). Тогда в первом приближении мы можем опустить член с $V(\varphi)$ в уравнении (2.10б). Допустим далее, что функция $\widetilde{W}(\theta)$ такова, что у уравнения

$$-\Delta f + \widetilde{W}'(f) = 0 \quad (2.12)$$

имеются стационарные решения типа доменных стенок $f(x - x_0)$ (в одномерном случае) или оболочек $f(r - r_0)$ (в многомерном), интерполирующие между различными вакуумными значениями потенциала $\widetilde{W}(\theta)$.

В результате уравнение (2.10б) будет иметь стационарные решения вида

$$\theta(x) = f[g(x - x_0)], \quad (2.13)$$

описывающие очень узкие солитоны размером $O(1/g)$, почти скачкообразно меняющие свое значение при переходе через точку x_0 (или поверхность $r = r_0$ в многомерном случае). При этом в уравнении (2.10а) самодействие поля $\varphi(x)$ также будет скачкообразно меняться при переходе через точку x_0 , что и означает появление в теории двух различных фаз состояния материальных полей с размером промежуточной области порядка $O(1/g)$. Очевидно, что, подбирая самодействие $\widetilde{W}(\theta)$ соответствующим образом, мы можем получать конфигурации с произвольным числом фаз, границы между которыми будут расположены в заданных точках пространства. При этом исходная модель описывается локальной лоренц-ковариантной лагранжевой плотностью (2.9). Поэтому нарушение симметрии при возникновении границ между фазами здесь является не привнесенным извне, а спонтанным, обусловленным наличием классических решений у θ -поля. Такое нарушение симметрии может быть без дополнительных принципиальных проблем восстановлено с помощью метода коллективных групповых переменных.

Более того, в реалистическом случае $(3 + 1)$ -мерного пространства-времени такие границы между фазами обладают еще и тем свойством, что не несут никакой энергии, поскольку энергия решений типа (2.13) будет величиной порядка $O(1/g)$. Интересно отметить, что здесь в положительном смысле проявляется известный эффект неустойчивости скалярных солитонов в $(3 + 1)$ -мерном случае [17]. Как известно, скалярные солитоны в $(3 + 1)$ -мерном случае коллапсируют в решения с нулевыми размерами и энергией. Однако именно такие конфигурации и являются оптимальными для описания границ между фазами. Следует отметить, что на самом деле мы не будем иметь проблем с энергией также и в случаях $(1 + 1)$ и $(2 + 1)$, поскольку энергия мешка будет всегда определяться как разность двух различных конфигураций с одним и тем же числом по-разному расположенных фаз и энергия стенок всегда будет выпадать из окончательного ответа.

Изложенный способ введения границы между фазами является, по существу, вариацией на тему модели мешка SLAC [3] для случая бесконечно тонкой оболочки. Как и в модели SLAC, возбуждения θ -поля подавлены за счет (бесконечно) большой массы элементарного кванта $m_\theta^2 = g^2 \widetilde{W}''(\theta_{\text{vac}})$, поэтому мы имеем право учитывать только классические стационарные решения θ -поля, которые вводят границы между различными фазами. Естественно, можно было бы попытаться перейти на следующий “уровень разрешения” и рассмотреть более продвинутую модель, когда граница имеет конечный размер и играет роль явный вид профиля θ -поля в промежуточной области. Мы, однако, предпочтем этого не делать по следующим причинам: рассматривается эффективная теория, которая, как предполагается, качественно воспроизводит свойства КХД

при низких энергиях, при этом образование различных фаз и границ между ними в адронах есть в конечном счете свойство КХД. Однако если о внутренней динамике фаз асимптотической свободы и полной адронизации хотя бы в первом приближении имеется какое-то представление и есть основания полагать, что в промежуточной фазе наиболее существенными степенями свободы могут быть составляющие кварки, то про область границ между фазами этого сказать нельзя. Поэтому на данный момент лучше всего считать границы между фазами бесконечно тонкими. Вся роль θ -поля в этом случае сводится к ненарушающему ковариантности за счет локальности исходной теории способу введения таких границ.

Умея таким образом делить пространство на части с различными взаимодействиями без нарушения ковариантности, мы имеем возможность внести необходимые коррективы в модель гибридного мешка, чтобы избавиться от проблем, о которых говорилось выше. Основным новым моментом по сравнению со стандартной двухфазовой моделью будет появление дополнительной промежуточной фазы, которая в определенной степени отвечает интуитивным представлениям о том, что при переходе от предельно малых к большим расстояниям (почти) безмассовые токовые кварки сначала должны трансмутировать в одетые за счет взаимодействия массивные составляющие кварки, обладающие теми же квантовыми числами цвета, флейвора и спина, а только потом возникает полностью бесцветная мезонная фаза. Наличие такой промежуточной фазы является предпочтительным еще и потому, что связь между полями внутри и вне мешка в этом случае осуществляется не через нефизическую граничную поверхность нулевой радиальной протяженности, которая никаких граничных условий на поля создать не может, а через реальную переходную область конечного радиального размера. Лагранжиан, соответствующий такой переходной области, естественно подбирать с помощью минимального расширения кирально-инвариантного поверхностного члена в (1.1) путем добавления к нему соответствующих кинетических членов. В простейшем $SU(2)$ -случае такое расширение имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{transition region}} = \bar{\psi} \left[i\hat{\partial} - M \exp \left(\frac{i\vec{\tau}\vec{\phi}\gamma_5}{f_\pi} \right) \right] \psi + \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger], \quad (2.14)$$

где M – массовая матрица составляющих кварков.

Лагранжиан промежуточной фазы (2.14), по существу, является главной составной частью лагранжианов, используемых в различных киральных кварк-солитонных моделях, основанных либо на различных вариантах σ -моделей [18–20], либо на бозонизации NJL [21]. Есть, однако, и принципиальная разница, заключающаяся в том, что в этих работах предполагается, что лагранжиан (2.14) сам по себе способен динамическим образом воспроизводить конфигурацию кваркового мешка во всем пространстве. Для этого ищется самосогласованное решение уравнений движения в приближении среднего поля, которое сопровождается появлением значительных технических сложностей и принципиальных проблем, в частности отсутствием полного конфайнмента. В нашем же случае лагранжиан (2.14) имеет место только в замкнутой области $R_1 \leq r \leq R_2$, а фермионы раз и навсегда запираются в мешке радиуса R_2 соответствующими граничными условиями. При этом, как мы увидим, в $(1+1)$ -мерном случае для полей в промежуточной

области удастся найти относительно простое и физически содержательное решение самосогласованных уравнений движения, которое вполне разумным образом интерполирует между областями асимптотической свободы и полностью бесцветной фазы.

Таким образом, полный лагранжиан такого модифицированного гибридного мешка будет состоять из фазы асимптотической свободы (первое слагаемое в (1.1) с (или без) вакуумного давления B) на расстояниях $0 < r < R_1$, лагранжиана (2.14) для промежуточной фазы составляющих кварков на расстояниях $R_1 \leq r \leq R_2$ и из чисто мезонного лагранжиана в области $r > R_2$. Подчеркнем, что мы не предполагаем вводить никаких поверхностных членов, их роль теперь играет промежуточная фаза (2.14). Граничные условия для кварков при переходе в бесцветную фазу возникают при этом из естественного условия наличия в этой фазе у кварков бесконечно большой массы [22], а граничные условия для мезонных полей являются стандартными условиями сшивки решений дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными потенциалами. Разбиение пространства на части, соответствующие различным фазам, будет производиться по изложенному выше методу вспомогательных θ -полей, обеспечивающих появление соответствующих доменных стенок в качестве границ между фазами. Исходная теория при этом является локальной. Поэтому сохранение явной лоренц-ковариантности после выделения соответствующих классических решений для θ -полей может быть проведено вполне последовательным образом с помощью соответствующих групповых переменных.

3. (1 + 1)-МЕРНАЯ МОДЕЛЬ КИРАЛЬНОГО МЕШКА С ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ФАЗОЙ

Мы будем рассматривать простейшую (1 + 1)-мерную однофлейворную модель мешка, описываемую лагранжианом в виде суммы трех аддитивных вкладов от различных фаз. Деление пространства на области происходит описанным выше образом с помощью вспомогательных θ -полей, которые включают и исключают соответствующие члены взаимодействия для материальных полей. Благодаря этому последнему обстоятельству сохраняется нормальная структура кинетических (градиентных) слагаемых в полном лагранжиане и тем самым не возникает сложностей при последующем квантовании. Лагранжева плотность имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \theta(|x| < x_1) \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 - \theta(x_1 \leq |x| \leq x_2) \left(\frac{M}{2} [\bar{\psi}, e^{ig\gamma_5 \varphi} \psi]_- \right) - \\ & - \theta(|x| > x_2) \left(\frac{M_0}{2} [\bar{\psi}, e^{ig\gamma_5 \varphi} \psi]_- + V(\varphi) \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где мы считаем, что уже сработал описанный выше механизм, по которому θ -поля превращаются в соответствующие классические решения (2.13) в виде θ -функций, (почти) прямоугольным образом вырезающих в пространстве области различных фаз мешка. Коммутатор по фермионным полям в выражениях, задающих киральную связь между фермионами и бозонами, обеспечивает зарядовую симметрию модели.

Таким образом, первоначально мы имеем теорию двух полей – спинорного ψ и бозонного φ . В области $I: \{|x| < x_1\}$ бозоны имеют массу m_0 . В области II :

$\{x_1 \leq |x| \leq x_2\}$ поле φ безмассовое и кирально-инвариантным образом взаимодействует с фермионами, в результате чего фермионы приобретают эффективную массу M . В области III : $\{|x| > x_2\}$ эффективная масса фермионов становится равной M_0 и включается самодействие поля φ , приводящее к солитонному решению для бозонного поля в этой области. Для рассматриваемой модели в области I отсутствует член с вакуумным давлением B . Вакуумное давление оказывается излишним, поскольку, как мы увидим, из-за наличия промежуточной области в этой модели поляризация “дираковского моря” ведет себя весьма специфическим образом и уже сама по себе обеспечивает “внутреннее давление”. Чтобы сформировать мешок, мы далее полагаем массы m_0 и M_0 очень большими. Тогда при $m_0 \rightarrow \infty$ для конечности энергии системы поле φ в области I должно обращаться в нуль, равно как и при $M_0 \rightarrow \infty$ в области III должно исчезать дираковское поле ψ .

Такая модель с очевидностью содержит двухфазовый киральный мешок с локальной связью между полями как предельный случай бесконечно узкой промежуточной области II , когда $x_1 \rightarrow x_2$, $M \rightarrow \infty$ так, чтобы произведение $M|x_2 - x_1| = \text{const}$. Тогда вклад от промежуточной области в полную лагранжеву плотность (3.1) становится δ -образным и в точности воспроизводит локальный кирально-инвариантный поверхностный член в полном действии, который закладывается в основу описания в стандартных гибридных моделях типа (1.1).

Рассмотрим теперь поведение полей более подробно. Начнем с бозонов. Как принято в гибридных моделях такого типа, бозонное поле рассматривается в приближении среднего поля, т.е. является c -числовым. Игнорируя на время явно лоренц-ковариантное описание, будем рассматривать систему центра масс мешка. Тогда $\varphi(x)$ будет стационарным классическим полем, на фоне которого эволюционируют фермионы. В области I это поле равно нулю, а в области III оно расщеплено с фермионами из-за бесконечной эффективной массы последних и формируется исключительно за счет самодействия $V(\varphi)$. Поскольку нас интересует топологически нетривиальная конфигурация мешка и $\varphi(x) = 0$ в области I , будем считать, что самодействие $V(\varphi)$ допускает нечетные топологические решения, а поле $\varphi(x)$ тем самым является нечетной функцией.

В области II поле $\varphi(x)$ определяется из самосогласованных уравнений теории

$$(i\hat{\partial} - M e^{ig\gamma_5\varphi})\psi = 0, \quad (3.2)$$

$$\varphi'' = ig \frac{M}{2} \langle [\bar{\psi}, \gamma_5 e^{ig\gamma_5\varphi} \psi]_- \rangle, \quad (3.3)$$

при этом в правой части уравнения (3.3) предполагается усреднение билинейной фермионной формы по заполненному “дираковскому морю” и валентным состояниям (если таковые имеются).

Граничные условия для поля $\varphi(x)$ в этой области возникают из очевидных физических требований непрерывности и гладкости поля φ . В частности, наличие бесконечной массы в области I , как и в нерелятивистском уравнении Шредингера, дает граничное условие

$$\varphi(\pm x_1) = 0, \quad (3.4)$$

означающее отсутствие разрыва в профиле $\varphi(x)$ на границе между областями I и II , которое также есть следствие требования конечности энергии мешка. Аналогичным

образом при $x = \pm x_2$ решение $\varphi(x)$ из промежуточной области гладко (по функции и первой производной) сшивается с солитонным решением уравнения

$$-\varphi'' + V'(\varphi) = 0 \quad (3.5)$$

из области *III*. При этом условие непрерывности производной $\varphi(x)$ на границе между областями *II* и *III* является прямым следствием конечности скачка в $\varphi''(\pm x_2)$ при переходе от (3.3) к (3.5).

Следует, однако, отметить, что в релятивистской квантовой теории поля (КТП) ситуация с конечными разрывами вообще не столь однозначна, как кажется, т.к. расходимость энергии на разрыве обусловлена высокочастотной частью спектра, которая может быть устранена специальной ультрафиолетовой перенормировкой [23]. Если опустить вопрос о том, насколько обоснована такая процедура, то после регуляризации энергии разрыва становится величиной квантового порядка малости и решения с конечными разрывами приобретают такой же статус, как и гладкие. Поэтому, хотя мы не будем здесь детально рассматривать такую возможность, в принципе можно допустить и наличие ненулевого значения $\varphi(\pm x_1)$, равно как скачка $\varphi(x)$ в точках $\pm x_2$. Мы еще раз коснемся этого вопроса в разделе 6.

Теперь рассмотрим фермионы. Сначала, чтобы несколько упростить формулы, изменим масштаб бозонного поля $\varphi \rightarrow \varphi/g$ так, чтобы убрать константу связи g из взаимодействия между полями. В результате стационарные уровни фермионов определяются из уравнения Дирака следующего вида (α, β – матрицы Дирака):

$$\omega\psi_\omega = -i\alpha\psi'_\omega + \beta e^{i\gamma_5\varphi} [M\theta(x_1 \leq |x| \leq x_2) + M_0\theta(|x| > x_2)]\psi_\omega. \quad (3.6)$$

Условие $M_0 \rightarrow \infty$ означает, что $\psi_\omega = 0$ при $|x| > x_2$, а при $|x| = x_2$ должны выполняться следующие граничные условия [22]:

$$\pm i\gamma^1\psi_\omega(\pm x_2) + e^{i\gamma_5\varphi(\pm x_2)}\psi_\omega(\pm x_2) = 0. \quad (3.7)$$

Отметим, что эти граничные условия суть не что иное, как стандартные киральные граничные условия для гибридных моделей. Однако здесь они возникают не из локального поверхностного действия, что, как мы уже видели, на самом деле не вполне корректно, а как естественное следствие бесконечной массы фермионов в области *III*.

Уравнения (3.7) являются граничными условиями для решений уравнения Дирака (3.6) на объединении областей *I* + *II*. В области *I* это уравнение является уравнением свободных безмассовых фермионов

$$\omega\psi_I = -i\alpha\psi'_I, \quad (3.8)$$

а в области промежуточной фазы *II* имеем

$$\omega\psi_{II} = -i\alpha\psi'_{II} + \beta M e^{i\gamma_5\varphi}\psi_{II}. \quad (3.9)$$

На границе между областями *I* и *II* волновые функции ψ_I и ψ_{II} сшиваются по непрерывности

$$\psi_I(\pm x_1) = \psi_{II}(\pm x_1), \quad (3.10)$$

а при $|x| = x_2$ удовлетворяют граничным условиям (3.7). При этом в уравнении (3.9) поле φ не произвольно, а самосогласованным образом определяется из уравнения (3.3) с соответствующими граничными условиями.

Существенной особенностью данной конструкции мешка является то, что у самосогласованных уравнений (3.2), (3.3) в замкнутой промежуточной области II конечного размера $d = x_2 - x_1$ существует простое и физически содержательное решение, которое было бы неприемлемо, если бы эти уравнения рассматривались в неограниченном пространстве. Чтобы прийти к такому решению наиболее последовательным образом, сделаем сначала киральный поворот Скирма

$$\psi = e^{-i\gamma_5 \varphi/2} \chi. \quad (3.11)$$

Тогда в области II для спиноров χ_ω получим следующее уравнение:

$$\left(\omega - \frac{\varphi'}{2}\right) \chi_\omega = -i\alpha \chi'_\omega + \beta M \chi_\omega, \quad (3.12)$$

и одновременно φ выпадает из граничных условий при $x = \pm x_2$:

$$\pm i\gamma^1 \chi_\omega(\pm x_2) + \chi_\omega(\pm x_2) = 0. \quad (3.13)$$

Из (3.12) и (3.13) очевидно, что если мы постулируем линейное поведение поля $\varphi(x)$ в области II , а именно

$$\varphi' = \text{const} = 2\lambda, \quad (3.14)$$

то уравнение (3.12) станет уравнением свободных массивных фермионов

$$\nu \chi = -i\alpha \chi' + \beta M \chi \quad (3.15)$$

с собственными значениями $\nu = \omega - \lambda$. Таким образом, как и предполагалось изначально, безмассовые в области I фермионы в области II за счет взаимодействия с полем φ приобретают массу M и тем самым возникает промежуточная фаза, описывающая массивные квазисвободные “составляющие кварки”.

Наиболее важным в данный момент свойством уравнения (3.15) является то, что оно обладает очевидной знаковой симметрией $\nu \rightarrow -\nu$, которой соответствуют унитарные преобразования

$$\chi \rightarrow \tilde{\chi} = i\gamma_1 \chi, \quad (3.16)$$

при этом плотность аксиального тока

$$j_5 = i\bar{\psi}\gamma_5 e^{i\gamma_5 \varphi} \psi = i\chi^+ \gamma_1 \chi \quad (3.17)$$

для знакосимметричных состояний не меняется:

$$j_5 = i\chi^+ \gamma_1 \chi = i\tilde{\chi}^+ \gamma_1 \tilde{\chi} = \tilde{j}_5. \quad (3.18)$$

В общем случае, однако, из знаковой симметрии $\nu \leftrightarrow -\nu$ в уравнении (3.15) соответствующего свойства для спектра фермионов в нашей задаче еще не следует, т.к. уравнение (3.15) справедливо лишь в области II , а спектр определяется из решения уравнений Дирака на объединении областей $I + II$. При этом в области I мы имеем уравнение (3.8), которое обладает другой симметрией, а именно $\omega \leftrightarrow -\omega$. Это приводит к

тому, что знаковая симметрия $\nu \leftrightarrow -\nu$ у фермионного спектра может иметь место только для дискретных значений производной φ' в области II . Эти значения находятся из вида трансцендентного алгебраического уравнения для фермионных уровней энергии, которое получается прямолинейным решением уравнений (3.8) и (3.9) с учетом граничных условий (3.7) и связи (3.10):

$$\exp(4i\omega x_1 - 2i\varphi_1) = \frac{1 - e^{-2ikd} \frac{M - i(\nu + k)}{M - i(\nu - k)}}{1 - e^{2ikd} \frac{M + i(\nu + k)}{M + i(\nu - k)}} \frac{1 - e^{2ikd} \frac{\nu - k}{\nu + k} \frac{M + i(\nu + k)}{M + i(\nu - k)}}{1 - e^{-2ikd} \frac{\nu - k}{\nu + k} \frac{M - i(\nu + k)}{M - i(\nu - k)}}, \quad (3.19)$$

где $\nu^2 = k^2 + M^2$, а зависимость от $\varphi_1 = \varphi(x_1) = -\varphi(-x_1)$ показана для сохранения общности. Анализируя уравнение (3.19), нетрудно убедиться в том, что фермионный спектр будет иметь симметрию $\nu \leftrightarrow -\nu$, если

$$4\lambda x_1 - 2\varphi_1 = \pi s, \quad (3.20)$$

где s – целое, т.к. при таких значениях производной поля $\varphi(x)$ в области II левая часть уравнения (3.19) сведется к $(-1)^s \exp(4i\nu x_1)$.

При выполнении этого условия становится содержательной следующая цепочка рассуждений. В области II в правой части уравнения (3.3), определяющего $\varphi''(x)$ в этой области, мы имеем среднее от C -нечетного аксиального тока

$$J_5 = \frac{1}{2} [\bar{\psi}, i\gamma_5 e^{i\gamma_5 \varphi} \psi]_- = \frac{1}{2} [\chi^+, i\gamma_1 \chi]_-. \quad (3.21)$$

В (3.21) под χ уже следует понимать вторично квантованное дираковское поле в киральном представлении (3.11)

$$\chi(x, t) = \sum_n b_n \chi_n(x) e^{-i\omega_n t}, \quad (3.22)$$

где $\chi_n(x)$ – нормированные решения соответствующего уравнения Дирака, а b_n^+ , b_n – операторы рождения-уничтожения фермионов, удовлетворяющие каноническим антикоммутационным соотношениям

$$\{b_n, b_{n'}^+\}_+ = \delta_{nn'}, \quad \{b_n, b_{n'}\}_+ = 0. \quad (3.23)$$

Усреднение по заданному состоянию мешка по определению включает усреднение по заполненному “море” состояний с отрицательной энергией $\omega_n < 0$ плюс возможные заполненные валентные состояния фермионов с $\omega_n > 0$, которые пока мы будем игнорировать. В результате имеем

$$\langle J_5 \rangle_{\text{sea}} = \left(\frac{1}{2} \sum_{\omega_n < 0} - \frac{1}{2} \sum_{\omega_n > 0} \right) \chi_n^+ i\gamma_1 \chi_n. \quad (3.24)$$

Подчеркнем, что в формуле (3.24) разделение на “морские” и валентные фермионы происходит в соответствии со знаком их собственных частот ω_n , которые отличаются от знаково-симметричных ν_n сдвигом на величину λ :

$$\omega_n = \nu_n + \lambda, \quad (3.25)$$

и поэтому сами по себе симметрией $\omega \leftrightarrow -\omega$ не обладают. Однако, если мы дополнительно предположим, что для всех n знаки ν_n и ω_n одинаковы, т.е. что при сдвиге на λ никакое из ν_n не меняет свой знак, то в соотношении (3.24) условие $\omega_n \gtrless 0$ эквивалентно условию $\nu_n \gtrless 0$. Тогда

$$\langle J_5 \rangle_{\text{sea}} = \left(\frac{1}{2} \sum_{\nu_n < 0} - \frac{1}{2} \sum_{\nu_n > 0} \right) \chi_n^+ i\gamma_1 \chi_n = 0 \quad (3.26)$$

в силу соотношения (3.18). Однако это, в свою очередь, означает, что уравнение (3.3) в области II сводится к условию $\varphi'' = 0$, что полностью согласуется с исходным допущением $\varphi'(x) = \text{const}$ в области II . Иными словами, мы получаем решение связанных уравнений (3.2) и (3.3) в области II в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2\lambda(x - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 2\lambda(x + x_1), & -x_2 \leq x \leq -x_1, \end{cases} \quad (3.27)$$

где λ принимает дискретные значения из (3.20), а энергетический спектр фермионов определяется по соотношению (3.25), где, в свою очередь, ν_n определяется из уравнения (3.19) с заменой левой части на $(-1)^s \exp(4i\nu x_1)$.

Необходимо отметить, что ключевыми моментами в содержательности такого решения являются следующие. Первый из них – это конечность размера d промежуточной области, т.к. для неограниченной области II решение (3.27) физически неприемлемо по очевидным причинам. В нашем случае, однако, размер промежуточной области всегда конечен по построению, а солитонный характер бозонное поле $\varphi(x)$ приобретает в области III за счет самодействия $V(\varphi)$. Здесь еще раз проявляется то обстоятельство, что само по себе киральное взаимодействие $\bar{\psi} e^{i\gamma_5 \varphi} \psi$ в $(1 + 1)$ -измерениях не способно придать солитонного характера динамике скалярного поля только за счет эффектов поляризации фермионного вакуума. Необходимо еще дополнительное самодействие бозонов. Этот вопрос детально исследован в работе [24].

Второй момент имеет более глубокую причину и связан с использованием симметрии $\nu \leftrightarrow -\nu$ при вычислении среднего от аксиального тока J_5 по “морю Дирака”. Дело в том, что для средних такого типа возможно и другое содержательное определение через η -инвариант, которое часто используется при изучении эффектов поляризации фермионного вакуума [25], а именно

$$\langle J_5 \rangle_{\text{sea}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \sum_{\omega_n < 0} e^{-|\omega_n|\eta} \chi_n^+ i\gamma_1 \chi_n - \frac{1}{2} \sum_{\omega_n > 0} e^{-\omega_n \eta} \chi_n^+ i\gamma_1 \chi_n \right]. \quad (3.28)$$

Поскольку спектр ω_n не является симметричным, то выражение (3.28) уже не обращается в нуль в отличие от среднего (3.26). Именно, при учете связи между ω_n и ν_n выражение (3.28) переходит в

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\text{sh } \lambda \eta \left(\sum_{\nu_n > 0} e^{-\nu_n \eta} \chi_n^+ i\gamma_1 \chi_n \right) \right], \quad (3.29)$$

и при $\eta \rightarrow 0$ сумма по ν_n в (3.29) расходится как $1/\eta$, поэтому среднее $\langle J_5 \rangle_{\text{sea}}$ оказывается пропорциональным λ и не равно нулю, пока $\lambda \neq 0$. При этом правая часть уравнения (3.3) уже не будет равна нулю, и линейная функция (3.27) перестает быть решением этого уравнения в области II .

Более того, это касается и других фермионных средних, в частности фермионного заряда мешка. При нашем способе счета в силу дискретности спектра фермионов заряд мешка равен нулю (при отсутствии валентных фермионов) по тем же причинам, что и для аксиального тока. Именно, если использовать C -нечетное выражение для заряда

$$Q = \frac{1}{2} \int dx [\psi^+, \psi]_-, \quad (3.30)$$

то при тех же условиях соответствия знаков между ω_n и ν_n для всех n для среднего по “мору” получим

$$\langle Q \rangle_{\text{sea}} = \frac{1}{2} \sum_{\omega_n < 0} -\frac{1}{2} \sum_{\omega_n > 0} = \frac{1}{2} \sum_{\nu_n < 0} -\frac{1}{2} \sum_{\nu_n > 0} = 0. \quad (3.31)$$

Интерпретация этого результата такова. В нашем случае бозонное поле нигде не прерывается (оно присутствует даже в области I) и топологически эквивалентно тому нечетному солитону, который имел бы место при отсутствии фермионов только за счет самодействия $V(\varphi)$. Поэтому от наличия и размеров областей пространства, содержащих фермионы (I и II), топологический заряд бозонного поля не зависит. С другой стороны, по определению барионный заряд гибридного мешка есть сумма топологического заряда бозонного солитона и фермионного заряда внутренних областей мешка. Последний в нашем случае равен нулю, поэтому барионный заряд мешка определяется только топологическим зарядом бозонного поля и, как это и требуется в схеме гибридных моделей, не зависит от размеров областей I и II , содержащих фермионы.

Если же определить среднее $\langle Q \rangle_{\text{sea}}$ через η -инвариант, то получим

$$\langle Q \rangle_{\text{sea}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \sum_{\omega_n < 0} e^{-|\omega_n| \eta} - \frac{1}{2} \sum_{\omega_n > 0} e^{-\omega_n \eta} \right] \neq 0 \quad (3.32)$$

при $\lambda \neq 0$ в силу отсутствия симметрии $\omega \leftrightarrow -\omega$. Тогда, чтобы сохранить прежнюю величину барионного заряда для всего мешка, мы должны были бы соответствующим образом изменить топологический заряд бозонного поля. Поскольку асимптотики бозонного поля на бесконечности фиксированы заданной динамикой мезонов, то единственным вариантом оказывается полный запрет на существование бозонного поля во внутренней области с подбором его значений на границах этой области таким образом, чтобы сумма заряда “моря Дирака”, вычисленная по формуле (3.32), и остаточного заряда солитона была постоянна. Как это было впервые показано в работах [9], для моделей типа (1.1) такой вариант действительно оказывается возможным как в $(1+1)$ -, так и в $(3+1)$ -мерном случаях в силу специфики киральных граничных условий (см. также [25]).

В нашем случае, однако, мы исходим из того общего представления, что квантованные поля существуют во всем пространстве-времени, и запретить полю существовать в

какой-либо области нельзя. Возможна лишь ситуация, когда по тем или иным динамическим причинам, определяемым спецификой лагранжиана, вклад поля в наблюдаемые величины в этой области равен нулю. Так, в нашем случае вклад бозонов в области I и фермионов в области III во все динамические величины равен нулю, но это отнюдь не означает, что в этих областях поля отсутствуют. На самом деле просто смоделирована ситуация, когда для конечности энергии системы поля должны принимать в этих областях свои вакуумные значения, в данном случае нулевые. В более общем виде суть проблемы состоит в том, что если вклад от поля φ в полный лагранжиан системы содержит множитель $\theta(|x| < x_0)$, то и во все остальные динамические величины типа тензора энергии-импульса или различных токов, построенных по теореме Нетер, вклад от поля φ в области $|x| < x_0$ также будет равен нулю, т.к. они однозначно определяются из полного лагранжиана системы, причем локальным образом. Однако при этом, во-первых, множитель $\theta(|x| < x_0)$ нарушает пространственно-временную симметрию теории, т.к. является явной функцией координат, а во-вторых, даже если проигнорировать это обстоятельство, то такой лагранжиан отнюдь не запрещает полю φ существовать при $|x| < x_0$. В то же время топологический индекс поля – это дополнительная характеристика, связанная с его глобальной топологией, которая заранее ничего не “знает” про лагранжиан и особый статус области $|x| < x_0$. Поэтому либо мы сразу вводим в плотность топологического тока поля φ множитель $\theta(|x| < x_0)$ (т.е. запрещаем полю φ существовать в области $|x| < x_0$), но при этом получаем во всей полноте трудности, обусловленные отсутствием ковариантности, либо мы имеем вариант с непрерывным всюду бозонным полем, когда сразу исчезают все принципиальные проблемы, связанные с ковариантностью (она нарушается лишь спонтанно). В последнем случае для сохранения барионного заряда необходимо использовать усреднение по “морю” по формулам (3.26) и (3.31).

Существуют и другие аргументы в пользу соотношений (3.26) и (3.31) как наиболее адекватного способа вычисления среднего по “морю” в нашей задаче. Во-первых, η -инвариант является на самом деле мерой асимметрии гамильтониана, а не фермионным зарядом основного состояния. Во-вторых, помимо температурной, возможны и другие способы регуляризации расходящихся сумм типа $\langle J_5 \rangle$ и $\langle Q \rangle$, и что самое главное, нет никакой гарантии, что регуляризованные выражения (3.28) и (3.32) будут давать при $\eta \rightarrow 0$ именно требуемые величины.

Легко привести пример ситуации, когда зависимость от параметра в сумме или интеграле не является непрерывной, в частности

$$F(k) = \int_0^\infty dx \frac{\sin(kx)}{x} = \frac{\pi}{2}$$

для любого $k > 0$, но $F(0) = 0$, т.е. в данном случае предел интеграла при $k \rightarrow 0$ и его точное значение при $k = 0$ различны.

Далее, рассмотрим процесс адиабатического изменения градиента λ бозонного поля в области II начиная с $\lambda = 0$. В начальный момент $\omega_n = \nu_n$, поэтому с очевидностью все C -нечетные средние по фермионному “морю” исчезают: $\langle \rangle_{\text{sea}} \equiv 0$ при любом разумном способе регуляризации. Теперь учтем, что в нашем случае спектр фермионов чисто дискретен, а зависимость спектра от λ непрерывна, поэтому для достаточно малых λ

никакое из значений ω_n свой знак еще не поменяет, тогда из наглядных соображений следует считать, что по-прежнему $\langle \rangle_{\text{sea}} = 0$, хотя спектр ω_n уже стал несимметричным и тем самым η -инвариант уже не равен нулю. Поэтому мы имеем все основания полагать, что в данном случае температурная регуляризация может давать не соответствующие физике задачи значения для C -нечетных величин типа аксиального тока и фермионного заряда вакуума. Здесь следует подчеркнуть существенное отличие данной ситуации от случая неограниченного пространства, когда спектр непрерывен. В последнем случае при любом сколь угодно малом изменении λ меняется плотность состояний и тем самым все средние, что и создает феномен индуцированных фермионных чисел [25]. Классический пример вычисления такого изменения фермионных средних при адиабатическом изменении фонового поля в рамках пертурбативной КТП приведен в известной работе [26].

Наконец, можно попытаться проверить на самосогласованность решение (3.27) численно. При этом задача решается на решетке, и поэтому число всех степеней свободы и как следствие число фермионных уровней обязательно конечно, так что никакой регуляризации не требуется. Результаты расчетов показывают, что линейная зависимость (3.27) и нулевые средние – это единственное самосогласованное решение в такой задаче.

Более того, на самом деле у нас не будет проблем и с тем случаем, когда при изменении λ какой-либо из уровней ω_n меняет знак. Пусть для определенности λ растёт и уровень $\omega_n = -|\nu_n| + \lambda$ переходит в положительный спектр. Тогда $\langle Q \rangle_{\text{sea}}$ уменьшится на одну единицу заряда, но если мы заполним появившийся положительный вакантный уровень валентным фермионом, то сумма $Q_{\text{val}} + Q_{\text{sea}}$ останется прежней. Аналогично полный аксиальный ток будет равен $J_{\text{val}} + J_{\text{sea}}$ и также не изменится. Поэтому мы можем включить в рассмотрение все возможные значения λ , разрешенные соотношением (3.20), если все время считать уровни, меняющие свой знак, заполненными фермионами: валентными для положительного спектра и “морскими” для отрицательного.

4. СТРУКТУРА МЕШКА С УЧЕТОМ ДИНАМИКИ ВНЕШНЕЙ (БЕСЦВЕТНОЙ) ФАЗЫ

Таким образом, мы приходим к модельной конфигурации бозонного поля, показанной на рис. 1, на фоне которой в областях I и II “живут” фермионы. На этом рисунке изображена конфигурация бозонного поля, возникающая при сшивке по непрерывности самосогласованного решения уравнений мешка в промежуточной области и солитонного решения во внешней области. Штриховой линией показан профиль бозонного солитона, который имел бы место при нулевых размерах областей I и II , населенных фермионами.

В области I поле $\varphi \equiv 0$. В области II бозонное поле – линейная функция (3.27). Она сшивается по непрерывности вместе с производной с солитонным решением уравнения (3.5), которое задает динамику бозонов во внешней области III :

$$-\varphi'' + V'(\varphi) = 0, \quad (4.1)$$

“решкалированным” по правилу $\varphi \rightarrow \varphi/g$. Чтобы не детализировать структуру самодействия поля φ , мы будем в области III пользоваться асимптотическим разложением

Рис. 1.

решения уравнения (4.1) при больших $|x|$, т.е. считать, что

$$\varphi_{\text{sol}}(x) = \frac{\pi}{g}(1 - Ae^{-mx}), \quad x > x_2, \quad (4.2)$$

где m – масса мезона во внешней области мешка (для $x < -x_2$ поле $\varphi_{\text{sol}}(x)$ доопределяется по нечетности). Обратим внимание на то, что во внешней области уже не идет никакой речи о киральной симметрии, что обусловлено сразу двумя причинами – феноменологией адронов, с одной стороны, и спецификой $(1+1)$ -мерных скалярных моделей, с другой, из-за которой наличие массы становится необходимым условием для формирования нужного солитонного профиля.

Коэффициент π/g соответствует тому, что мы имеем дело с фазовым солитоном, топологический заряд которого должен быть кратен $2\pi/g$, т.к. это период затравочного кирального взаимодействия $\bar{\psi} \exp(i\gamma_5 g\varphi)\psi$. Константа A определяется из условия сшивки по непрерывности бозонного поля в точках $x = \pm x_2$.

Далее для определенности будем считать целое число s в уравнении (3.20) четным, $s = 2r$, т.е. значения градиента поля φ в области II есть

$$\lambda_r = \frac{\pi r}{2x_1}, \quad (4.3)$$

где r – неотрицательное целое число. Случай нечетного s будет рассмотрен отдельно.

Условия сшивки дают следующие связи между параметрами задачи:

$$x_1 = \frac{r}{r+1} \left(x_2 + \frac{1}{m} \right), \quad d = \frac{1}{r+1} \left(x_2 - \frac{r}{m} \right), \quad A = \frac{r+1}{mx_2+1} e^{mx_2}. \quad (4.4)$$

При этом из условия $d \geq 0$ возникает дополнительное условие на размер области конформента, т.е. на внешний размер собственно мешка x_2 :

$$mx_2 \geq r. \quad (4.5)$$

Неравенство (4.5) показывает, что число r естественно рассматривать как индекс, нумерующий возбужденные состояния мешка, размеры которых растут с ростом r .

В результате, используя теорему вириала для солитонных решений в одном пространственном измерении, для энергии бозонного поля в области III имеем

$$E_{\text{sol}} = 2 \int_{x_2}^{\infty} dx \varphi'^2(x) = \frac{\pi^2}{g^2} A^2 m e^{-2mx_2} = m \frac{\pi^2}{g^2} \frac{(r+1)^2}{(mx_2+1)^2}. \quad (4.6)$$

Кинетическая энергия поля φ в области II дает вклад

$$E_d = m \frac{\pi^2}{g^2} (r+1) \frac{mx_2 - r}{(mx_2+1)^2}. \quad (4.7)$$

Окончательно полный вклад бозонного поля в энергию всей системы есть

$$E_{\varphi} = m \frac{\pi^2}{g^2} \frac{r+1}{mx_2+1}. \quad (4.8)$$

Полная энергия системы складывается из E_{φ} и энергии “дираковского моря” E_{sea} :

$$E_{\text{bag}} = E_{\varphi} + E_{\text{sea}}. \quad (4.9)$$

Как легко видеть из (4.8), энергия бозонного поля ведет себя вполне гладким образом и убывает при $x_2 \rightarrow \infty$, не создавая тем самым никакого вакуумного давления, несмотря на то что в области II градиент φ порождает постоянный положительный вклад в плотность энергии $\varphi'^2/2 = 2\lambda^2$, который можно было бы отождествить с вакуумным давлением B в стандартной модели мешков. Причина состоит в том, что из-за условия (3.20) градиент φ в области II связан с остальными параметрами модели так, что эффективно

$$\lambda_r = \frac{\pi m}{2} \frac{r+1}{mx_2+1}, \quad (4.10)$$

и поэтому E_d с ростом размеров мешка не растет, а убывает. Наконец, отметим, что в окончательном выражении (4.8) энергия E_{φ} определена для всех $x_2 \geq 0$, но тем не менее из дополнительного физического требования $d \geq 0$ имеем соотношение (4.5), ограничивающее размер области конфайнмента снизу для каждого ненулевого r . Вся нетривиальная зависимость полной энергии всего мешка E_{bag} от параметров задачи, таким образом, может проистекать только из энергии E_{sea} , к изучению которой мы и переходим.

Для конкретности будем вычислять энергию “дираковского моря” для случая, когда имеется соответствие между знаками ν_n и ω_n при всех n . Случай, когда один из отрицательных уровней $\omega_n = -|\nu_n| + \lambda$ меняет знак, как и для аксиального тока, и для фермионного числа, сводится к предыдущему заполнением появившегося вакантного состояния в положительном спектре валентным фермионом.

В зарядово-симметричном случае энергия “дираковского моря” должна быть определена следующим образом [24, 27, 28]:

$$E_{\text{sea}} = \frac{1}{2} \sum_{\omega_n < 0} \omega_n - \frac{1}{2} \sum_{\omega_n > 0} \omega_n. \quad (4.11)$$

В нашем случае сохранения знака при переходе от ω_n к ν_n имеем

$$E_{\text{sea}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu_n > 0} (-\nu_n + \lambda) - \frac{1}{2} \sum_{\nu_n > 0} (\nu_n + \lambda) = - \sum_{\nu_n > 0} \nu_n. \quad (4.12)$$

Выражение (4.12) расходится на верхнем пределе. Поэтому оно должно быть перенормировано с помощью подходящей вычитательной процедуры.

Прежде чем перейти к подробному рассмотрению этой процедуры, целесообразно будет ввести ряд новых параметров, в терминах которых полная энергия мешка будет записываться наиболее удобным образом. Для этого прежде всего введем безразмерные величины

$$\alpha = 2Mx_1, \quad \beta = 2Md, \quad \varrho = 2Mx_2. \quad (4.13)$$

Рассмотрим более детально уравнение (3.19), из которого определяются уровни ν_n , при четном s . Это уравнение имеет две ветви корней, первая из которых соответствует действительным k и в терминах параметров α и β приводится к следующему виду:

$$\operatorname{tg}(\alpha\sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \frac{x \cos \beta x + \sin \beta x}{1 - \cos \beta x + x \sin \beta x}, \quad (4.14)$$

где неизвестным является безразмерное x , связанное с k соотношением $k = Mx$, так что $\nu = M\sqrt{1+x^2}$. При этом область изменения действительных корней x_n есть полуось $0 \leq x_n < \infty$, т.к. из-за конечности размеров области, в которой живут фермионы, и граничных условий на концах фермионные волновые функции представляют собой стоячие волны, не зависящие от знака k . Соответствующие частоты ν_n меняются в пределах $M \leq \nu_n < \infty$.

Вторая ветвь соответствует чисто мнимому $k = iMx$, $\nu = M\sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$, и получается из (4.14) аналитическим продолжением

$$\operatorname{tg}(\alpha\sqrt{1-x^2}) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{x \operatorname{ch} \beta x + \operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{ch} \beta x + x \operatorname{sh} \beta x - 1}. \quad (4.15)$$

При этом для второй ветви $0 < \nu_n \leq M$.

Таким образом, ν_n и тем самым E_{sea} оказываются функцией двух безразмерных параметров α и β , которые, однако, не являются независимыми, а в сумме должны давать размер области конфайнмента в безразмерных единицах

$$\alpha + \beta = \varrho. \quad (4.16)$$

Далее удобно выделить массу “составляющего кварка” M из энергии “моря” и фермионных частот в виде размерного множителя, для чего положим

$$\varepsilon_n = \frac{\nu_n}{M} = \sqrt{1+x_n^2}, \quad (4.17)$$

так что $E_{\text{sea}} = -M \sum_n \varepsilon_n$. Введем также безразмерное отношение двух массовых параметров теории

$$\mu = \frac{m}{2M} \quad (4.18)$$

и безразмерную полную энергию $\mathcal{E}_{\text{bag}} = E_{\text{bag}}/M$. Для последней окончательно имеем следующее выражение:

$$\mathcal{E}_{\text{bag}} = \mathcal{E}_{\text{sea}}(\alpha, \beta) + 2\mu \frac{\pi^2}{g^2} \frac{r+1}{\mu\varrho+1}. \quad (4.19)$$

В свою очередь, безразмерные параметры α , β выражаются через μ и ϱ следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \frac{r}{r+1} (\mu\varrho + 1), \quad \beta = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r+1} (\mu\varrho - r), \quad (4.20)$$

где $\mu\varrho \geq r$. Таким образом, фактически полная энергия мешка имеет нетривиальную зависимость от двух безразмерных параметров μ и ϱ , к изучению которой мы и перейдем. Для этого прежде всего надо провести соответствующую физической постановке задачи перенормировку безразмерной энергии фермионного моря $\mathcal{E}_{\text{sea}}$.

5. ПЕРЕНОРМИРОВКА $\mathcal{E}_{\text{sea}}(\alpha, \beta)$

Начнем с изучения асимптотики корней уравнения (4.14) в ультрафиолетовой области, когда $x_n \gg 1$. Для этого (4.14) удобно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sin(\alpha\sqrt{1+x^2}) &= \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2} + x) \sin(\alpha\sqrt{1+x^2} + \beta x + \gamma) + \\ &+ \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2} - x) \sin(\alpha\sqrt{1+x^2} - \beta x - \gamma), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\gamma = \arctg x$, откуда находим, что

$$x_n(\alpha, \beta) = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{\varrho} + \frac{(-1)^{n+1} \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \frac{\alpha}{\varrho}\right] + 1 - \frac{\alpha}{2}}{\frac{\pi}{2} + \pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (5.2)$$

В выражении (5.2) первое слагаемое дает квадратичную и линейную расходимость в сумме $\sum_n \varepsilon_n$, а во втором содержится логарифмическая. Оставшаяся часть имеет порядок $O(1/n^2)$ и к расходимостям не приводит. Таким образом, задача перенормировки сводится к компенсации первого члена и расходящихся слагаемых во втором члене в асимптотике (5.2). Как и в любой другой процедуре такого рода, первый шаг состоит в использовании того очевидного факта, что физический смысл имеет не энергия сама по себе, а лишь разность двух значений энергий. Казалось бы, для нашего мешка наиболее естественно в качестве реперной точки отсчета для $\mathcal{E}_{\text{sea}}$ было бы выбрать энергию “моря” свободных фермионов, заключенных в том же “объеме” ϱ . Однако, как мы увидим, этот способ вычитания в нашем случае не годится. Чтобы убедиться в этом наиболее последовательным образом, удобно начать с другого вычитания, а именно с разности $\mathcal{E}_{\text{sea}}(\alpha, \beta) - \mathcal{E}_{\text{sea}}(0, \varrho)$, т.е. сравнить между собой конфигурации мешка с размерами внутренних областей α , β и $\alpha' = 0$, $\beta' = \varrho$ при одном и том же полном размере ϱ . При этом нас будут интересовать пока что только ультрафиолетово расходящиеся члены в суммах, соответствующие корням $x_n \gg 1$.

При $\alpha = 0$ уравнение (4.14) сводится к уравнению

$$\sin(\varrho x + \arctg x) = 0, \quad (5.3)$$

для корней которого при $n \gg 1$ имеем асимптотическую формулу

$$x_n(0, \varrho) = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{\varrho} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (5.4)$$

Сравнивая выражения (5.2) и (5.4), легко видеть, что главные члены асимптотик одинаковы и при вычитании сокращаются, поэтому разность $\mathcal{E}_{\text{sea}}(\alpha, \beta) - \mathcal{E}_{\text{sea}}(0, \varrho)$ будет начинаться с членов логарифмического порядка

$$(\Delta\mathcal{E}_{\text{sea}})_{\log} = \sum_{n \gg 1} (-1)^n \frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \frac{\alpha}{\rho}\right]}{\frac{\pi}{2} + \pi n} + \frac{\alpha}{2} \sum_{n \gg 1} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}, \quad (5.5)$$

причем первая сумма в (5.5) за счет осциллирующего синуса в числителе сходится. Поэтому реально расходится только второе слагаемое. Эта расходимость имеет ту же однопетлевую природу, что и в пертурбативной КТП, и должна ликвидироваться с помощью соответствующих контрчленов. Напомним, что в пертурбативной КТП $(1+1)$ -мерная N -флейворная теория со взаимодействием $\mathcal{L}_I = G\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\pi)\psi$ является перенормируемой. При этом однопетлевая поправка к энергии за счет рождения виртуальных фермионных пар [24, 27] имеет следующий вид:

$$E_{CT} = \frac{1}{2}\delta m^2 \int dx (\sigma^2 + \pi^2), \quad (5.6)$$

где

$$\delta m^2(\Lambda) = \frac{NG^2}{\pi} \int_0^\Lambda \frac{dk}{\sqrt{k^2 + M^2}}. \quad (5.7)$$

Для случая нелинейного кирального взаимодействия с $\mathcal{L}_I = \bar{\psi}e^{i\gamma_5\varphi}\psi$ формула (5.6) несколько упрощается, т.к. при этом $\sigma^2 + \pi^2 \equiv 1$. Поэтому применительно к нашему случаю, когда взаимодействие $\bar{\psi}e^{i\gamma_5\varphi}\psi$ имеет место только в области II , формула (5.6) должна быть переписана в виде

$$E_{CT} = \frac{1}{2}\delta m^2 2 \int_{x_1}^{x_2} dx = M \frac{\beta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (5.8)$$

Формула (5.8), однако, применима только в случае чисто непрерывного спектра фермионов. В нашем случае, напротив, спектр фермионов чисто дискретный, и соответствующий (безразмерный) контрчлен к энергии “моря” должен быть записан в форме

$$\mathcal{E}_{CT} = \frac{\beta}{\varrho} \sum_n \frac{1}{2\varepsilon_n}, \quad (5.9)$$

где сумма берется по всем модам спектра, поскольку этот контрчлен возникает как компенсация однопетлевой поправки к гамильтониану. Эта поправка включает в себя сумму по полному набору промежуточных фермионных состояний, так же как и в непрерывном случае поправка δm^2 включает в себя вклады от всех волновых чисел с $|k| \leq \Lambda$.

Соответствие между (5.8) и (5.9) легко устанавливается, если перейти к квазинепрерывному пределу при $\varrho \rightarrow \infty$. Тогда мы можем перейти от суммы $\sum_n$ к интегралу $\int dx$, а поскольку нас пока интересует только расходящаяся часть, то в dn/dx нам достаточно оставить только главное слагаемое $dn/dx = \varrho/\pi$. В результате при $\varrho \rightarrow \infty$ расходящаяся часть в $\mathcal{E}_{CT}$ представляется в виде

$$\frac{\beta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad (5.10)$$

и в точности воспроизводит интеграл в (5.8).

Как и следовало ожидать, однопетлевой контрчлен (5.9) устраняет сохранившуюся логарифмическую расходимость в (5.5). В данном случае мы должны прибавить к разности (5.5) разность соответствующих контрчленов для конфигураций мешка с параметрами α, β и $\alpha' = 0, \beta' = \varrho$

$$\Delta \mathcal{E}_{CT} = \frac{\beta}{\varrho} \sum_n \frac{1}{2\varepsilon_n(\alpha, \beta)} - \sum_n \frac{1}{2\varepsilon_n(0, \varrho)}, \quad (5.11)$$

расходящаяся часть которой

$$(\Delta \mathcal{E}_{CT})_{\text{div}} = -\frac{\alpha}{2} \sum_{n \gg 1} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}, \quad (5.12)$$

что в точности компенсирует логарифмическую расходимость в формуле (5.5).

Отметим еще раз важность того обстоятельства, что в нашем случае $\mathcal{E}_{CT}$ определяется как сумма по всем фермионным модам спектра, а не только по его ультрафиолетовой асимптотике при $x_n \gg 1$. Это позволяет, в частности, провести вычитание двух таких контрчленов с различными значениями α и β , т.к. при таком определении мы можем установить взаимно однозначное соответствие между каждым членом в суммах

$$\sum_n \frac{1}{2\varepsilon_n(\alpha, \beta)} \quad \text{и} \quad \sum_n \frac{1}{2\varepsilon_n(\alpha', \beta')}.$$

Такое взаимно однозначное соответствие легко обнаружить, если начать с конфигурации $\alpha = 0, \beta = \varrho$ и изменять ее в направлении роста параметра α и соответственно уменьшения параметра β . Первоначально имеются уровни только первой ветви спектра, соответствующие действительным x_n , которые определяются из (5.3) и имеют собственные значения $\varepsilon_n = \sqrt{1 + x_n^2} \geq 1$. При росте α конечное число первых уровней ε_n опустится ниже порогового значения первой ветви $\varepsilon = 1$ и перейдет тем самым на вторую ветвь спектра, соответствующую корням уравнения (4.15) с собственными значениями $\varepsilon_n \leq 1$. Таким образом, в асимптотических выражениях для сумм в (5.11) индекс суммирования n — это точный порядковый номер данного уровня. Именно это обстоятельство позволяет однозначным образом выделить расходящийся вклад в разности (5.11) в виде одной суммы по большим n .

Такое определение $\mathcal{E}_{CT}$ диктуется также следующими соображениями. Если бы $\mathcal{E}_{CT}$ было, например, определено как сумма только по первой ветви спектра, то конечная часть в $\Delta \mathcal{E}_{CT}$, оставшаяся после компенсации расходимости в (5.5), при изменении параметров α и β вела бы себя не плавно, а скачками, которые происходили бы всякий раз, когда уровни переходили с одной ветви на другую (напомним, что порог первой ветви $\varepsilon = 1$). В свою очередь, эти скачки воспроизвелись бы и в перенормированной энергии мешка, куда конечная часть $\Delta \mathcal{E}_{CT}$ входит как аддитивное слагаемое, что физически неприемлемо. С другой стороны, если $\Delta \mathcal{E}_{CT}$ содержит все моды спектра, то этого не произойдет, т.к. в этом случае его конечная часть является плавной функцией параметров.

В результате мы можем утверждать, что с учетом однопетлевого логарифмического контрчлена (5.9) перенормировка $\mathcal{E}_{\text{sea}}(\alpha, \beta)$ с вычитанием $\mathcal{E}_{\text{sea}}(0, \varrho)$ дает ультрафиолетово-конечное регуляризованное значение

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{reg}}(\alpha, \beta) = \left(-\sum_n \varepsilon_n(\alpha, \beta) + \frac{\beta}{\varrho} \sum_n \frac{1}{2\varepsilon_n(\alpha, \beta)} \right) - \left(-\sum_n \varepsilon_n(0, \varrho) + \sum_n \frac{1}{2\varepsilon_n(0, \varrho)} \right). \quad (5.13)$$

Рассмотрим теперь аналогичную процедуру вычитания с реперной точкой $\alpha = \varrho, \beta = 0$, соответствующей конфигурации мешка без промежуточной области ($d = 0$) и являющейся тем самым стандартной гибридной моделью. При $d = 0$ точный спектр фермионов есть

$$\varepsilon_n(\varrho, 0) = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{\varrho}, \quad (5.14)$$

и отсутствует логарифмический однопетлевой контрчлен, т.к. область взаимодействия между фермионами и бозонами равна нулю. По аналогии с формулой (5.13) регуляризованная разность энергий в этом случае должна была бы вычисляться следующим образом:

$$\Delta\mathcal{E}'_{\text{reg}}(\alpha, \beta) = \left(-\sum_n \varepsilon_n(\alpha, \beta) + \frac{\beta}{\varrho} \sum_n \frac{1}{2\varepsilon_n(\alpha, \beta)} \right) - \left(-\sum_n \varepsilon_n(\varrho, 0) \right). \quad (5.15)$$

Однако в этом выражении логарифмические расходимости уже не сокращаются. Именно, используя ультрафиолетовую асимптотику (5.2), для расходящейся составляющей в $\Delta\mathcal{E}'_{\text{reg}}(\alpha, \beta)$ получим асимптотическое представление

$$(\Delta\mathcal{E}'_{\text{reg}})_{\text{div}} = -\sum_{n \gg 1} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}. \quad (5.16)$$

Эта расходимость не имеет вообще никакой зависимости от параметров α, β и является общей специфической чертой вычитания при $\alpha = \varrho, \beta = 0$ в этой задаче.

Причину такого результата вычитания при $\alpha = \varrho, \beta = 0$ можно понять, если изучить поведение первой (сходящейся) асимптотической суммы логарифмического порядка в выражении (5.5) при $\beta \rightarrow 0$. Для этого преобразуем эту сумму к виду

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{log}}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n \gg 1} (-1)^{n-1} \frac{\sin \left[\left(\frac{\pi\alpha}{\varrho} \right) \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]}{n - \frac{1}{2}}. \quad (5.17)$$

Замена $n \rightarrow n-1$ здесь законна, поскольку вся сумма имеет асимптотический характер. Далее используем соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin \left[z \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]}{n - \frac{1}{2}} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{4} \right). \quad (5.18)$$

Легко видеть, что суммы (5.17) и (5.18) имеют одинаковый общий член. При $z \rightarrow \pi$ сумма (5.18) расходится как $-\ln(\pi - z)$. Отсюда следует, что при $\pi\alpha/\varrho \rightarrow \pi$, т.е. при $\beta \rightarrow 0$, сумма (5.17) также будет иметь аналогичное поведение, а именно,

$$\Delta\mathcal{E}_{\log}(\alpha, \beta) \rightarrow -\frac{1}{\pi} \ln \beta, \quad \beta \rightarrow 0. \quad (5.19)$$

Таким образом, перенормированная разность энергий (5.13) оказывается конечной при всех $\beta \neq 0$, но при $\beta \rightarrow 0$ неограниченно растет. Иными словами, после перенормировки энергия фермионного “моря” в конфигурации $\alpha = \varrho$, $\beta = 0$ оказывается на бесконечную положительную величину больше энергии “моря” в конфигурации с $\alpha = 0$, $\beta = \varrho$. При этом разность энергий “моря” между конфигурациями $\alpha \neq \varrho$, $\beta \neq 0$ и $\alpha = 0$, $\beta = \varrho$ всегда конечна, т.е. бесконечную энергию по сравнению со всеми остальными имеет именно конфигурация с $\beta = 0$. Фактически это же самое утверждает и второе расходящееся слагаемое в формуле (5.16). Здесь мы вычисляем перенормированную разность $\mathcal{E}_{\text{sea}}(\alpha, \beta) - \mathcal{E}_{\text{sea}}(\varrho, 0)$ и видим, что она всегда содержит отрицательную бесконечную величину. Таким образом, для всех имеющих смысл контрчленов при нулевой промежуточной области фермионное “море” в мешке имеет энергию, бесконечно большую, чем у всех остальных конфигураций с $\beta \neq 0$ при том же самом значении полного размера ϱ . Причем эта бесконечная разница одинакова для всех ϱ , в том числе и для бесконечно больших. Однако при $\varrho \rightarrow \infty$ конфигурация с $\beta = 0$ превращается в систему свободных безмассовых фермионов. Поэтому в данной задаче не имеет смысла использовать в качестве реперной точки энергию “моря” свободных фермионов, поскольку из приведенных рассуждений сразу следует, что эта энергия будет на бесконечную величину больше энергии всех конфигураций с $\beta \neq 0$.

К аналогичному выводу мы придем, если попытаемся использовать в качестве реперной точки для отсчета энергии “море” свободных массивных фермионов, масса которых равна массе “составляющих кварков” M . Чтобы убедиться в этом наиболее наглядным образом, будем действовать аналогично вычислению эффекта Казимира для электромагнитного поля [29].

Энергия “моря” свободных фермионов массы M в ящике размерами $2x_2$ имеет вид

$$E_{\text{free}} = -\frac{2x_2}{2\pi} \int dk \sqrt{k^2 + M^2} = -M \frac{\varrho}{\pi} \int_0^\infty dx \sqrt{x^2 + 1}. \quad (5.20)$$

Для наших целей будет достаточно рассмотреть разность между (5.20) и энергией “моря” для конфигурации $\alpha = 0$, т.к. разность энергий между этой конфигурацией и всеми остальными при $\beta \neq 0$ конечна. Тогда все фермионные моды находятся из уравнения

$$\varrho x_n + \arctg x_n = \pi n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.21)$$

Заметим сразу, что если в уравнении (5.21) рассматривать n как непрерывную переменную, то его решение $x(n)$ будет нечетной функцией аргумента n , а соответствующая функция $\varepsilon(n)$ — четной. Это обстоятельство дает возможность для оценки суммы $\sum_n \varepsilon_n$ воспользоваться формулой Эйлера–Маклорена

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(n) = \int_0^\infty dn \varepsilon(n) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_l}{l!} [\varepsilon^{(l-1)}(\infty) - \varepsilon^{(l-1)}(0)], \quad (5.22)$$

где B_l — числа Бернулли. Как и при вычислении оригинального эффекта Казимира, будем предполагать ультрафиолетовое обрезание. Тогда для всех l имеем $\varepsilon^{(l-1)}(\infty) = 0$. Кроме того, поскольку $\varepsilon(n)$ — четная функция, то все $\varepsilon^{(2l-1)}(0) = 0$, а поскольку, в свою очередь, все $B_{2l-1} = 0$, кроме $B_1 = -1/2$, то из (5.22) получим

$$\frac{1}{2}\varepsilon(0) + \varepsilon(1) + \varepsilon(2) + \dots = \int_0^N dn \varepsilon(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\Lambda dx \left(\varrho + \frac{1}{1+x^2} \right) \sqrt{1+x^2}, \quad (5.23)$$

где верхние пределы в интегралах символизируют, что формула (5.23) имеет смысл только под знаком ультрафиолетового обрезания. Таким образом, для энергии “моря” фермионов в конфигурации $\alpha = 0$, $\beta = \varrho$ получим следующее интегральное представление:

$$\mathcal{E}_{\text{sea}}(0, \varrho) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\Lambda dx \left(\varrho + \frac{1}{1+x^2} \right) \sqrt{1+x^2}. \quad (5.24)$$

При этом в разности $\mathcal{E}_{\text{sea}}(0, \varrho) - \mathcal{E}_{\text{free}}(\varrho)$ главные расходимости, как и следовало ожидать, сокращаются, но остается логарифмическая расходимость

$$\mathcal{E}_{\text{sea}}(0, \varrho) - \mathcal{E}_{\text{free}}(\varrho) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\Lambda \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (5.25)$$

которая не зависит от ϱ и никаким разумным контрчленом тем самым не компенсируется. Таким образом, мы снова видим, что энергия “моря” свободных фермионов (теперь уже массивных) на бесконечную положительную величину больше, чем энергия “моря” фермионов в мешке с ненулевой промежуточной областью.

В результате мы приходим к следующим выводам.

Во-первых, трехфазовая модель мешка с ненулевой протяженностью промежуточной области d на самом деле не имеет гладкого предела при $d \rightarrow 0$, хотя на уровне лагранжиана (3.1) такая возможность существовала, по крайней мере чисто формально. Иными словами, в такой трехфазовой модели радиальная протяженность границы может быть сколь угодно малой, но не тождественно нулевой, что до некоторой степени соответствует общим физическим представлениям о структуре многофазовых систем.

Во-вторых, хотя сравнение расходящихся величин — достаточно условная операция, тем не менее можно утверждать, что перенормированная энергия $\mathcal{E}_{\text{sea}}(\alpha, \beta)$ лежит ниже, чем энергия “моря” свободных фермионов, причем соответствующий энергетический барьер бесконечен. Это также до некоторой степени отвечает интуитивным представлениям о том, что свободные фермионы вряд ли могут быть хорошим первым приближением в задаче о конфайнменте. Конечный произвол в перенормировке $\mathcal{E}_{\text{sea}}(\alpha, \beta)$, связанный с неопределенностью в выборе точки вычитания, должен при этом фиксироваться, как и в “классической” перенормировочной процедуре, через задание физических значений соответствующего числа параметров. В нашей упрощенной $(1+1)$ -мерной модели мы этим заниматься не будем, ограничившись вышеприведенными соображениями, а перейдем к анализу перенормированной полной энергии мешка

$$\mathcal{E}_{\text{bag}} = \Delta \mathcal{E}_{\text{reg}}(\alpha, \beta) + 2\mu \frac{\pi^2}{g^2} \frac{r+1}{\mu \varrho + 1} \quad (5.26)$$

как функции размера мешка ϱ , параметра μ и целочисленного индекса r при различных точках вычитания.

6. ПОЛНАЯ ЭНЕРГИЯ МЕШКА $\mathcal{E}_{\text{bag}}$ КАК ФУНКЦИЯ ЕГО ПАРАМЕТРОВ

По понятным причинам мы сделаем основной акцент на поведении энергии $\mathcal{E}_{\text{bag}}$ как функции ϱ . Первое свойство $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$ прямо следует из результатов предыдущего раздела. При $\varrho \rightarrow r/\mu$ размер переходной области стремится к нулю, и тогда из-за сингулярного поведения $\Delta\mathcal{E}_{\text{log}}$ при $\beta \rightarrow 0$ энергия мешка приобретает логарифмическую особенность

$$\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho) \rightarrow -\frac{1}{\pi} \ln \left(\varrho - \frac{r}{\mu} \right), \quad \varrho \rightarrow \frac{r}{\mu}. \quad (6.1)$$

Само по себе появление такого непроницаемого кора в нашей модели можно было бы считать хорошим признаком, если бы не сам размер кора $\varrho_{\text{min}} = r/\mu$, который в терминах размерных величин означает, что в данной модели размер области конфайнмента должен быть заведомо больше, чем комптоновская длина волны мезона. Это явно завышенное (как минимум в 3 раза) значение для размера области конфайнмента в реальных адронах. Однако существует ряд причин, по которым в рассматриваемом случае результат получается именно таким. Во-первых, мы рассматриваем упрощенную $(1+1)$ -мерную однофлейворную модель с простейшим самодействием бозонов потенциального типа во внешней области. Данная модель содержит все необходимые принципиальные моменты теории многофазовых киральных мешков, но в деталях может существенно отличаться от реалистического $(3+1)$ -мерного случая с существенно нелинейными мезонными лагранжианами во внешней области. Во-вторых, что, по-видимому, наиболее существенно, в целях сохранения максимальной общности и упрощения выкладок мы используем во внешней области не все солитонное решение, а только его “юкавский хвост”, что на самом деле может быть и не оправдано. Наконец, можно ввести дополнительные степени свободы, если допустить возможность скачков значений бозонного поля на границах между фазами и исходить из возможности ультрафиолетовой перенормировки разрывов [23]. Поэтому становится ясно, что существует много факторов, учет которых позволит изменить значение ϱ_{min} в лучшую сторону.

Второе свойство $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$ также связано с результатами перенормировочной процедуры, рассмотренной в предыдущем разделе, но относится уже к поведению перенормированной энергии фермионного “моря” при больших ϱ . В этой области $\mathcal{E}_{\text{sea}}(\alpha, \beta)$ снова неограниченно растет, но теперь этот рост связан не с ультрафиолетовой асимптотикой первой ветви фермионного спектра, как при $\varrho \rightarrow 0$, а с “инфракрасной особенностью” второй ветви. Чтобы разобраться с этим эффектом, рассмотрим более детально уравнение (4.15), определяющее уровни второй ветви. Графическое представление этого уравнения при $0 < \varepsilon_n \leq 1$ приведено на рис. 2. Начало графика правой части уравнения (4.15) при $x = 0$ есть $y_1 = (\beta + 1)/(\beta + \beta^2/2)$, левой — $y_2 = \text{tg} \alpha$. Точка $x_4 = \sqrt{1 - (\pi/2\alpha)^2} + \epsilon$ является в данном случае последним корнем, лежащим чуть правее последней асимптоты тангенса из левой части этого уравнения, а $x_0 = 1$ — конечная точка интервала изменения переменной x для второй ветви.

Как следует из (4.20), при $\varrho \rightarrow \infty$ оба параметра α, β также линейно растут, причем $\alpha/\beta = r$. Тогда из рис. 2 сразу следует, что при $\varrho \rightarrow \infty$ число уровней на второй ветви растет, а их порог приближается к $\varepsilon = 0$. Более точно, наинизший уровень спектра ε_{min} будет располагаться чуть ниже, чем $\pi/2\alpha$. Это приводит к существенному росту вкла-

Рис. 2.

да в перенормированную энергию “моря” от однопетлевого контрчлена (5.9), поскольку, как уже подчеркивалось выше, он обязательно должен быть суммой по всем модам спектра, в том числе и по модам второй ветви.

Чтобы оценить вклад таких “инфракрасных мод” с энергиями порядка $\pi/2\alpha$ в энергию $\mathcal{E}_{CT}$, воспользуемся тем обстоятельством, что при $\alpha, \beta \rightarrow \infty$ фермионный спектр становится квазинепрерывным. Тогда от суммы $\sum_n$ можно перейти к интегралу $\int dx$. Для этого представим уравнение (4.15) в виде

$$\alpha\sqrt{1-x^2} = \pi n + \operatorname{arctg} \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{x \operatorname{ch} \beta x + \operatorname{sh} \beta x}{\operatorname{ch} \beta x + x \operatorname{sh} \beta x - 1} \right]. \quad (6.2)$$

Целое число n в уравнении (6.2) – это текущий номер графика тангенса левой части уравнения (4.15) на рис. 2 и одновременно номер соответствующего корня x_n и тем самым уровня ε_n . Поэтому в непрерывном пределе для второй ветви переход от суммы к интегралу происходит по следующему правилу:

$$\sum_{\substack{n \\ \text{область II}}} \rightarrow -\frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-(\pi/2\alpha)^2}} dx \left[-\frac{\alpha x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x \left(\beta + \frac{1}{1-x^2} \right) - \frac{\operatorname{sh}(\beta x + \gamma)}{\sqrt{1-x^2}}}{\operatorname{ch}(\beta x + \gamma) - \sqrt{1-x^2}} \right]. \quad (6.3)$$

Общий знак минус перед интегралом учитывает то, что, когда x_n растет, n , наоборот, убывает. В результате для вклада от второй ветви спектра в энергию $\mathcal{E}_{CT}$ при $\varrho \rightarrow \infty$ получаем следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_{CT})_{\text{область II}} &= -\frac{\beta}{2\pi\varrho} \int_0^{\sqrt{1-(\pi/2\alpha)^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \times \\ &\times \left[-\frac{\alpha x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x \left(\beta + \frac{1}{1-x^2} \right) - \frac{\operatorname{sh}(\beta x + \gamma)}{\sqrt{1-x^2}}}{\operatorname{ch}(\beta x + \gamma) - \sqrt{1-x^2}} \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

При $\alpha \rightarrow \infty$ это выражение логарифмически расходится на верхнем пределе. В этом и состоит главный эффект от “инфракрасной особенности” фермионного спектра при больших ϱ , который сводится к тому, что в энергии $\mathcal{E}_{CT}$ при $\varrho \rightarrow \infty$ возникает растущая составляющая вида

$$\frac{\alpha\beta}{2\pi\varrho} \int_0^{\sqrt{1-(\pi/2\alpha)^2}} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\alpha\beta}{2\pi\varrho} \ln \alpha + O\left(\frac{\alpha\beta}{\varrho}\right). \quad (6.5)$$

Используя правило (6.3) и учитывая структуру возникающих интегралов, нетрудно убедиться в том, что при $\varrho \rightarrow \infty$ вклад второй ветви в сумму $\sum_n \varepsilon_n$ будет вести себя не более чем линейно по α, β . Аналогичное, но существенно более трудоемкое исследование можно провести и для первой ветви спектра. В целях экономии места мы не будем здесь на этом останавливаться и приведем лишь окончательный ответ: после ультрафиолетовой перенормировки вклад от первой ветви как в $\mathcal{E}_{\text{sea}}$, так и в $\mathcal{E}_{CT}$ при $\varrho \rightarrow \infty$ ведет себя не более чем линейно по α, β и тем самым по ϱ .

Таким образом, главный вклад при $\varrho \rightarrow \infty$ в сумму $(\mathcal{E}_{\text{sea}} + \mathcal{E}_{CT})(\alpha, \beta)$ дает именно инфракрасная особенность второй ветви спектра, причем вклад существенно положительный и растущий. Заметим, однако, что в перенормированную энергию “моря” входит не сама эта величина, а разность $\Delta\mathcal{E}_{\text{reg}} = (\mathcal{E}_{\text{sea}} + \mathcal{E}_{CT})(\alpha, \beta) - (\mathcal{E}_{\text{sea}} + \mathcal{E}_{CT})(\alpha', \beta')$. Поэтому поведение эффективной энергии мешка при $\varrho \rightarrow \infty$ существенно зависит от выбора точки вычитания, фактически от соотношения между $\alpha\beta \ln \alpha$ для текущих значений параметров α, β мешка, определяемых по соотношениям (4.20), и для точки вычитания. В частности, если точка вычитания выбирается в виде $\alpha' = 0, \beta' = \varrho$, то вторая ветвь в фермионном спектре вообще отсутствует. При такой точке вычитания перенормированная энергия “моря”, а с ней и эффективная полная энергия мешка при $\varrho \rightarrow \infty$, будет растущей функцией вида

$$\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{r}{(r+1)^2} \varrho \ln \varrho + O(\varrho), \quad \varrho \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

С другой стороны, если мы выберем в качестве точки вычитания область, близкую к $\alpha' = \beta' = \varrho/2$, то почти наверняка доминировать будет соответствующее составляющей (6.5) растущее слагаемое в $\mathcal{E}_{CT}(\alpha', \beta')$, и мы получим обратную ситуацию, когда $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$ при $\varrho \rightarrow \infty$ будет неограниченно убывать. Это, однако, не является дефектом теории, т.к. речь идет о перенормированных величинах для того случая, когда нет определенности в выборе точки вычитания. В конечном счете процедура перенормировки есть не более чем рецепт, который позволяет из расходящихся величин получать конечные путем добавления других расходящихся величин. Более того, поскольку текущие значения параметров α, β мешка в области асимптотически больших ϱ связаны друг с другом соотношением $\alpha/\beta = r$, то всегда существует бесконечно много точек вычитания, для которых $\alpha'\beta' \ln \alpha' < \alpha\beta \ln \alpha$, и, таким образом, мы будем иметь физически наиболее желательный рост (6.6) эффективной полной энергии мешка.

На этом мы вынуждены закончить аналитическое исследование функции $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$, т.к. даже в квазинепрерывном случае возникающие интегралы слишком сложны и не позволяют уточнить детали поведения этой функции в аналитической форме. Перейдем к результатам численных вычислений. Эти результаты будут приводиться непосредственно

Рис. 3.

для $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$. Разбирать по отдельности поведение перенормированной энергии фермионного “моря” $\mathcal{E}_{\text{sea}}$ и вклада от бозонного поля $\mathcal{E}_{\varphi}$ особого смысла не имеет, поскольку $\mathcal{E}_{\varphi}$ является гладкой, медленно убывающей явной функцией (4.8) и влияет реально только на положение минимума полной энергии по оси ординат, а не на общую топологию и кривизну функции $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$. Все наиболее существенные особенности поведения полной энергии – наличие минимума, логарифмическая особенность при $\varrho = r/\mu$ и растущая или убывающая асимптотика на бесконечности – полностью совпадают с аналогичными характеристиками для $\mathcal{E}_{\text{sea}}$. Кроме того, поскольку параметр g входит только в $\mathcal{E}_{\varphi}$, зависимость от него оказывается достаточно простой, поэтому далее мы положим $g = 1$.

Численные вычисления $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$ проводились для различных точек вычитания. Первая из них есть $\alpha' = 0$, $\beta' = \varrho$ как наиболее характерная для получения нужного нам поведения полной энергии мешка. На рис. 3 приведены графики функции $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$ для этой точки вычитания при $\mu = 0.1$ и первых значений $r = 1, 2, 4$.

Отметим, что с ростом r растет как положение минимума $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$, так и само минимальное значение $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$. Кривизна при этом уменьшается, что вполне согласуется с интерпретацией конфигураций при $r > 1$ как возбужденных состояний мешка.

Для того чтобы более детально показать логарифмическую особенность функции $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$ при $\varrho \rightarrow r/\mu$ и поведение кривых в окрестности минимума в зависимости от r и μ , на рис. 4 приведены графики $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$ для той же точки вычитания и тех же значений $r = 1, 2, 4$, но при $\mu = 0.4$ (рис. 4а) и $\mu = 1.0$ (рис. 4б). Из этих графиков видно, что при $\varrho \rightarrow \infty$ скорость роста $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$ уменьшается с увеличением r в полном соответствии с формулой (6.6). Нельзя гарантировать, однако, что для тех интервалов изменения ϱ , на которых проводились вычисления, уже достигается чистая асимптотика (6.6), т.к. логарифм является слишком медленной функцией, чтобы эту асимптотику можно было надежно отличить от следующих линейных по ϱ членов асимптотического разложения $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$ на этих интервалах.

По логике вещей вторым способом вычитания должно было бы быть вычитание на

Рис. 4.

конфигурацию мешка с инфинитезимальным, но ненулевым β . Однако это по понятным причинам оказывается технически достаточно сложным. Поэтому мы рассмотрим другой способ, который в некотором смысле эквивалентен вычитанию на $\beta \rightarrow 0$. Его суть состоит в том, что мы вычитаем из суммы $\sum_n \varepsilon_n$ другую расходящуюся сумму с тем же индексом суммирования n , общий член которой в точности совпадает с расходящейся частью асимптотики (5.2), в результате чего получается конечная величина

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{reg}}'' = \sum_n \varepsilon_n - \sum_n \left[1 + \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{\varrho} + \frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{\frac{\pi}{2} + \pi n} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (6.7)$$

Рис. 5.

При этом никакого однопетлевого контрчлена добавлять не надо, т.к. все расходимости уже скомпенсированы вычитаемой суммой. В этом смысле это вычитание похоже на вычитание в точке $\beta = 0$, когда однопетлевой контрчлен тоже отсутствует. По существу, такое вычитание является наиболее прямолинейным способом компенсации расходимостей в исходной сумме с сохранением непрерывной зависимости результата вычитания от параметров. Физический смысл такой процедуры при этом, естественно, до некоторой степени утрачивается. Следует, однако, отметить, что только в $(1 + 1)$ -мерном случае теория со взаимодействием $\mathcal{L}_I = G\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\pi)\psi$ является (супер)перенормируемой и все контрчлены имеют ясный физический смысл. При переходе к большему числу пространственных измерений это уже не так. Поэтому процедуру компенсации расходимостей в энергии, основанную на формуле (6.7), не следует рассматривать как не имеющую под собой никакой мотивации.

На рис. 5 приведены результаты такой “перенормировки” в сравнении с вычитанием на $\alpha = 0$. Сплошной линией изображен график функции $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\rho)$ при вычитании по формуле (6.7) при $\mu = 0.1$ и $r = 1$. Штриховая линия соответствует $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\rho)$ при вычитании на $\alpha' = 0$, $\beta' = \rho$.

Наконец, чтобы показать зависимость от точки вычитания, на рис. 6 приведены графики для функции $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\rho)$ при вычитании на конфигурации с различным значением параметров α' и β' , когда $\alpha'/\beta' = 0; 3/7; 3/2; 19$ при $\mu = 0.1$ (рис. 6а) и $\mu = 0.8$ (рис. 6б) для $r = 1$. Сплошные линии соответствуют $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\rho)$ при $\alpha'/\beta' = 0$ (кривые 1) и $\alpha'/\beta' = 19$ (кривые 2), а штриховые — $\alpha'/\beta' = 3/2$ (кривые 3) и $\alpha'/\beta' = 3/7$ (кривые 4). Из этих графиков хорошо видно, что для $\alpha'/\beta' = 3/2$ перенормированная энергия мешка убывает при $\rho \rightarrow \infty$, т.е. реализуется упоминавшийся выше эффект доминирующей роли $\mathcal{E}_{ST}(\alpha', \beta')$. Однако уже при $\alpha'/\beta' = 3/7$ и $\alpha'/\beta' = 19$ энергия снова начинает расти. Из численных расчетов следует, что убывание при больших ρ наиболее четко проявляется при $\alpha'/\beta' = 3/2$, а не $\alpha'/\beta' = 1$. Это, по-видимому, обусловлено тем, что на тех интервалах изменения ρ , на которых производились

Рис. 6.

вычисления, замена суммы на интеграл еще дает заметную ошибку. Кроме того, как уже упоминалось выше, логарифм является слишком медленной функцией. Поэтому на этих интервалах главный член в (6.6) еще не доминирует над следующими за ним линейными по ϱ членами асимптотического разложения $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$ при больших ϱ , и, таким образом, зависимость перенормированной энергии от точки вычитания еще может достаточно существенно отличаться от чистой асимптотики (6.6).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной работы было построение содержательной модели гибридного кирального мешка, в которой заранее не предполагается точная эквивалентность фермионной и бозонной (мезонной) фаз. Наши результаты показывают, что такая модель действительно может быть сформулирована достаточно последовательным образом и по ряду позиций может оказаться более эффективной для описания низкоэнергетической физики адронов, чем стандартные гибридные модели, основанные на ПЧК.

Прежде всего отметим, что исходная формулировка модели – строго локальная полевая теория. Несмотря на обилие классических решений, которыми приходится оперировать, нарушение ковариантности здесь лишь спонтанное, поэтому может быть устранено по методу работ [30] с помощью ковариантных групповых переменных центра инерции локализованной квантово-полевой системы. К числу основных положительных моментов следует отнести также более корректную постановку киральных граничных условий, при которой все составляющие в лагранжиане имеют ясный физический смысл, наличие промежуточной фазы, описывающей квазисвободные массивные “составляющие кварки”, и физически вполне приемлемый вид полной энергии мешка как функции его размера в виде бесконечно глубокой ямы с четко выделенным минимумом. Более того, наш анализ показывает, что радиальная протяженность промежуточной области d , на самом деле, не может быть равна нулю, хотя на уровне исходного лагранжиана формальный предел $d \rightarrow 0$ существует и приводит к стандартной двухфазовой модели гибридного мешка. Это означает, что трехфазовая модель не имеет гладкого перехода в двухфазовую конфигурацию. Именно поэтому она проявляет существенно иные свойства по сравнению со стандартными моделями гибридных мешков.

Помимо этого, в трехфазовой модели более четко проявляется заложенное в ней с самого начала условие конфайнмента фермионов. В частности, нет необходимости вводить член с вакуумным давлением B , который в стандартном подходе вносится в теорию из немодельных соображений. Это связано с тем, что в рассматриваемом случае эффект Казимира для “дираковского моря” уже сам по себе дает неограниченный рост энергии на больших расстояниях. Сравнение неперенормированной энергии “дираковского моря” в таком мешке с энергией “моря” свободных фермионов в том же объеме показывает, что последняя лежит всегда выше, причем соответствующий энергетический барьер бесконечен.

Заметим также, что вклад от “морских” фермионов доминирует над всеми остальными компонентами в полной энергии и при малых расстояниях, обуславливая логарифмическую особенность в функции $\mathcal{E}_{\text{bag}}(\varrho)$ при $\varrho \rightarrow r/\mu$. Это дает основание предположить, что вклад от “морских” фермионов будет являться достаточно существенным для всех характеристик такого мешка, что вполне укладывается в современные представления о роли “морских” кварков в адронах.

Трехфазовая модель кирального мешка с промежуточной областью оказалась во многом богаче по содержанию, чем предполагалось изначально. В частности, уже в приближении среднего поля мы получаем вместо одной конфигурации целую серию различных состояний мешка, нумеруемых целочисленным индексом s , главное отличие между которыми состоит в различных значениях градиента бозонного поля в переходной области. По найденной нами зависимости их энергии от s для четного случая очевидно,

что их следует интерпретировать как основное и возбужденные состояния мешка с одинаковыми квантовыми числами. При этом в определенной степени реализуется принцип “ядерной демократии” — все эти состояния возникают в рамках одного и того же s -числового приближения по бозонному полю без учета квантовых флуктуаций последнего. Этот результат также следует рассматривать в целом как положительный, т.к. в эффективных киральных моделях такого типа динамика бозонного поля является существенно неперенормируемой и корректный учет его квантовых флуктуаций сопряжен с серьезными трудностями.

Необходимо также еще раз отметить принципиальный вопрос о выборе способа вычисления средних по “дираковскому морю” для фермионных мешков. Используемый нами способ основан на дискретности энергетического спектра фермионов и позволяет с помощью достаточно очевидных рассуждений прийти к весьма простому решению самосогласованных уравнений мешка в промежуточной области. Подчеркнем, однако, что, несмотря на приведенные аргументы в пользу именно такого способа вычисления средних по “морю”, у нас нет оснований полностью отвергать альтернативные варианты типа температурной регуляризации. Вопрос о том, какой именно способ является физически наиболее адекватным, может быть решен только путем детального исследования реалистических моделей.

В этой работе мы не ставили задачу детального исследования всех возможных типов такого трехфазового кирального мешка и их свойств, уделив главное внимание наиболее принципиальным вопросам. В частности, не был рассмотрен случай четной конфигурации бозонного поля, соответствующий нулевому значению полного барионного заряда мешка, случай нечетного значения параметра s , задающего градиент бозонного поля в переходной области. Не изучалась также зависимость $\varrho_{\min}$ от деталей динамики бозонного поля во внешней области. Кроме того, для упрощения вычислений мы ограничились рассмотрением чисто статической задачи, т.к. явно ковариантная формулировка требует существенного изменения всей техники расчетов, поскольку инвариантная динамика полей в системе центра инерции имеет специфический конечно-разностный вид [30]. Эти задачи будут рассмотрены отдельно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по грантам 96-02-18097, 96-15-96674 и Санкт-Петербургского конкурсного центра фундаментального естествознания, грант 97-0-6.2-28.

* * *

Данная работа посвящена памяти нашего друга и коллеги Федора Александровича Лунева, безвременно ушедшего из жизни в июле 1997 г. Ф. А. Лунев всегда проявлял активный интерес к проблемам низкоэнергетической КХД, в частности к моделям кварковых мешков, где он успешно развивал направление, основанное на использовании сингулярных решений неабелевых калибровочных полей. Мы глубоко благодарны ему за плодотворные научные дискуссии как по теме данной работы, так и по многочисленным другим аспектам непертурбативных эффектов в квантовой теории поля, которые были близки ему благодаря его широкому кругозору. Мы всегда будем хранить память о нем как об истинном ученом и нашем хорошем товарище.

Список литературы

- [1] *P. N. Bogoliubov.* Ann. Inst. Henri Poincaré. 1967. V. 8. P. 163; *П. Н. Боголюбов, А. Е. Дорухов.* ЭЧАЯ. 1987. Т. 18. С. 917.
- [2] *A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, V. Weisskopf.* Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 3471; *A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn.* Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 2559; *T. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson, J. Kiskis.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 2060; *A. Chodos, C. B. Thorn.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 2733.
- [3] *W. A. Bardeen, M. S. Chanowitz, S. D. Drell, M. Weinstein, T. M. Yan.* Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 1094.
- [4] *M. Rho.* Phys. Rep. 1994. V. 240. P. 1.
- [5] *A. Hosaka, H. Toki.* Phys. Rep. 1996. V. 277. P. 65.
- [6] *T. H. R. Skyrme.* Proc. Roy. Soc. A. 1958. V. 247. P. 260; 1959. V. 252. P. 236; 1961. V. 262. P. 237.
- [7] *G. Holzwardt, B. Schweisinger.* Rep. Progr. Phys. 1986. V. 49. P. 825.
- [8] *I. Zahed, G. E. Brown.* Phys. Rep. 1986. V. 142. P. 1.
- [9] *M. Rho, A. S. Goldhaber, G. E. Brown.* Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 747; *J. Goldstone, R. L. Jaffe.* Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 1518.
- [10] *S. Nadkarni, H. B. Nielsen, I. Zahed.* Nucl. Phys. B. 1985. V. 253. P. 308; 1986. V. 263. P. 1, P. 23.
- [11] *S. Coleman.* Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 2088; *S. Mandelstam.* Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 3026; *B. Schroer, T. Truong.* Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 1684.
- [12] *R. Banerjee.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 465. P. 157; *R. Banerjee, E. C. Marino.* Phys. Rev. D. 1996. V. 56. P. 3763.
- [13] *M. Wakamatsu.* Phys. Lett. B. 1995. V. 349. P. 204.
- [14] *A. E. Dorokhov, N. I. Kochelev, Y. Zubov.* Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8. P. 603.
- [15] *M. Lavelle, D. McMillan.* Phys. Rep. 1997. V. 279. P. 1.
- [16] *M. Creutz.* Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 1749; *M. Creutz, K. Soh.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 443.
- [17] *Р. Раджараман.* Солитоны и инстантоны. М.: Мир, 1985.
- [18] *M. K. Banerjee, W. Broniowski, T. D. Cohen.* A Chiral Quark Soliton Model. In: Chiral Solitons. Ed. K. F. Liu. Singapore: World Scientific, 1987. P. 255.
- [19] *D. I. Diakonov, V. Yu. Petrov, P. V. Povilitsa.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 306. P. 809.
- [20] *M. C. Birse.* Progr. Part. Nucl. Phys. 1991. V. 25. P. 1.
- [21] *R. Alkofer, H. Reinhardt, H. Weigel.* Phys. Rep. 1996. V. 265. P. 139.
- [22] *R. Perry, M. Rho.* Phys. Rev. D. 1986. V. 34. P. 1169.
- [23] *К. А. Свешников, П. К. Силаев.* ТМФ. 1996. Т. 108. С. 212; *K. Sveshnikov, P. Silaev, I. Cherednikov.* Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. P. 465.
- [24] *D. K. Campbell, Y.-T. Liao.* Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 2093.
- [25] *A. J. Niemi, G. W. Semenoff.* Phys. Rep. 1986. V. 135. P. 99.
- [26] *J. Goldstone, F. Wilczek.* Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 986.
- [27] *R. Daschen, B. Hasslacher, A. Neveu.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 2443.
- [28] *R. MacKenzie.* Z. Phys. C. 1987. V. 36. P. 389.
- [29] *К. Ицксон, Ж.-Б. Зюбер.* Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984.
- [30] *К. А. Свешников.* Phys. Lett. A. 1989. V. 136. P. 1; *К. А. Свешников.* ТМФ. 1990. Т. 82. С. 55.

Поступила в редакцию 31.III.1998 г.