Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, З. Т. Тугенов, Построение множества p -адических распределений, *ТМФ*, 2017, том 193, номер 2, 333–342

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9314>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:34:46

© 2017 г.

У. А. Розиков*, З. Т. Тугенов*

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА $\mathbb{Z}_p$ -АДИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Построены несколько p -адических распределений на множестве $\mathbb{Z}_p$ p -адических целых чисел с применением для p -адического случая некоторых методов теории вещественнозначных мер Гиббса на деревьях Кэли. Более того, приведены условия, при которых данные p -адические распределения становятся p -адическими мерами (т. е. ограниченными распределениями).

Ключевые слова: деревья Кэли, p -адические числа, p -адические распределения, p -адические меры.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9314>

1. ВВЕДЕНИЕ

p -Адическое распределение, принимающее значения в кольце p -адических чисел [1], является аналогом обычных распределений. По аналогии с мерой на измеримом пространстве p -адическая мера является специальным случаем p -адического распределения, а именно, p -адическое распределение, принимающее значения в нормированном пространстве, называется p -адической мерой, если его значения на открытых компактных подмножествах ограничены.

Основной целью построения p -адических мер является их применение для интегрирования p -адическизначных функций. Процедура построения схожа с классической вплоть до идеи использования римановских сумм. Отметим, что эти суммы могут не сходиться (даже для непрерывных функций), если вместо p -адических мер использовать неограниченные p -адические распределения. Теория p -адических мер также является полезной применительно к p -адическим L -функциям согласно результатам работ Мазура (более подробно см. книгу [1] и статью [2]).

Работа частично поддержана Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант 0828/GF4).

*Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: rozikovu@yandex.ru, zohidboy@mail.ru

Одно из первых приложений p -адических чисел в квантовой физике возникло в рамках квантовой логики [3]. Отметим, что эту p -адическую модель нельзя описать, используя обычные вещественнозначные вероятностные меры. В теории вещественнозначных вероятностных мер полезным инструментом для построения мер является теорема Колмогорова о продолжении меры (см., например, книгу [4]). Неархимедов аналог теоремы Колмогорова был доказан в статье [5]. Этот результат позволяет конструировать широкий класс p -адических распределений, случайных процессов и дает возможность развивать статистические методы применительно к p -адической теории.

Различные p -адические модели в статистической физике и p -адические распределения рассмотрены в работах [6]–[16].

В настоящей работе мы строим несколько p -адических распределений и мер на множестве $\mathbb{Z}_p$ p -адических целых чисел, применяя некоторые методы теории вещественнозначных мер Гиббса на деревьях Кэли. Для этого каждый элемент множества $\mathbb{Z}_p$ представляется как путь на (полу)бесконечном полудереве Кэли. Далее, используя известное соотношение для распределений (см. формулу (2.2)), мы показываем, что любой набор заданных p -адических распределений можно использовать для построения новых распределений. Более того, мы приводим условия, при которых эти p -адические распределения становятся p -адическими мерами.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. p -Адические числа. Пусть $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел. При фиксированном числе p каждое рациональное число $x \neq 0$ можно представить в виде

$$x = p^r \frac{n}{m},$$

где $r, n \in \mathbb{Z}$, m – положительное целое число, а n и m суть числа, взаимно простые с p : $(p, n) = 1$, $(p, m) = 1$. p -Адическая норма числа x дается выражением

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Данная норма неархимедова и удовлетворяет так называемому сильному неравенству треугольника

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по p -адической норме приводит к полю p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Любое p -адическое число $x \neq 0$ можно единственным образом представить в каноническом виде

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots), \quad (2.1)$$

где $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и целые числа x_j удовлетворяют условиям $x_0 > 0$, $0 \leq x_j \leq p - 1$. В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

Элементы множества $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ называются p -адическими целыми числами.

Основы p -адического анализа и p -адической математической физики приведены в книгах [1], [17], [18].

2.2. p -Адическое распределение и мера. Пусть $(X, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, где $\mathcal{B}$ есть алгебра подмножеств X . Функция $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ называется p -адическим *распределением*, если для любых $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, выполняется равенство

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

p -Адическое распределение μ называется *мерой*, если оно ограничено, т. е. если

$$|\mu(A)|_p < +\infty \quad \text{для любого } A \in \mathcal{B}.$$

Мера называется *вероятностной*, если $\mu(X) = 1$ (см., например, работы [19], [20]).

В метрическом пространстве $\mathbb{Q}_p$ (с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|_p$) в качестве базиса открытых множеств можно выбрать систему множеств вида

$$a + (p^N) = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq \frac{1}{p^N} \right\}, \quad a \in \mathbb{Q}_p, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Такое множество называется *интервалом*. Справедлива следующая теорема (см. книгу [1]).

ТЕОРЕМА 1. *Любое отображение μ из множества интервалов, содержащихся в $X \subset \mathbb{Q}_p$, для которого при всех $a + (p^n) \subset X$ верно равенство*

$$\mu(a + (p^n)) = \sum_{b=0}^{p-1} \mu(a + bp^n + (p^{n+1})), \quad (2.2)$$

можно единственным образом продолжить до p -адического распределения на X .

Выражение (2.2) называется соотношением для распределений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ – некоторые распределения со значениями в $\mathbb{Q}_p$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{Q}_p$ суть произвольные константы, тогда

$$\mu = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu_i \quad (2.3)$$

является распределением.

В самом деле, пусть

$$\mu(a + (p^n)) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu_i(a + (p^n)),$$

тогда μ удовлетворяет соотношению (2.2), поскольку ему удовлетворяет каждое распределение μ_i . Если в рамках теории вещественнозначных мер рассмотреть выпуклое множество таких мер, тогда для того, чтобы описать все точки этого множества, достаточно знать все крайние точки множества. В таких ситуациях меры вида (2.3) не являются крайними и их можно рассматривать как линейные комбинации крайних мер. В теории (вещественных) мер Гиббса для заданного гамильтониана (подробнее см. книгу [21]) множество всех таких мер является выпуклым и замкнутым.

Рис. 1. Полудерево Кэли третьего порядка. Выделенный жирной линией путь π представляется последовательностью 121.... Слева (соответственно справа) от этого пути распределение μ совпадает с μ_1 (соответственно с μ_2).

Для того чтобы построить новые крайние точки этого множества, в работе [22] было предложено использовать некоторые известные крайние точки. В настоящей статье мы применяем идеи работы [22] для построения новых p -адических распределений на основе уже известных распределений (см. теорему 2). Доказательство теоремы 3 напоминает процедуру построения крайних мер Гиббса при заданном граничном условии на дереве Кэли (более подробно теория мер Гиббса на деревьях рассмотрена в монографии [23]).

2.3. Дерево Кэли. Дерево Кэли (решетка Бете [24]) Γ^k порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево (граф без циклов), из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер. Пусть $\Gamma^k = (V, L)$, где V – множество вершин, а L – множество ребер. Две вершины x и y называются *ближайшими соседями*, если существует соединяющее их ребро $l \in L$. Мы будем использовать запись $l = \langle x, y \rangle$. Набор пар ближайших соседей $\langle x, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, y \rangle$ называется *путем* из вершины x в вершину y . Расстояние $d(x, y)$ на дереве Кэли равно числу ребер кратчайшего пути, соединяющего x и y .

Если из дерева Кэли Γ^k удалить произвольное ребро $\langle x^0, x^1 \rangle = l \in L$, оно разбивается на две компоненты – два полубесконечных дерева Γ_0^k и Γ_1^k (каждое из них называется полудеревом). В настоящей статье мы рассматриваем полудерево $\Gamma_0^k = (V^0, L^0)$ (см. рис. 1).

Для фиксированной вершины $x^0 \in V^0$, называемой корнем, введем обозначение

$$W_n = \{x \in V^0 \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n^0 = \bigcup_{m=0}^n W_m.$$

На дереве Γ^k можно ввести частичную упорядоченность. Будем говорить, что $y > x$, если существует путь $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ из x в y , “направленный вверх”,

т.е. такой, что $d(x_m, x^0) = d(x_{m-1}, x^0) + 1, m = 1, \dots, n$. Множество вершин $V_x = \{y \in V^0 \mid y \geq x\}$ и соединяющих их ребер образуют полубесконечное дерево Γ_x^k , “растущее” из вершины $x \in V^0$.

Пусть p – простое число. В настоящей статье мы рассматриваем полудерево Кэли порядка p . Выберем на дереве Γ_0^p произвольный (конечный или бесконечный) путь $x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$, начинающийся из точки x^0 . Можно представить этот путь через последовательность $i_0 i_1 i_2 \dots$, где $i_n = 0, 1, \dots, p-1$. А именно, обозначим через $l_0(x), l_1(x), \dots, l_{p-1}(x)$ ребра, идущие вверх из вершины $x \in V^0$. Тогда пути $x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ можно сопоставить последовательность $i_0 i_1 \dots$ такую, что $\langle x_{n-1}, x_n \rangle = l_{i_{n-1}}(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots$; последовательность $i_0 i_1 i_2 \dots$ однозначным образом определяет путь $x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$.

Конечный путь $x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = x$ длины n определяет точку $x \in W_n$. Если путь $x^0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = x$ представлен последовательностью $i_0 i_1 \dots i_n$, то мы считаем, что вершина x также представляется этой последовательностью (см. рис. 1).

Пусть $x, y \in W_n$, и пусть x представляется последовательностью $i_0 i_1 \dots i_n$, а y – последовательностью $j_0 j_1 \dots j_n$, где $i_0 = j_0, i_1 = j_1, \dots, i_m = j_m$, но $i_{m+1} < j_{m+1}$ при некотором m . В этом случае мы пишем $x \prec y$. Аналогично, для путей π_1 и π_2 , представленных последовательностями $i_0 i_1 \dots i_n \dots$ и $j_0 j_1 \dots j_n \dots$ соответственно, мы пишем, что $\pi_1 \prec \pi_2$, если $i_0 = j_0, i_1 = j_1, \dots, i_m = j_m$, но $i_{m+1} < j_{m+1}$ для некоторого m .

Пусть $\pi = \{x^0 = x_0 < x_1 < \dots\}$ – бесконечный путь, представленный последовательностью $i_0 i_1 i_2 \dots$. Сопоставим этому пути π p -адическое число

$$t = t(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} i_n p^n, \quad t \in \mathbb{Z}_p.$$

Это соответствие является взаимно однозначным. Более того, частичную упорядоченность $\prec$ на множестве путей можно использовать для того, чтобы ввести частичную упорядоченность на $\mathbb{Z}_p$: а именно, для чисел $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_p$ будем говорить, что $t_1 \prec t_2$, если и только если они соответствуют путям π_1, π_2 таким, что $\pi_1 \prec \pi_2$.

3. ПОСТРОЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Несколько примеров p -адических распределений хорошо известны: это распределения Хаара, Мазура, Бернулли и т.д. [1]. Недавно были построены некоторые периодические распределения [25]–[27].

В настоящем разделе мы, основываясь на двух p -адических распределениях μ_1 и μ_2 , $\mu_1 \neq \mu_2$, заданных на $\mathbb{Z}_p$, строим новое распределение $\mu = \mu(\mu_1, \mu_2)$, определенное на $\mathbb{Z}_p$.

Зафиксируем путь π с представлением $\pi = i_0 i_1 \dots$. Выберем $a \in \mathbb{Z}_p$. Если существует $m \geq 0$ такое, что a имеет представление

$$a = i_0 + i_1 p + \dots + i_m p^m + a_{m+1} p^{m+1} + \dots, \quad a_{m+1} \neq i_{m+1},$$

тогда обозначим m через $m(a, \pi)$. Будем говорить, что два пути, начинающиеся из вершины x^0 , имеют непустое пересечение, если у них есть по крайней мере одно общее ребро.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\pi = \{x^0 = x_0 < x_1 < \dots\}$ – бесконечный путь, представленный последовательностью $i_0 i_1 i_2 \dots$ и μ_1, μ_2 – заданные распределения на $\mathbb{Z}_p$ такие, что $\mu_1 \neq \mu_2$,

$$\mu_1(a + (p^n)) = \mu_2(a + (p^n)) \quad \text{при всех } n \leq m(a, \pi) + 1; \quad (3.1)$$

тогда на $\mathbb{Z}_p$ существует распределение μ , определенное следующим образом на интервалах:

$$\mu(a + (p^n)) = \begin{cases} \mu_1(a + (p^n)), & \text{если } \pi_a \prec \pi, \quad \pi_a \cap \pi = \emptyset \\ & \text{или } \pi_a \cap \pi \neq \emptyset, \quad n \leq m, \\ & \text{или } \pi_a \cap \pi \neq \emptyset, \quad n \geq m + 1, \quad a_{m+1} < i_{m+1}, \\ \mu_2(a + (p^n)), & \text{если } \pi \prec \pi_a, \quad \pi_a \cap \pi = \emptyset \\ & \text{или } \pi_a \cap \pi \neq \emptyset, \quad n \geq m + 1, \quad a_{m+1} > i_{m+1}, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $m = m(a, \pi)$ и π_a есть путь, представляющий точку $a \in \mathbb{Z}_p$ (см. рис. 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим все возможные случаи.

I. Пусть $\pi_a \cap \pi = \emptyset$. Тогда путь π_a всегда остается слева (т.е. $a_0 < i_0$) или справа (т.е. $a_0 > i_0$) от пути π . При любых $n \geq 1$ и $b = 0, 1, \dots, p-1$ число bp^n (см. формулу (2.2)) влияет только на уровни $n, n+1, \dots$ ветви V_{a_0} , растущей из вершины ребра, пронумерованного числом a_0 (где $a_0 \neq i_0$), дерева Γ_0^p . Отметим, что эта ветвь V_{a_0} не пересекается с путем π . Следовательно, имеем равенство $\pi_{a+bp^n} \cap \pi = \emptyset$. Согласно формуле (3.2) для μ в случае, если $\pi_a \cap \pi = \emptyset$ и $\pi_{a+bp^n} \cap \pi = \emptyset$ при любых $b = 0, 1, \dots, p-1$, легко проверить, что μ всегда совпадает с μ_1 (или μ_2), поэтому оно удовлетворяет соотношению для распределений (2.2).

Если $n = 0$, то существует $b_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ такое, что $\pi_{a+b_0} \cap \pi \neq \emptyset$, т.е. $a+b_0 = i_0 + a_1 p + \dots$, где i_0 есть первый член последовательности, представляющей π . Тогда, предполагая, что $\pi_a \prec \pi$, можно переписать равенство (2.2) в виде

$$\mu_1(a + (p^0)) = \sum_{b=0}^{b_0} \mu_1(a + b + (p^1)) + \sum_{b=b_0+1}^{p-1} \mu_2(a + b + (p^1)). \quad (3.3)$$

Поскольку равенство (2.2) верно для μ_1 , равенство (3.3) выполняется, если и только если

$$\sum_{b=b_0+1}^{p-1} \mu_2(a + b + (p^1)) = \sum_{b=b_0+1}^{p-1} \mu_1(a + b + (p^1)). \quad (3.4)$$

Последняя формула справедлива согласно условию (3.1). Пусть теперь $\pi \prec \pi_a$, тогда можно переписать выражение (2.2) следующим образом:

$$\mu_2(a + (p^0)) = \sum_{b=0}^{b_0} \mu_2(a + b + (p^1)) + \sum_{b=b_0+1}^{p-1} \mu_1(a + b + (p^1)). \quad (3.5)$$

Как и в случае $\pi_a \prec \pi$, мы приходим к условию (3.4).

Рис. 2. Полудерево Кэли третьего порядка. Здесь $k = 1$, элементы множества W_1 суть $0, 1, 2$ и $\mu^{(1)}$ совпадает с распределением ν_i на i -й ветви, $i = 0, 1, 2$.

II. Пусть $\pi_a \cap \pi \neq \emptyset$. Тогда существует $m = m(a, \pi) \geq 0$ такое, что a представляется как $a = i_0 + i_1p + \dots + i_mp^m + a_{m+1}p^{m+1} + \dots$, где $a_{m+1} \neq i_{m+1}$.

Рассмотрим случай $n \geq m+2$. Поскольку путь $a_{m+1}a_{m+2} \dots$ не имеет пересечений с π , формула (2.2) при $n \geq m+2$ принимает вид

$$\begin{aligned} \mu_1(i_0 + i_1p + \dots + i_mp^m + a_{m+1}p^{m+1} + \dots + (p^n)) &= \\ = \sum_{b=0}^{p-1} \mu_1(i_0 + i_1p + \dots + i_mp^m + a_{m+1}p^{m+1} + \dots + bp^n + (p^{n+1})), & \quad a_{m+1} < i_{m+1}; \\ \mu_2(i_0 + i_1p + \dots + i_mp^m + a_{m+1}p^{m+1} + \dots + (p^n)) &= \\ = \sum_{b=0}^{p-1} \mu_2(i_0 + i_1p + \dots + i_mp^m + a_{m+1}p^{m+1} + \dots + bp^n + (p^{n+1})), & \quad a_{m+1} > i_{m+1}. \end{aligned}$$

Поскольку μ_1 и μ_2 являются распределениями, последние равенства верны.

Рассмотрим случай $n \leq m+1$. Тогда согласно условию (3.1) имеет место равенство $\mu_1 = \mu_2$, следовательно, соотношение для распределений (2.2) выполняется.

В следующей теореме утверждается, что можно построить новое распределение, используя заданные распределения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть k – натуральное число. Предположим, что для каждого $t \in W_k$ на $\mathbb{Z}_p$ задано распределение ν_t и существует интервал $c + (p^{n_0})$, $n_0 \geq k$, такой, что $\nu_t(c + (p^{n_0})) \neq \nu_s(c + (p^{n_0}))$ для по крайней мере одной пары $t \neq s$, $t, s \in W_k$. Тогда на $\mathbb{Z}_p$ существует распределение $\mu^{(k)} = \mu^{(k)}[\nu_t, t \in W_k]$, которое отлично от ν_t при каждом $t \in W_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распределение $\mu^{(k)}$ можно построить следующим образом (см. рис. 2).

Рассмотрим случай $n \geq k$. Обозначим V_t множество вершин на полубесконечном дереве Γ_t^p , растущих из вершины $t \in V^0$. Если $n \geq k$ и $\pi_a \cap V_t \neq \emptyset$, то для некоторого $t \in W_k$ путь π_{a+bp^n} также остается все время в множестве V_t при любом $b = 0, 1, \dots, p-1$. Таким образом, мы получаем, что

$$\mu^{(k)}(a + (p^n)) = \nu_t(a + (p^n)), \quad \text{если } \pi_a \cap V_t \neq \emptyset, \quad (3.6)$$

откуда следует, что

$$\mu^{(k)}(a + bp^n + (p^{n+1})) = \nu_t(a + bp^n + (p^{n+1})) \quad \text{для любого } b = 0, 1, \dots, p-1.$$

Поскольку ν_t является распределением, соотношение (2.2) верно.

Рассмотрим случай $n \leq k-1$. Без потери общности зададим $\mu^{(k)}(a + (p^n))$ только для a , которое имеет вид

$$a = a_0 + a_1p + \dots + a_{k-1}p^{k-1},$$

где $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Отметим, что последовательность $a_0a_1 \dots a_{k-1}$ представляет единственную точку в W_k .

Для $n = k-1$ будем считать, что

$$\begin{aligned} \mu^{(k)}(a_0 + a_1p + \dots + a_{k-1}p^{k-1} + (p^{k-1})) = \\ = \sum_{b=0}^{p-1} \nu_{a_0a_1 \dots a_{k-2}(a_{k-1}+b) \bmod p}(a_0 + a_1p + \dots + [(a_{k-1} + b) \bmod p]p^{k-1} + (p^k)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь, используя формулу (3.7), положим (при $n = k-2$)

$$\begin{aligned} \mu^{(k)}(a_0 + a_1p + \dots + a_{k-2}p^{k-2} + (p^{k-2})) = \\ = \sum_{b=0}^{p-1} \mu^{(k)}(a_0 + a_1p + \dots + [(a_{k-2} + b) \bmod p]p^{k-2} + (p^{k-1})). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Повторяя это процедуру, получаем рекуррентное выражение

$$\begin{aligned} \mu^{(k)}(a_0 + a_1p + \dots + a_{k-m}p^{k-m} + (p^{k-m})) = \\ = \sum_{b=0}^{p-1} \mu^{(k)}(a_0 + a_1p + \dots + [(a_{k-m} + b) \bmod p]p^{k-m} + (p^{k-m+1})), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $m = 2, 3, \dots, k$.

Из равенств (3.6)–(3.9) следует, что $\mu^{(k)}(a + (p^n))$ удовлетворяет соотношению (2.2) при любых $a \in \mathbb{Z}_p$ и $n \geq 0$. Поэтому согласно теореме 2 мы заключаем, что $\mu^{(k)}$ можно единственным образом продолжить до p -адического распределения на $\mathbb{Z}_p$.

Теперь покажем, что $\mu^{(k)}$ отлично от ν_t при любом $t \in W_k$. Предположим противное, т. е. существует $u \in W_k$ такое, что $\mu^{(k)} = \nu_u$. Это означает, что для любых $a \in \mathbb{Z}_p$ и $n \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$\mu^{(k)}(a + (p^n)) = \nu_u(a + (p^n)). \quad (3.10)$$

Для каждого $a \in \mathbb{Z}_p$ существует такое $t_a \in W_k$, что $\pi_a \cap V_{t_a} \neq \emptyset$. Следовательно, из формул (3.6) и (3.10) получаем, что

$$\mu^{(k)}(a + (p^n)) = \nu_{t_a}(a + (p^n)) = \nu_u(a + (p^n)), \quad n \geq k. \quad (3.11)$$

Когда a пробегает множество своих значений, t_a принимает все возможные значения в W_k . Таким образом, из выражения (3.11) вытекает, что $\nu_t(a + (p^n)) = \nu_u(a + (p^n))$, $n \geq k$, при любом $t \in W_k$. Но этот результат противоречит условию теоремы при $a = c$ и $n = n_0$. Следовательно, $\mu^{(k)} \neq \nu_t$ при всех $t \in W_k$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что распределение $\mu^{(k)}$, упомянутое в теореме 3, может оказаться полезным при построении распределений μ_1 и μ_2 , удовлетворяющих условию теоремы 2. В самом деле, пусть $k = 1$ и $\pi = i_0 i_1 \dots$. Рассмотрим ν_0, ν_1 такие, что $\nu_0(c + (p^{n_0})) \neq \nu_1(c + (p^{n_0}))$ при некоторых $n_0 \geq 1$ и $\pi_c \cap \pi = \emptyset$. Определим $\tilde{\nu}_t$, $t \in W_1$, посредством равенства

$$\tilde{\nu}_t = \begin{cases} \nu_0, & \text{если } t = i_0, \\ \nu_1, & \text{если } t \neq i_0. \end{cases}$$

Выберем $\mu_1 = \nu_0$ и $\mu_2 = \mu^{(1)}[\tilde{\nu}_t, t \in W_1]$, тогда легко проверить, что $\mu_1 \neq \mu_2$ и они удовлетворяют условию теоремы 2.

В теории p -адического интегрирования необходимо знать p -адическую меру, поскольку интеграл от непрерывной функции, вычисленный относительно неограниченного p -адического распределения, может не существовать (более подробно см. книгу [1]). В следующей теореме мы приводим условия, при которых p -адические распределения, упомянутые в теоремах 2 и 3, превращаются в p -адические меры.

ТЕОРЕМА 4. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Распределение μ , упомянутое в теореме 2, ограничено, если и только если μ_1 и μ_2 ограничены.
2. Распределение $\mu^{(k)}$, упомянутое в теореме 3, ограничено, если и только если $\nu_t(a + (p^n))$ ограничено при любых $t \in W_k$ и $n \geq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Это утверждение является следствием равенства (3.2).

2. Рассмотрим случай $n \geq k$. Тогда из формулы (3.6) мы получаем, что $\mu^{(k)}$ ограничено, если и только если ν_t ограничено при любых $t \in W_k$.

Рассмотрим случай $n \leq k - 1$. Поскольку правая часть выражения (3.7) есть сумма ограниченных членов (согласно случаю $n = k$), левая часть тоже должна быть ограниченной. Следовательно, применяя рекуррентные формулы (3.7)–(3.9), можно видеть, что $\mu^{(k)}$ ограничено, если и только если $\nu_t(a + (p^n))$ ограничено при любых $t \in W_k$ и $n \geq k$.

Список литературы

- [1] Н. Коблиц, *p*-Адические числа, *p*-адический анализ и дзета-функции, Мир, М., 1981.
- [2] G. Gras, *Mesures p-Adiques*, *Théorie des nombres*, Année, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Univ. Franche-Comté, Besançon, 1991/1992.

- [3] E. G. Beltrametti, G. Cassinelli, “Quantum mechanics and p -adic numbers”, *Found. Phys.*, **2** (1972), 1–7.
- [4] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Изд-во МЦНМО, М., 2004.
- [5] Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухамедов, У. А. Розиков, “Фазовые переходы в модели Изинга на $\mathbb{Z}$ над полем p -адических чисел”, *Узб. матем. журн.*, 1998, № 4, 23–29.
- [6] G. Gandolfo, U. A. Rozikov, J. Ruiz, “On p -adic Gibbs measures for hard core model on a Cayley tree”, *Markov Process. Related Fields*, **18**:4 (2012), 701–720.
- [7] M. Khamraev, F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, “On the uniqueness of Gibbs measures for p -adic non homogeneous λ -model on the Cayley tree”, *Lett. Math. Phys.*, **70**:1 (2004), 17–28.
- [8] A. Yu. Khrennikov, F. M. Mukhamedov, J. F. F. Mendes, “On p -adic Gibbs measures of the countable state Potts model on the Cayley tree”, *Nonlinearity*, **20**:12 (2007), 2923–2937.
- [9] A. Yu. Khrennikov, *p -Adic Valued Distributions in Mathematical Physics*, Mathematics and Its Applications, **309**, Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [10] A. Yu. Khrennikov, S. Yamada, F. van Rooij, “The measure-theoretical approach to p -adic probability theory”, *Ann. Math. Blaise Pascal*, **6**:1 (1999), 21–32.
- [11] F. M. Mukhamedov, “On the existence of generalized Gibbs measures for the one-dimensional p -adic countable state Potts model”, *Тр. МИАН*, **265** (2009), 177–188.
- [12] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, “On Gibbs measures of p -adic Potts model on the Cayley tree”, *Indag. Math. (N. S.)*, **15**:1 (2004), 85–99.
- [13] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, “On inhomogeneous p -adic Potts model on a Cayley tree”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **8**:2 (2005), 277–290.
- [14] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, J. F. F. Mendes, “On phase transitions for p -adic Potts model with competing interactions on a Cayley tree”, *p -Adic Mathematical Physics* (Belgrade, Serbia and Montenegro, 15–21 September, 2005), AIP Conference Proceedings, **826**, eds. A. Yu. Khrennikov, Z. Rakic, I. V. Volovich, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2006, 140–150.
- [15] F. M. Mukhamedov, M. Saburov M., O. N. Khakimov, “On p -adic Ising–Vannimenus model on an arbitrary order Cayley tree”, *J. Stat. Mech.*, **2015** (2015), P05032, 26 pp.
- [16] F. M. Mukhamedov, “On dynamical systems and phase transitions for $q + 1$ -state p -adic Potts model on the Cayley tree”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **16**:1 (2013), 49–87.
- [17] W. H. Schikhof, *Ultrametric Calculus. An introduction to p -adic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **4**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [18] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p -адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [19] A. Yu. Khrennikov, “ p -Adic valued probability measures”, *Indag. Math. (N. S.)*, **7**:3 (1996), 311–330.
- [20] A. C. M. van Rooij, *Non-Archimedean Functional Analysis*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **51**, M. Dekker, New York, 1978.
- [21] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, М., Мир, 1992.
- [22] P. M. Bleher, N. N. Ganikhodjaev, “On pure phases of the Ising model on the Bethe lattice”, *Theory Probab. Appl.*, **35**:2 (1990), 216–227.
- [23] U. A. Rozikov, *Gibbs measures on Cayley Trees*, World Sci. Publ., Singapore, 2013.
- [24] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic, London, 1982.
- [25] Z. T. Tugyonov, “On periodic p -adic distributions”, *p -Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **5**:3 (2013), 218–225.
- [26] З. Т. Тугенов, “Периодичность распределения Бернулли”, *Узб. матем. журн.*, **2** (2013), 107–111.
- [27] Zohid T. Tugyonov, “Non uniqueness of p -adic Gibbs distribution for the Ising model on the lattice $\mathbb{Z}^d$ ”, *Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ.*, **9**:1 (2016), 123–127.